

# 离散汉克尔变换及其在高效激光整形中的应用\*

李永平 朱 江

(中国科学技术大学物理系)

## 提 要

发展了离散零阶汉克尔变换并应用到光场均匀化的相位元件设计, 结果显示比二维傅氏变换更为理想和精确。

关键词: 汉克尔变换, 贝塞尔函数, 脉冲调制。

## 一、引 言

光场均匀化技术在高功率激光器用于核反应研究中、金属强化、光通讯等高新技术领域至关重要。各种均匀化方法各有优劣, 一般缺点是装置复杂, 调整困难, 由于光路元件多, 致使能量损失大等。作者基于光场相位因子调整而引起的次波衍射原理<sup>[1]</sup>, 采用无量纲二维傅氏变换以及计算机模拟, 在提高精度和转换率的情况下, 设计了二维相位元件。该方法不仅适用于高斯光束, 对椭圆半导体波面和双模波面均适用。

正如文献[1]中指明, 由于采用了直角坐标, 相位片成为矩形, 最终的自洽输出结果在  $x$  和  $y$  方向上略有偏差。在实验中可能看不出这种偏差, 但对于一种高精度的光场变换理论, 它总归是一种缺陷。而且二维运算量很大, 其中包括参数的模拟调节。为此, 研究了用于二维圆对称场的一维零阶汉克尔变换法, 结果显示出更高精度和更为理想的矩形波输出。

## 二、变换方法及检验

直角系中二维傅氏变换在圆对称情况化为极坐标零阶汉克尔变换<sup>[2]</sup>

$$F(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} r f(r) J_0(2\pi\rho r) dr, \quad (1)$$

其中

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-iz \cos \beta) d\beta \quad (2)$$

是零阶贝塞尔函数。这是极坐标下圆对称问题的结果。本质上不应用简单的一维傅氏积分来代替二维问题<sup>[3]</sup>。

对双侧奇数点抽样的离散公式取为

收稿日期: 1988年9月10日; 收到修改稿日期: 1988年11月14日

\* 国家自然科学基金资助的课题。

$$H(m\Delta\rho) = 2\pi\Delta r \sum_{k=0}^N h(K\Delta r) K\Delta r J_0(2\pi\Delta\rho\Delta r \cdot Km), \quad m=0, 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

式中  $H$  和  $h$  类比(1)式中的  $F$  和  $f$  分别对应原函数和像函数。抽样点数  $N$  不受 2 的幂次方限制。贝塞尔函数的幂级数表示为

$$J_0(x) = \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2K}}{(K!)^2}. \quad (4)$$

$J_0(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  时有渐近式  $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 。由于机器容量限制了大阶乘运算且该函数的渐近行为呈振荡型, 我们采用<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ P_0(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - Q_0(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right], \\ P_0(x) &= 1 + \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K \frac{((2K-1)!!)^2}{(2K)!(8x)^{2K}}, \\ Q_0(x) &= \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^{K+1} \frac{((4K+1)!!)^2}{(2K+1)!(8x)^{K+1}}. \end{aligned} \quad (5)$$

来计算贝塞尔函数的中间值。该方法比(4)式收敛快, 同时解决了误差较大的矛盾。对  $\omega=0$ , 64 各零点坐标值的验证, 精度在  $10^{-10}$  以下, 从而保证了数值解的可靠性。

作为方法的检验, 图 1 给出了爱里班的变换。可看出像函数非常理想。由于截断窗口的限制, 出现的波纹比傅氏变换小得多。

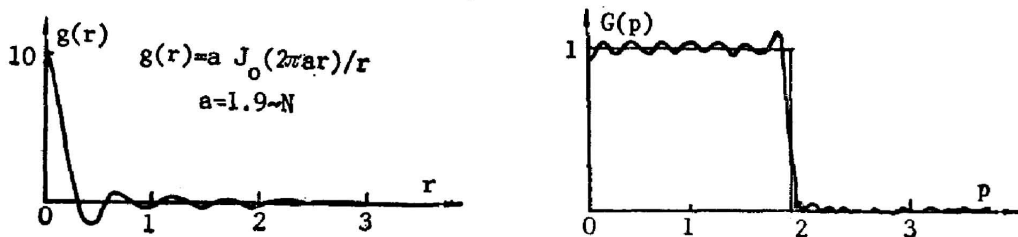


Fig. 1 Hankel transform of Airy-disk

### 三、高斯光束均匀化整形的模拟

我们仍然采用自洽迭代法模拟设计简单插入式相位元件。它的基本原理是先设定理想的高斯输入光场和理想矩波输出场, 将输入输出场加入相位因子后反复进行正逆汉克尔变换, 每次变换前将前次的相位信息保留而强使振幅为理想波形, 直到若干次后变换前后振幅和相位都趋于稳定分布, 且振荡分布和理想波形平均相差  $10^{-4} \sim 10^{-5}$  因子。此时相位数据即为所要求的元件制作数据。为了能在大范围调节参数, 仍然采用无量纲模拟手段, 其和实验物理参数的关系见文献[1]。它主要涉及无量纲原、像宽度, 元件尺寸以及波长等的相互关系。整个过程服从输入输出的瑞利关系, 即能量守恒, 从而提高变换效率, 其理论值是100%。

