

# 单延迟三阶、四阶相关函数 确定超短光脉冲形状

张包锋 张行愚 陈文驹  
(南开大学物理系)

## 提 要

本文提出用单延迟三阶、四阶相关函数,经傅里叶变换获得脉冲形状的方法。在实验上用克尔快门测量了YAG被动锁模激光脉冲的三阶和四阶相关函数,并用该方法获得脉冲形状。文中还讨论了脉冲对称性对恢复脉冲的影响。

关键词: 三阶相关,四阶相关,傅里叶变换,脉冲形状。

## 一、引 言

测量超短光脉冲的形状及宽度,对研究超短光脉冲产生的机理、超快过程及其开发应用有十分重要的意义。近年来人们曾提出多种测量方法。使用条纹相机<sup>[1]</sup>。可直接观测超短脉冲的形状,但其设备昂贵;喇曼散射法<sup>[2]</sup>,虽然给出脉冲形状,但其装置和实验都很复杂,难以得到普遍应用。利用高阶相关函数确定脉冲形状是目前比较广泛应用的方法之一<sup>[3,4,5]</sup>。为了从相关函数恢复原脉冲形状,以往采用的方法是首先假设脉冲形状<sup>[3]</sup>,求出该脉冲的参量,然后将实验所测到的相关函数与之拟合,最后确定脉冲的近似形状。这种方法由于在假设初始脉冲形状时存在着一定的经验性和盲目性,而且在计算过程中只是在有限的若干点上进行拟合,所以得到的结果不能准确地反映实际脉冲形状。

本文介绍一种由实测单延迟三阶、四阶相关函数来确定超短光脉冲形状的方法。这种方法无须假设脉冲模型,而是由相关函数根据傅里叶变换原理进行编程计算求得脉冲形状。我们用克尔快门测量了YAG被动锁模激光脉冲的三阶、四阶相关函数,并确定锁模脉冲的形状和宽度。文中还讨论了脉冲对称性对恢复脉冲的影响。实验结果与理论分析符合得较好,表明该方法是测量超短光脉冲形状的一种有效的方法。

## 二、理论分析

超短光脉冲  $I(t)$  的单延迟三阶、四阶相关函数分别为

$$T_3(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} I^2(t) I(t-\tau) dt, \quad (1)$$

$$T_4(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} I^2(t) I^2(t-\tau) dt, \quad (2)$$

对(1)、(2)式两边作傅里叶变换,得

$$\mathcal{F}[T_3(I)] = \mathcal{F}[I^2(t)] \mathcal{F}^*[I(t)], \quad (3)$$

$$\mathcal{F}[T_4(\tau)] = \mathcal{F}[I^2(t)] \mathcal{F}^*[I^2(t)], \quad (4)$$

设

$$\mathcal{F}[I^2(t)] = A(\omega) + iB(\omega), \quad (5)$$

则

$$\mathcal{F}[I^2(t)] = A(\omega) + iB(\omega), \quad (6)$$

将(5)、(6)式代入(4)式得

$$\mathcal{F}[T_4(\tau)] = A^2(\omega) + B^2(\omega), \quad (7)$$

如果脉冲只是近似对称的,  $|B(\omega)| \ll |A(\omega)|$  在近似条件下可以认为  $B(\omega) = 0$

$$A(\omega) = \{\mathcal{F}[T_4(\tau)]\}^{1/2}, \quad (8)$$

$$A(\omega) = \mathcal{F}[I^2(t)], \quad (9)$$

因而有

$$I^2(t) = \mathcal{F}[A(\omega)] = \mathcal{F}\{\mathcal{F}[T_4(\tau)]\}^{1/2}, \quad (10)$$

(10)式表明,由四阶相关函数  $T_4(\tau)$  经上述傅里叶变换后,可获得一个对称的  $I^2(t)$ 。现将(10)式的结果代入(3)式得

$$\mathcal{F}[T_3(\tau)] = \mathcal{F}^*[I(t)] \{\mathcal{F}[T_4(\tau)]\}^{1/2}, \quad (11)$$

