

复物体的恢复

张月 许亚忠 庄松林
(上海光学仪器研究所)

提 要

为了恢复一个复值物函数,本文提出了利用透镜后 $1f$ 距离, $2f$ 距离及 $3f$ 距离处的强度信息来恢复物函数的振幅分布和位相分布。计算表明,此算法具有广泛的实用性,并能给出很好的收敛结果。

关键词: 二次位相因子; 恢复: 傅里叶谱。

一、引 言

复物体的恢复就是利用可以测量的强度分布来恢复复物体的振幅分布和位相分布。在这一领域中,目前已经建立起了多种算法理论。已有一些在不同的方面显示了一定的实用性。例如在电子显微镜中,在光散射中,在天文观测中等等。以往位相恢复的工作不外乎两种情形:(1)根据物体及其傅里叶变换的两张照片来恢复物函数的位相;(2)根据物体的傅里叶变换谱的一张照片来恢复未知物函数。然而它们都有很大的局限性,对于前者,通常物函数的振幅分布不容易获得;对于后者,由于所知信息甚少,一般只能用来恢复无位相的实物体,而且收敛速度甚慢。然而,本文介绍的算法,能够对任意情形的复物体给出高精度的复原,并且在恢复的叠代过程中,具有很强的收敛特征。

二、算 法 研 究

正象引言中指出的,如果我们知道了 $|f(x)|$ 和 $|F_1(u)|$, 那么就可以利用它们来恢复物

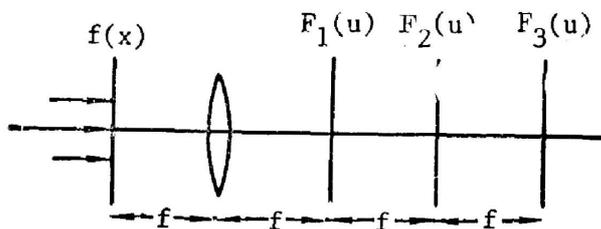


Fig. 1 Optical system

函数 $f(x)$ 的位相分布 $\arg f(x)$, 这就是 Gerchberg 和 Saxton 所提出的方法。如果我们不知道 $|f(x)|$, (事实上, $|f(x)|$ 有时不易被测量), 为了获得同样的叠代结果, 必须知道另外一个平面上的强度特征。而最具有特征的平面除了 $1f$ 平面外, 还有 $2f$ 平面, $3f$ 平面等(如图

1 所示)。可以求出, 在第 nf 平面上的光场分布为

$$F_n(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp \left[-i(n-1) \frac{\pi}{\lambda f} x^2 \right] \exp(-i2\pi ux) dx, \quad (1)$$

亦即存在下面的一系列变换对

$$F_1(u) = \mathcal{F}[f(x)],$$

$$F_2(u) = \mathcal{F}\left[f(x) \exp\left(-i \frac{\pi}{\lambda f} x^2\right)\right],$$

$$F_3(u) = \mathcal{F}\left[f(x) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda f} x^2\right)\right].$$

因此, $F_1(u)$, $F_2(u)$ 和 $F_3(u)$ 等相互之间具有“间接”的傅里叶变换关系。当然它们当中必须用一些 $\varphi_n(x) = -(n-1)(\pi/\lambda f)x^2$ 的位相因子相互联系。一般, 如果我们知道了 $|F_1(u)|$ 和 $|F_2(u)|$ 两张图片就足以能够求出 $f(x) = |f(x)| \exp[i \arg f(x)]$ 。不难想象, 如果 $f(x)$ 非常复杂, 仅从 $|F_1(u)|$ 和 $|F_2(u)|$ 进行叠代, 在叠代过程中常会出现不收敛 (或收敛甚慢) 的情形。为此, 如果再测量一次 $|F_3(u)|$, 势必会加速收敛的进程。如果可能的话, 还可以再测量几只强度分布。当然, 这样的测量是非常方便的。显然, 该算法避免了其它算法所存在的必须对物函数作出一些限制, 或要事先知道物函数某些特征等缺陷。