我们改进了常数型原始初相位值的设定。在本文中原始初相位设定为随机分布, 以后逐次在正逆变换中该分布的相位得到调整最后趋于稳定。随机数由幂剩余法产生

$$X_n = \text{MOD}[(\text{MOD}(c \cdot x_{n-1}, 2^{16}) + A, 2^{16})]. \quad (6)$$

$C$ 、 $A$  为常数,  $X_n$  为随机序列,  $2^{10}$  是重复周期。随机初相位方法大大减少了自洽次数。采用双侧偶数点抽样, 即 (3) 式中  $m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \dots N - \frac{1}{2}$ 。这种抽样不会产生  $\pi$  相位反转。时间域和空间频域的抽样间隔均取为  $\Delta t = \Delta f = 0.035$ , 样本点数  $N = 76$ 。该种抽样方法对应到傅氏变换相当于采样周期  $T = 0.035$  而频域  $\frac{1}{N'T} = 0.035$  意味着  $N'$  实际上变为 816 个点, 这使采样精度大大提高且窗口中的原、像函数分布比较均匀。

图 2 表示了 10 次自洽后的矩形波输出, 图 3 是自洽后的相位分布。从图中可看出矩形波更趋于理想, 它既没有 Lee 的顶部下凹<sup>[3]</sup>, 也没有我们以前的顶部上凸<sup>[1]</sup>。更重要的是该结果几乎没有边带成份, 这说明能量转换接近 100%。从图 3 中可看到相位分布较平滑, 这是抽样密度高的缘故。这种较为平滑的分布给制作带来方便。

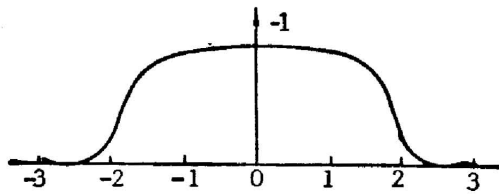


Fig. 2 Rectangular output field after self-consistent

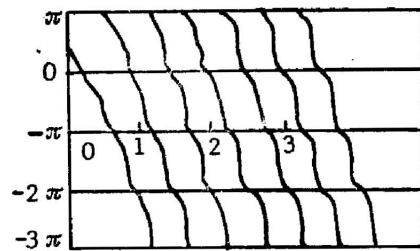


Fig. 3 Phase distribution after self-consistent

## 四、讨 论

由于零阶汉克尔变换符合问题的物理实际, 也由于在数学方法和计算手段上的一些考虑使该变换得以实践。它体现在速度和精确度上皆比二维方法有优越性。一个自然想法是能否对非圆对称光场实施该种变换。我们分析表明这种可能性是存在的。非对称可以使用高阶汉克尔变换, 而且高阶变换不一定比零阶复杂。比如贝塞尔核在高阶时就可以使用母函数而不象本文要在精度上仔细考虑各种手段。所以将零阶汉克尔变换用于光场变换是开辟了另一种实用的变换理论和设计方法。按此方法所剩下的唯一制作问题仅是选择对特定波长的高透或高反材料。

## 参 考 文 献

- [1] 李永平等;《光学学报》, 1988, 8, No. 11 (Nov), 991~997。
- [2] R. N. Bracewell;《傅里叶变换及其应用》, (邮电出版社, 北京, 1986), 287。
- [3] W. H. Lee; *Optics Commun.*, 1981, 36, No. 36 (Aug), 468。
- [4] M. Abramovitz;《Handbook of Tables for Mathematics》, (the Chemical Rubber Co., 1970, New York)。

## Discrete Hankel transform and its application to laser shaping in high efficiency

LI YONGPING AND ZHU JIANG

*(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)*

(Received 10 September 1988; revised 14 November 1988)

### Abstract

Discrete zero-order Hankel transform is developed and applied to the design of phase units which can uniform optical fields. The results appeared to be more ideal and accurate than the two-dimensional FFT.

**Key words:** Hankel transform; Bessel function; sampling.