从(11)式即可获得光脉冲形状

$$I(t) = \mathcal{F}\{\mathcal{F}^*[T_3(\tau)] / [\mathcal{F}(T_4(\tau))]^{1/2}\}, \quad (12)$$

从上述分析表明,只要通过实验的方法得到光脉冲的三阶和四阶相关函数  $T_3(\tau)$  及  $T_4(\tau)$ , 无须事先假设脉冲的模型,即可由(12)式直接获得脉冲形状。

由于该方法是首先由四阶相关函数  $T_4(\tau)$  经傅里叶变换得到一个对称脉冲  $I^2(t)$ , 它是非对称脉冲  $I(t)$  的一个近似。然后将对称的  $I^2(t)$  代入三阶相关函数  $T_3(\tau)$  中,求得非对称脉冲  $I(t)$  的形状。显然脉冲的不对称性将影响恢复脉冲形状  $I(t)$  的准确度。为了估计这种依赖关系,我们以指数形脉冲为例,对两种不同非对称性的指数形脉冲进行分析和模拟计算。设

$$I(t) = \begin{cases} \exp(t/\delta) & t < 0 \\ \exp(-t) & t \geq 0 \end{cases}$$

式中  $0 < \delta \leq 1$  是标志脉冲不对称性参数。当  $\delta \rightarrow 0$  时,表明脉冲完全不对称,而  $\delta = 1$  表示完全对称。

### 1. 恢复脉冲的形状对 $\delta$ 的依赖关系

分别选取  $\delta = 0.8$  及  $\delta = 0.6$  两种非对称情况进行计算。将  $\delta$  值直接代入(12)式所得理论脉冲记作  $I_T(t)$ , 把  $I_T(t)$  代入(1)、(2)式得三阶、四阶相关函数,根据上述原理对三阶、四阶相关函数编程计算求得恢复脉冲并记作  $I_R(t)$ 。计算结果如图1所示。 $\delta = 0.8$  时恢复脉冲偏离理论脉冲要比  $\delta = 0.6$  时小,也就是说恢复脉冲与原脉冲的偏离程度随不对称性的增加而增大。

### 2. 恢复脉冲不同部位对 $\delta$ 的依赖关系

设脉冲峰值的强度为  $I_0$ , 我们分别对  $0.5I_0$  及  $0.1I_0$  处脉冲宽度进行比较,理论脉冲

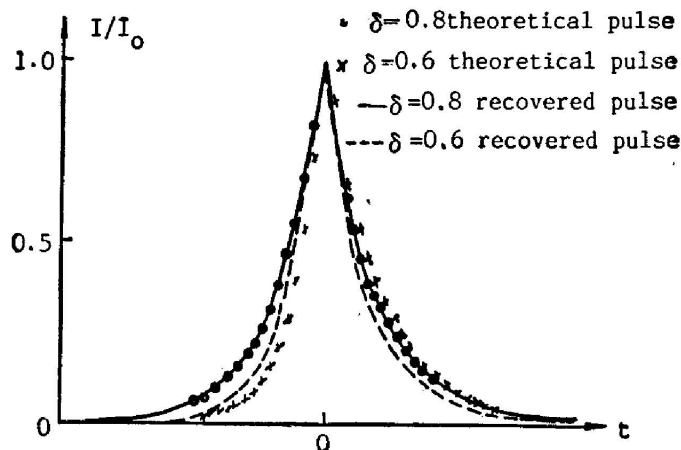


Fig. 1 The dependence of the shape of the recovered pulse on  $\delta$

$I_T(t)$ 的全宽度记作  $t_T$ , 恢复脉冲  $I_R(t)$ 的全宽度记作  $t_R$ ,  $t_R/t_T$  描述两脉冲宽度的偏差。计算结果由图 2 示出。它表明在脉冲强度  $0.1I_0$  处, 恢复脉冲与理论脉冲的宽度是一致的。而在脉冲半强度  $0.5I_0$  处, 脉冲宽度是偏离随  $\delta$  的增大而减小。当  $\delta \geq 0.6$  时, 恢复脉冲和理论脉冲的宽度基本一致。