此外, 此算法还能得到一些不对物函数作强度测量的其它算法所不能得到的信息, 即物函数在空间的“绝对”位置。一般, 物函数作一个位移 x_0 , 其傅里叶平面上所反映的仅是增加了一个位相因子 $\exp(-i2\pi ux_0)$, 这在强度测量的过程中被丢失了, 结果由此得出的物函数对 x_0 位移是毫无响应的。但是在这里

$$\begin{aligned} F'_n(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0) \exp\left[-i(n-1) \frac{\pi}{\lambda f} x^2\right] \exp(-i2\pi ux) dx, \\ &= \exp\left\{-i\left[2\pi ux_0 + (n-1) \frac{\pi}{\lambda f} x_0^2\right]\right\} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left[-i(n-1) \frac{\pi}{\lambda f} x^2\right] \\ &\quad \times \exp\left\{-i2\pi\left[u + \frac{(n-1)x_0}{\lambda f}\right]x\right\} dx \\ &= \exp\left\{-i2\pi\left[u + \frac{(n-1)x_0}{2\lambda f}\right]x_0\right\} F_n\left[u + \frac{(n-1)x_0}{\lambda f}\right], \end{aligned} \quad (2)$$

即物函数移动 x_0 除了在 nf 平面增加了 $\exp\left\{-i2\pi\left[u + \frac{(n-1)x_0}{2\lambda f}\right]x_0\right\}$ 的位相因子之外, 整个谱的频率亦作了一个 $[(n-1)x_0/\lambda f]$ 的移动, 这是一个值得注意的事实。所以, 物函数的位置就可以精确地被确定。本文后面的例子中会得到形象的说明。

叠代的具体过程如图 2 所示的方框图:

(1) 任意假设一个初始的物函数 $g_0(x)$, 经过傅里叶变换, 在 $1f$ 平面得出光场分布:

$$G_1(u) = |G_1(u)| \exp[i \arg G_1(u)];$$

(2) 用 $|F_1(u)|$ 替换 $|G_1(u)|$, 得 $G'_1(u) = |F_1(u)| \exp[i \arg G_1(u)];$

(3) 经逆傅里叶变换, 又在物平面上得到

(4) 在 $g(x)$ 上加上二次位相因子 $\exp[-i(\pi/\lambda f)x^2]$, 作傅里叶变换在 $2f$ 平面上得 $G_2(u) = |G_2(u)| \exp[i \arg G_2(u)];$

(5) 用 $|F_2(u)|$ 替换 $|G_2(u)|$, 得 $G'_2(u) = |F_2(u)| \exp[i \arg G_2(u)];$ 再经逆傅里叶变换, 并去除二次位相因子 $\exp(-i\pi x^2/\lambda f)$, 又在物平面得到物函数 $g(x)$ 。

这样, 经过这 5 步过程就算完成了一个叠代周期。如果需要, 我们可以用类似的过程, 用 $|F_3(u)|$ 对叠代过程作进一步的约束 (如图 2 中的右半部分)。

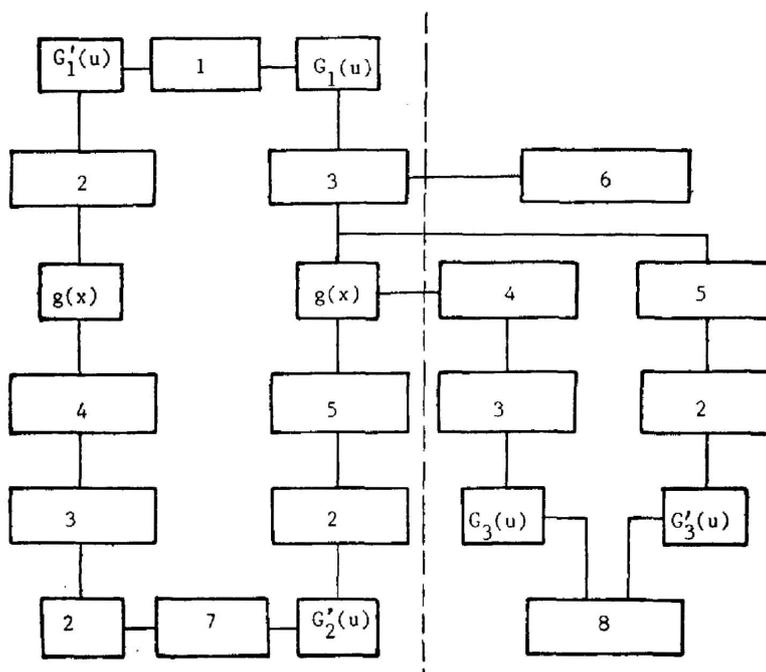


Fig. 2 Block Diagram

1—replace $|G_1(u)|$ with $|F_1(u)|$; 2—inverse F. T.; 3—F. T.; 4—move in quadratic phase factor; 5—move out quadratic phase factor; 6—initial estimate $g_0(x)$; 7—replace $|G_2(u)|$ with $|F_2(u)|$; 8—replace $|G_3(u)|$ with $|F_3(u)|$