### 3. 恢复脉冲对称性偏差 ( $\Delta R/\Delta T$ ) 对 $\delta$ 的依赖关系

为了分析这种依赖关系, 我们引进参数  $\Delta R/\Delta T$  来描述恢复脉冲对称性偏差。其中  $\Delta R$  是恢复脉冲左半部宽度与右半部宽度之比,  $\Delta T$  是理论脉冲左半部宽度与右半部宽度之比。同样, 计算了在  $0.5I_0$  处及  $0.1I_0$  处两种情况。计算结果由图 3 给出。它表明对称偏差随  $\delta$  的增加而减小。当  $\delta \geq 0.6$  时, 它们之间的差别变得很小。同时可以看出, 恢复脉冲比理论脉冲的不对称性有所降低。

从以上分析可以看出, 用这种方法对脉冲恢复时, 恢复脉冲的形状, 宽度以及对称的偏

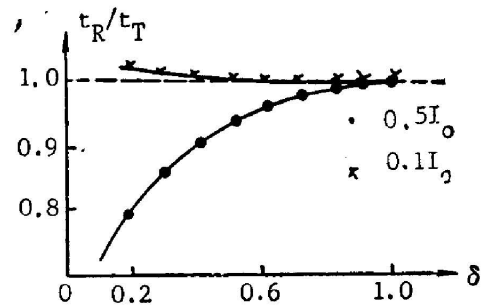


Fig. 2 The dependence of the deviation of the recovered pulse width on  $\delta$

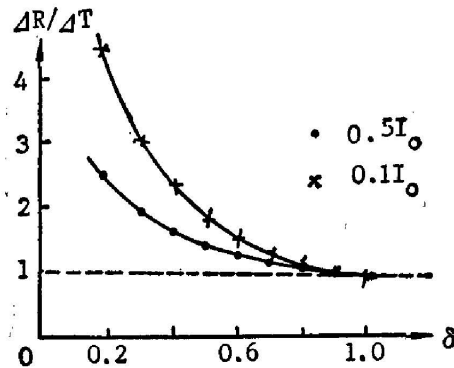


Fig. 3 The dependence of the symmetry deviation of the recovered pulse on  $\delta$

差依赖原脉冲的对称性。当  $\delta \geq 0.6$  时, 这种偏差可以忽略。对于多数超短光脉冲来说,  $\delta > 0.7^{[1,2]}$ , 因此这个条件是可以满足的。

### 三、超短光脉冲的三阶和四阶相关函数的测量

#### 1. 实验原理

设  $I_1(t)$  为开门脉冲,  $I_2(t)$  为信号脉冲, 当克尔介质厚度为  $L$  时, 由克尔介质产生的  $o$  光和  $e$  光的位相差为

$$\delta(t) = \frac{2\pi}{\lambda} L \cdot \Delta n(t), \quad (14)$$

式中  $\lambda$  为波长,  $\Delta n(t)$  为  $o$  光与  $e$  光的折射率差。由此而产生的透过率为

$$T(t) = \frac{1}{2} T_1 T_2 \sin^2 \left[ \frac{\delta(t)}{2} \right], \quad (15)$$

式中  $T_1$ 、 $T_2$  分别为平行于起偏器及检偏器的偏振光的透过率。当克尔介质的取向弛豫时间远小于光脉冲宽度时<sup>[7]</sup>

$$\Delta n(t) \doteq \eta I_1(t), \quad (16)$$

式中  $\eta$  为克尔系数。当  $\delta(t)$  很小时, (15) 式可写为

$$T(t) \doteq \frac{1}{2} T_1 T_2 \left[ \frac{\delta(t)}{2} \right]^2 \alpha I_1^2(t), \quad (17)$$

信号脉冲  $I_2(t)$ , 经  $\tau$  时刻的延迟后到达克尔盒, 经检偏器得到的积分信号为

$$T(\tau) \propto \int_{-\infty}^{\infty} I_1^2(t) I_2(t-\tau) dt, \quad (18)$$

若开门脉冲  $I_1(t)$  与信号脉冲  $I_2(t)$  是由同一束光  $I(t)$  分束得到的, 那么根据 (1) 式, 于是 (18) 式即为:

$$T(\tau) \propto \int_{-\infty}^{\infty} I^2(t) I(t-\tau) dt = T_3(\tau), \quad (19)$$

若  $I_2(t)$  是  $I_1(t)$  的二次谐波, 则有

$$T(\tau) \propto \int_{-\infty}^{\infty} I^2(t) I^2(t-\tau) dt = T_4(\tau), \quad (20)$$

由 (19)、(20) 式得知, 当通过克尔快门信号光为基波时, 所测量的透射光为三阶相关函数  $T_3(\tau)$ , 当信号光为二次谐波时, 所测量的透射光为四阶相关函数  $T_4(\tau)$ 。

#### 2. 实验装置及结果

根据克尔快门工作原理, 我们设计实验装置如图 4 所示, 用以同时获得超短光脉冲的三阶和四阶相关函数。实验用 YAG 被动锁模激光器产生的超短光脉冲序列, 脉冲宽度为 78 ps, 相邻脉冲间隔为 10 ns, 偏振方向垂直纸面, 通过 LiNbO<sub>3</sub> 倍频晶体获得  $\lambda = 532$  nm 的信频光脉冲, 由格兰偏振棱镜 GP 分为两束光, 其中反射束  $I_1(t)$  波长  $\lambda = 1064$  nm 作为开门脉冲。调整格兰偏振棱镜使其透射光束  $I_2(t)$  为 532 nm 和 1064 nm 的混合光。  $I_1$  比  $I_2$  大两个数量级, 因此满足 (20) 式。透射光束经可变光延迟器 VD, 由透镜 L 会聚于克尔盒作为信号脉冲。信号光与开门光夹角为 7°。克尔介质为 CS<sub>2</sub>, 厚度为 5 mm。光信号由 MRD 500 快速二极管  $D_1$  接收, 在 Tektronix 466 快速存储示波器上显示, 二极管  $D_2$  监视光脉冲

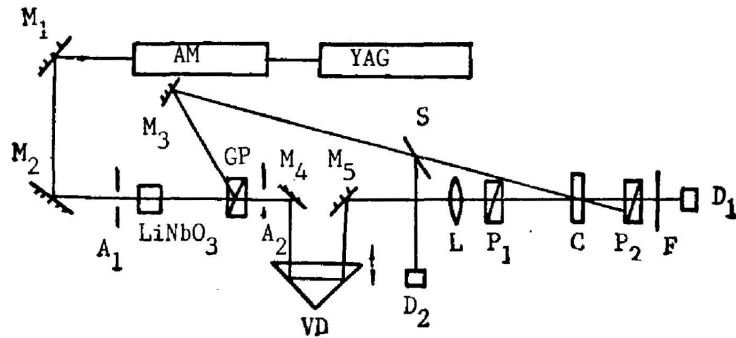


Fig. 4 Schematic of the experimental setup

A—Aperture; C—Kerr cell; Gp—Glan prism; L—Lens; M—Mirror; P—Polarizer; S—Beam splitter; VD—Variable optical delay line; F—Filter; D—Photodiode