三、运算实例

讨论一个具有很大一般性的例子,原物函数及其位相分布呈现正弦变化如图 3 所示。对

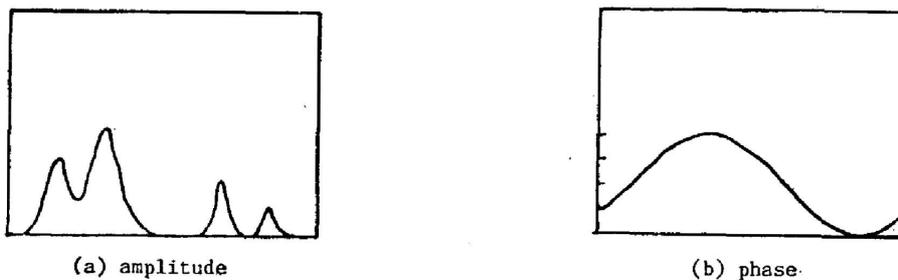


Fig. 3 Original object function

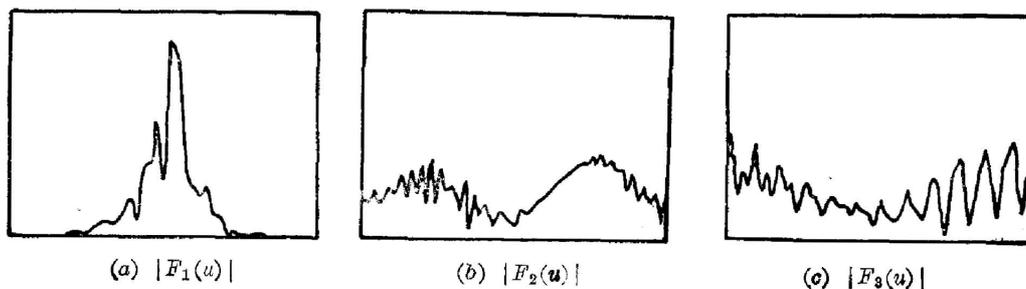


Fig. 4 Spectrum distribution

应的 $1f$ 、 $2f$ 、 $3f$ 平面上的振幅分别如图 4(a)、图 4(b) 和图 4(c)，是已知信息。为了说明信息量的增加对收敛会产生多大的影响，我们分两种情况来讨论：

1. 用 $|F_1(u)|$ 和 $|F_2(u)|$ 来恢复

假设初始的物函数的振幅具有高斯型状的分布，即

$$g_0(x) = A \text{Rnd}(x) \exp[-2(x-x_0)^2], \quad (2)$$

$g_0(x)$ 如图 5(a) 所示。这里 $g_0(x)$ 是实函数，因为无从对物函数的位相分布作出任何判断，那么就不仿假设它为零： $\theta_0(x) = 0$ 。整个计算结果如图 4 所示；经过 10 次叠代后，振幅分布出现了原函数的雏形，然而与物函数仍有相当大的差距；而位相分布基本上是不可分辨。经过 50 次叠代之后，振幅分布在局部区域还存在一定的畸变；位相分布虽有改善，但仍没有显示出规律性。只是到了 60 次叠代之后，振幅分布才较接近于原函数，但位相方面仍存在很大的差别。因此需要作进一步的叠代。严格地说，经过 60 次叠代的结果是不能称之为收敛的。因为位相这一重要信息还没有完全恢复出来。然而，增加信息量必然会大大缩短叠代的次数。

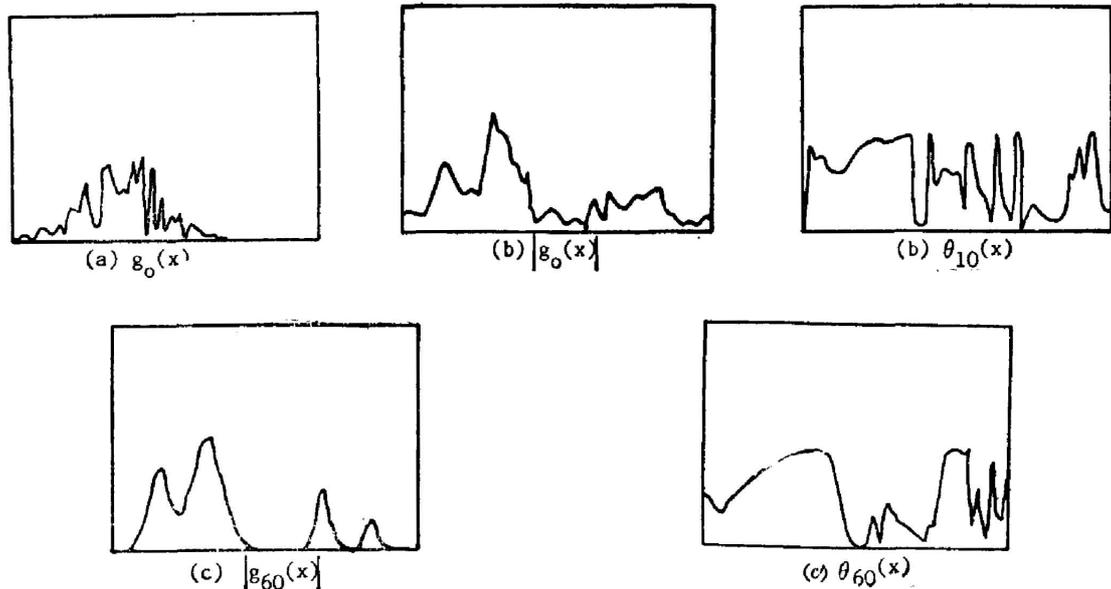


Fig. 5 Output with $F_1(u)$ and $F_2(u)$

2. 用 $|F_1(u)|$ 、 $|F_2(u)|$ 和 $|F_3(u)|$ 来恢复

同样，按照(3)式所描述的那样，用一个受随机分布函数所调制的高斯型分布作为初始输入函数 $g_0(\lambda)$ ，(如图 6(a) 所示)。其位相分布仍以零来处理。这样仅仅经过 10 次叠代就达到了前者经过 60 次叠代所得到的结果。比较一下图 6(b)~(b)' 与图 5(c)~(c') 就可看出。而其后的多次叠代，无论是振幅恢复还是位相恢复都达到了饱和的阶段，所以可以说原函数已经被重建了。这里可以说明这样一个事实，即恢复一个复物体比起恢复一个实物体来，难度上不知要大多少倍，尽管在恢复一个复物体的过程中，它的振幅因子与位相因子是同时得到改善的，但是变化的速度是不一样的。关键是位相因子对其它因素的影响太灵敏，当振幅很好地复原时，位相也许还差得很远。因此，这样的算法的使用是非常有意义的。