强度。在接收器  $D_1$  前置  $\lambda=1064\text{nm}$  滤光片  $F$  时, 探测到的信号为三阶相关函数  $T_3(\tau)$ 。当  $F$  为  $532\text{nm}$  滤光片时, 探测到的信号为四阶相关函数  $T_4(\tau)$ 。实验所测量的 YAG 被动锁模激光单延迟三阶和四阶相关函数如图 5 所示, 图中的每个实验点是 5 次测量的平均结果。实验是采用存储示波器时锁模脉冲序列的中心脉冲进行测试, 因而观测到的是单脉冲的结果。

#### 四、恢复脉冲的形状和宽度

先将实验所获得的相关函数进行计算机拟合, 结果由图 5 给出, 拟合曲线可由下面多项式表示

$$\left. \begin{aligned}
 T_4(\tau) &= \left[ \sum_{i=0}^6 b_i \left( \frac{\tau}{T} \right)^i \right] \exp \left[ -0.5 \left( \frac{\tau}{T} \right)^2 \right], \\
 T_3(\tau) &= \left\{ \begin{aligned}
 &\left[ \sum_{i=0}^6 b_i \left( \frac{\tau}{T} \right)^i \right] \exp \left[ -0.4 \left( \frac{\tau}{T} \right)^2 \right], \\
 &\left[ \sum_{i=0}^6 c_i \left( \frac{\tau}{T} \right)^i \right] \exp \left[ -0.5 \left( \frac{\tau}{T} \right)^2 \right],
 \end{aligned} \right\} \quad (21)
 \end{aligned}$$

式中系数  $a_i, b_i, c_i$  的数值列于表 1 中。然后用 (21) 式的  $T_3(\tau)$  和  $T_4(\tau)$ , 根据 (10)、(12) 式

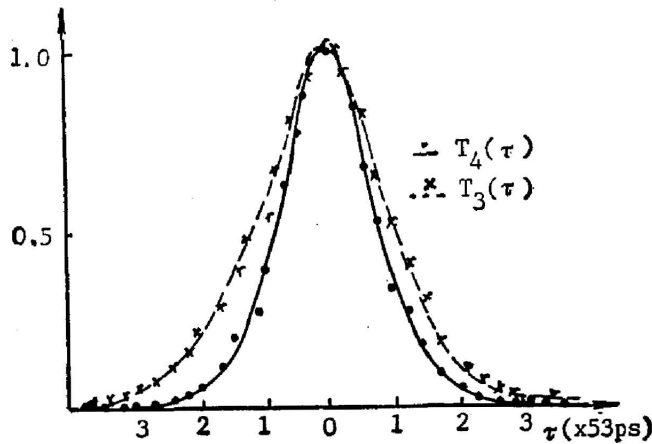


Fig. 5 The single-delay correlations  $T_3(\tau)$  and  $T_4(\tau)$  of the pulse obtained by experimental measurement

Table 1 The values of  $a_i$ ,  $b_i$  and  $c_i$  in eq. (2)

$i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$
0	0.999687450	0.997836415	1.00015668
1	0.0101212878	0.0943161793	0.00433377428
2	-0.391046935	-0.788683446	-0.503434395
3	0.129125734	0.966780764	0.8423322
4	0.108000329	-0.385822429	-0.388016655
5	-0.0564867705	0.0588986575	0.071418206
6	0.00758836289	0.000569784	-0.0015609914

作编程计算,即可获得恢复脉冲形状。该脉冲形状如图 6 所示,脉冲经曲线拟合可表示为

$$I(t) = \begin{cases} \left[ \sum_{i=0}^2 a_i \left( \frac{t}{T} \right)^i \right] \exp\left(1.2 \frac{t}{T}\right), & t < -\Delta t \\ \text{高斯形}, & \Delta t \geq t \geq -\Delta t \\ \left[ \sum_{i=0}^1 b_i \left( \frac{t}{T} \right)^i \right] \exp\left(-\frac{t}{T}\right), & t > \Delta t \end{cases} \quad (22)$$

式中  $\Delta t = 13.3$  ps,  $a_i$ ,  $b_i$  的数值由表 2 给出。脉冲宽度为 78 ps。表 2 为恢复脉冲拟合曲线中的  $a_i$  和  $b_i$  值。上述结果说明:脉冲前沿陡于后沿,是近似对称的复杂线形,而不是严格的高斯形。

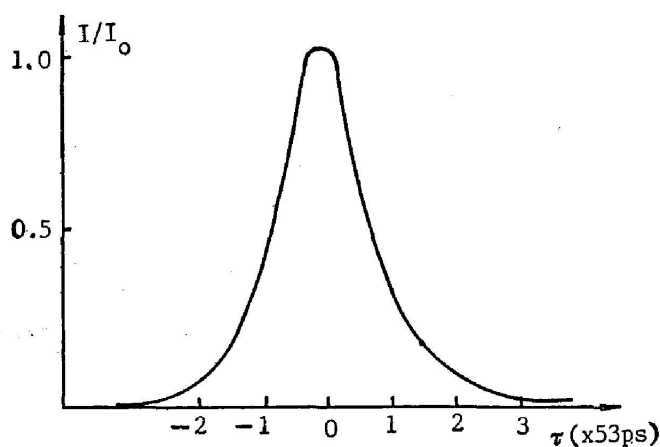


Fig. 6 The pulse recovered by single-delay 3rd- and 4th-order correlations

Table 2 The values of  $a_i$  and  $b_i$  in eq. (22)

$i$	$a_i$	$b_i$
0	1.00353021	0.939282467
1	0.293436288	-0.0384412515
2	-0.132126366	0

为了验证方法的正确性,我们计算了所获恢复脉冲的三阶、四阶相关函数,并将其结果与实验测量的三阶、四阶相关函数作了比较,如图 7 所示。从图中可以看出理论分析与实验

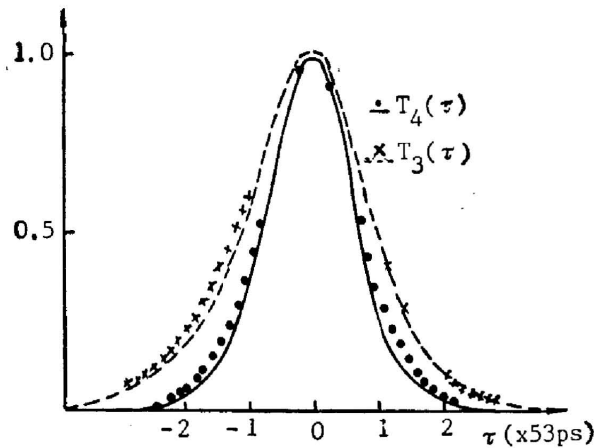


Fig. 7 The comparison of  $T_3(\tau)$ ,  $T_4(\tau)$  of measured and calculated by the recovered pulse

●, × measured correlation function  
 ---, — calculated correlation function by recovered pulse

结果相符。从而表明用三阶和四阶相关函数能准确恢复脉冲形状。由于条件所限,无法用条纹相机观测以进行对比。脉冲宽度与我们用双光子荧光法测量结果相一致。而恢复脉冲形状与喇曼散射法<sup>[2]</sup>基本一致。

## 五、讨 论

(1) 在利用光克尔快门时,要求克尔介质的弛豫时间远小于光脉冲宽度,本工作采用  $\text{CS}_2$  作为克尔介质,其弛豫时间为 2 ps,而光脉冲宽度为 78 ps,所以可以认为满足上述要求。