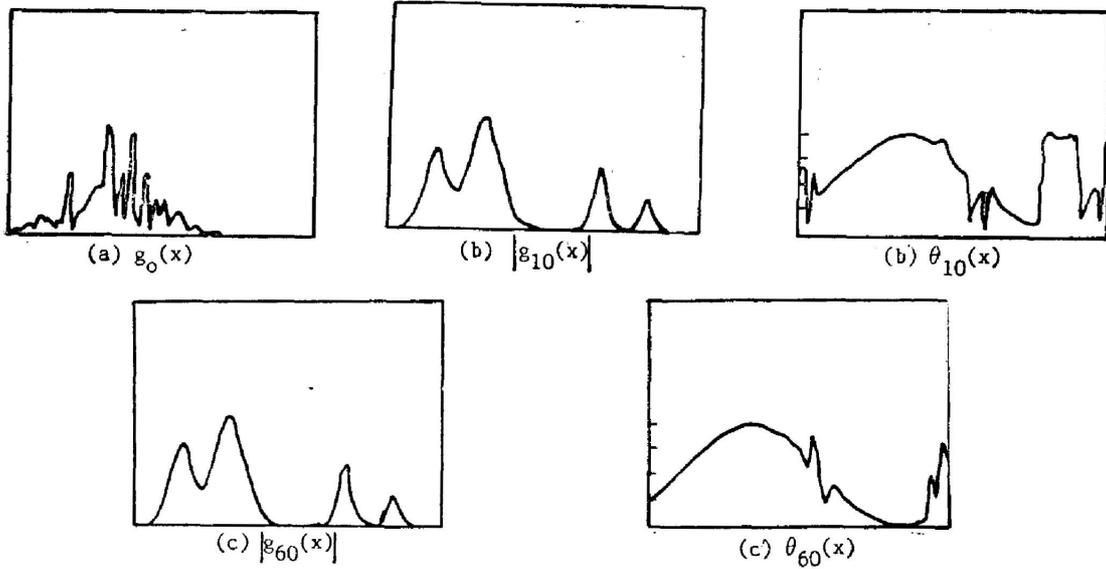


Fig. 6 Output with $F_1(u)$ and $F_3(u)$

为了较客观地描述叠代的收敛情况,可以定义一个误差因子为*

$$E_k = \sqrt{\frac{\sum_u [|G_1(u)| - |F_1(u)|]^2}{\sum_u |F_1(u)|^2}}, \quad (4)$$

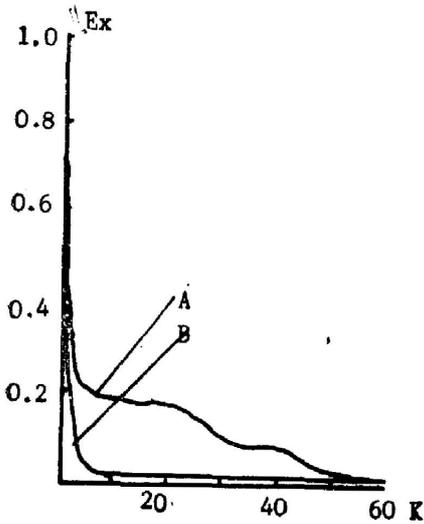


Fig. 7 Error curves

正如前面所指出的, 振幅的恢复速度要比位相的恢复速度来得快。因此, (4) 式的定义过高地描述了整个叠代过程的收敛行为。然而 (4) 式终究是一个比较方便且实用的定义方式。

由此得出的 A、B 两种情形的误差曲线如图 7 所示。A 曲线代表 A 情况下, 经过 3、4 次循环, E_k 从 0.7 迅速下降为 0.2 以后变化开始平缓, 并经过 60 次循环后方达到 0.017。B 曲线代表了 B 情形, 只经过前 10 次循环, E_k 迅速从 0.7 下降到 0.015 以后基本上达到了极限状态。因此在 B 情形下, 只要经过 10 次循环就可以结束了。对于叠代法, 一般当某种循环多次运行后, 就会出现疲软的状态, 除非我们再加上新的约束信息。

基上所述, 作者认为本文所述算法的优点为:

- (1) 可以用来恢复任意复杂的复物体, 而无需对此物体有何“先验”的了解;
- (2) 获取已知信息量的途径直接、简单, 只要在透镜后 nf 距离处的平面上作几次强度测量即可。
- (3) 收敛速度极快。

所以本文的方法可能会得到广泛的应用。

* 当然, 也可以在 $2f, 3f$ 平面上定义 (4) 式。也许 (4) 式的定义方式并不是最好的方式。因为它完全是根据 $1f$ 平面上的振幅分布作出的, 而对位相的因素毫无反应。

参 考 文 献

- [1] R. W. Gerchberg, W. O. Sarton; *Optik*, 1972, **35**, No. 2 (Apr), 237~246.
[2] J. R. Fienup; *Appl. Opt.*, 1982, **21**, No. 15 (Aug), 2758~2768.
[3] J. R. Fienup; *J. O. S. A.*, 1987, **4**, No. 1 (Jan), 118~123.
[4] R. W. Gerchberg; *Opt. Acta*, 1974, **21**, No. 9 (Sep), 709~720.
[5] N. Nakajima; *Opt. Lett.*, 1986, **11**, No. 10 (Oct), 600~602.
[6] B. J. Brames; *Opt. Lett.*, 1986, **11**, No. 1 (Jan), 61~63.

Reconstruction of a complex-valued object function

ZHANG YUE, XU YAZHONG AND ZHUANG SONGLIN

(Shanghai Institute of Optical Instruments)

(Received 28 March 1988; revised 23 September 1988)

Abstract

To reconstruct a complex-valued object function, a new algorithm has been proposed. Using the given information of the intensity distributions in $1f$, $2f$ and $3f$ planes behind a lens, the amplitude and phase of a unknown object function can be retrieved. The new algorithm is proved to be practical and also can give an excellent convergent result.

Key words: quadratic phase factor; retrieval; fourier spectrum.