其次,克尔液体厚度为 5 mm,这样 1064 nm 和 532 nm 的光由于色散造成时间差小于 1 ps。这相对脉冲宽度 78 ps 而言可以忽略。

实验中开门光和信号光夹角为  $7^\circ$ ,由于两光束不共线使开门时间延长,这个延长时间小于 0.5 ps 也可以忽略。

在实验中还要精调光延迟器,使光信号在光延迟器调节过程中始终通过开门区,这样所测克尔快门的透射光就是三阶、四阶相关函数。

(2) 本文是以指数形脉冲进行分析,对任何其他形状脉冲,如高斯形,洛仑兹形以及双曲正割形等也曾进行类似的计算。结果表明该方法依然有效。

(3) 在人们普遍采用的二阶相关方法中,不论原脉冲是否对称,恢复的脉冲都丢掉了原脉冲的不对称信息。而双光子荧光法只能确定脉冲宽度,且精度较差。正如上述原理所表明,该方法包含了脉冲的不对称信息,因而能够更精确地恢复脉冲形状。这正是该方法的优越性之一。

由于恢复脉冲的精度受光脉冲不对称性的影响。当不对称超过一定程度  $\delta < 0.3$  后,精度有所下降(如前所分析的),尽管如此,它仍保留了脉冲的不对称信息,因此该方法仍比通常所用的相关法要优越(如前言指出的),要想获得更精确结果,可采用更高级近似,并引入评价函数来判断恢复脉冲的精度。有关这方面的工作将另文发表。

(4) 用上述方法恢复脉冲形状时,三阶和四阶相关函数的光滑程度对结果有影响,为此

对实测的三阶、四阶相关函数要进行拟合处理。

(5) 本文的方法也可用于通过二阶、三阶相关函数来确定超短光脉冲形状。

(6) 目前条纹相机仅能观测 1 ps 以上的脉冲, 对于更短的光脉冲的观测仍需借助于相关方法。而该文的方法是对相关方法的发展, 并且方法的原理同样可应用于更短的光脉冲'这对超短光脉冲的观测具有普遍意义。

结论:

综上所述, 单延迟三阶、四阶相关函数确定超短光脉冲形状与其他相关法比较具有如下优越性:

(1) 无须首先假设脉冲模型, 因而不带有经验性。

(2) 该方法是对相关函数进行拟合变换, 而不是仅限于有限点的拟合, 从而提高了精度。

(3) 对于对称性差的脉冲, 本法仍有效。

### 参 考 文 献

- [1] G. Kryukov, V. S. Letokhov; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1972, **QE-8**, No. 10 (Oct), 766~782.
- [2] D. Von der Linde; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1972, **QE-8**, No. 3 (Mar), 328~337.
- [3] H. P. Weber, H. G. Danielmeyer; *Phys. Rev. (A)*, 1970, **3**, No. 5 (Nov), 2074~2079.
- [4] 张肇源等;《物理学报》, 1982, **31**, No. 2 (Feb), 213~219.
- [5] J. Etchepare *et al.*; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1983, **QE-19**, No. 5 (May), 775~778.
- [6] A. W. Smith, A. J. Landon; *Appl. Phys. Lett.*, 1970, **17**, No. 8 (Oct), 340~343.
- [7] M. A. Duguay, J. W. Hansen; *Appl. Phys. Lett.*, 1969, **15**, No. 6 (Sep), 192~194.

## Determination of ultrashort light pulse shape by single-delay 3rd- and 4th- order intensity correlations

ZHANG BAOZHENG, ZHANG XINGYU AND CHEN WENJU

(Physics Department, Nankai University, Tianjin)

(Received 11 January 1988; revised 2 December 1988)

### Abstract

The method for obtaining ultrashort light pulse shape based on Fourier transform by measuring the third- and fourth- order correlation functions  $T_3(\tau)$ ,  $T_4(\tau)$  is presented. The  $T_3(\tau)$  and  $T_4(\tau)$  of the pulse from a passively mode-locked YAG laser is measured experimentally by means of optical Kerr shutter. The effect of the symmetry of the pulse on the recovery of the pulse shape is also discussed.

**Key words:** 3rd-order correlation; 4th-order correlation; Fourier transform; Pulse shape.