

光学多通投影相关矩阵-矢量乘法器*

黄洪欣 刘立人

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

基于几何光学的投影相关原理, 本文提出了用非相干多通投影相关器作矩阵-矢量乘法运算的新方法; 讨论了这种矩阵矢量乘法器的一般结构形式和物理极限; 并给出了实验结果, 实验表明该方法简单易行。

关键词: 多通投影相关器, 光学矩阵运算, 矩阵编码, 模拟光计算。

一、引 言

矩阵运算是代数运算的重要部分, 可广泛应用于关联存贮^[1]、数学变换^[2]、人工智能^[3]等各种并行处理中。利用光的并行、高速、无串音等特性, 人们已构造了各种光学矩阵运算器^[4~6], 这些运算器或多或少存在一些不足^[4]。

本文介绍用非相干多通投影相关器作矩阵-矢量乘法运算的新方法, 它具有如下三个显著的特点: (1) 结构简单, 且形式多变。把矩阵和矢量模片适当地插在成像系统之中, 就构成这种乘法器。它能根据应用要求选用不同的结构形式。(2) 该系统既能做矩阵-矢量运算又能做矢量-矩阵运算。(3) 能全并行地输入和输出。

二、基本 原 理

图1是一典型的多通投影相关器结构。其中虚线框内由扩展非相干面光源和一维针孔阵列构成等效的光发射二极管点源阵列。对于每个点源发出球面波经透镜 L_1 、 L_2 成像到观察面 P_3 上, 并构成一个通道。当无输入模片时, 输出面 P_3 上是等强度的 N 点阵列。

设有 $N \times M$ 的矩阵 $A = [a_{ij}]$ 和 $M \times 1$ 的矢量 $B = [b_j]$ 。先考虑所有矩阵、矢量元素是非负实数, 且有最大值 Max , 则它们可表示成光学二值图像形式, 其强度的透过率为

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \text{Rect} \left[\frac{x - (i - i_1)d}{a_{ij}} \right] \text{Rect} \left[\frac{y - (j - j_1)d}{\Delta} \right], \\ f_2(x, y) &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \text{Rect} \left[\frac{x - (i - i_2)d}{\Delta} \right] \text{Rect} \left[\frac{y - (j - j_2)d}{b_j} \right], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(1)式的意义是矩阵元素 a_{ij} 用模片上以 $x = (i - i_1)d$, $y = (j - j_1)d$ 为中心的 $a_{ij} \times \Delta$ 的透明矩孔表示; 矢量元素 b_j 用位于另一模片上以 $x = (i - i_2)d$, $y = (j - j_2)d$ 为中心的 $\Delta \times b_j$ 的

收稿日期: 1988年9月14日; 收到修改稿日期: 1988年11月21日

* 本工作得到国家基金会的资助。

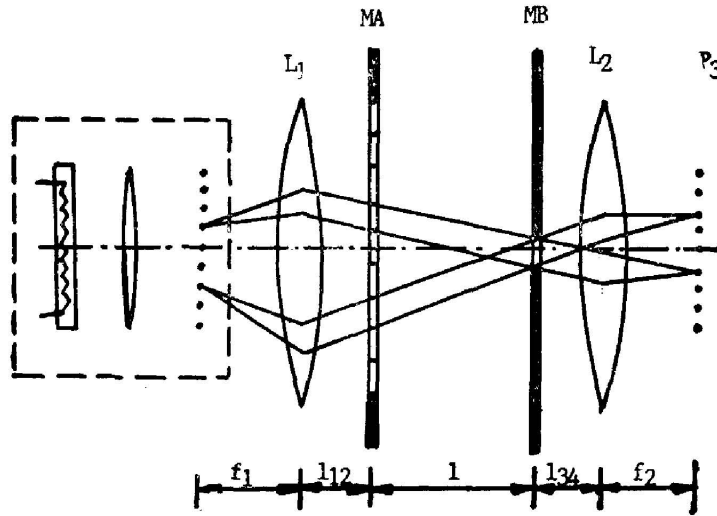


Fig. 1 A typical multichannel shadow-casting correlator

透明孔表示, 其中 d 是每单元的线度, 最大值 Max 对应的编码孔为 $\Delta \times \Delta$ 的方孔, 且 $\Delta \leq d$ 。这样编码的矩阵、矢量模片可看作一幅简单的 Lohmann 型计算全息图。

两模片相隔距离为 l 插入到图 1 的两透镜之间。在几何近似下, P_3 上得到其透过率的互相关^[7]

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \iint f_1(u, v) f_2(x+u, y+v) du dv \\ &= \sum_i \sum_j \sum_{i'} \sum_{j'} \iint \text{Rect} \left[\frac{u - (i - i_1)d}{a_{ij}} \right] \text{Rect} \left[\frac{v - (j - j_1)d}{\Delta} \right] \\ &\quad \times \text{Rect} \left[\frac{x+u - (i' - i_2)d}{\Delta} \right] \text{Rect} \left[\frac{y+v - (j - j_2)d}{b_j} \right] du dv, \end{aligned} \quad (2)$$

式中 x, y 是两模片的相对平移量, 各个通道的平移量是不同的。对于第 k 个通道, 平移量

$$x = -\frac{k d_0}{f_1} l, \quad y = 0$$

其中 f_1 为透镜 L_1 的焦距, d_0 为两相邻点源的距离。(2) 式表示每个通道的输出是两矩形函数的互相关。第 k 个像点恰是第 k 个通道的相关中心。由于 $a_{ij}, b_j \leq \Delta$, 故第 k 个像点强度 $I(k)$:

$$I(k) = \sum_i \sum_j \sum_{i'} \sum_{j'} a_{ij} b_j \delta[-(k d_0 / f_1) l + d(i - i_1 - i' + i_2)] \delta[(j - j' + j_2 - j_1) d], \quad (3)$$

调整系统使满足:

$$j_1 = j_2, \quad (d_0 l / f_1) = d, \quad (4)$$

且注意到 i' 的取值为 0, 即矢量模片在 x 方向只有一窄条。该模片横放在 y 轴上, 则 $i_2 = 0$, 由此得到:

$$I(k) = \sum_j a_{k+i_1, j} b_j, \quad (5)$$

此即为通常的矩阵-矢量乘和形式。

上述处理中, 若矢量模片在前, 相当于(4)式中 $i = 0$, 取 $i_1 = 0$, 则

$$I'(k) = \sum_j a_{k-i_1, j} b_j, \quad (6)$$

(6)和(7)式的一些差别在于插入矩阵模片的方向,其本质是一致的。

若矩阵、矢量中含有负的元素,把每个元素分解成两个非负实数之差,即

$$a_{ij} = a_{ij}^+ - a_{ij}^-, \quad b_j = b_j^+ - b_j^- \quad (7)$$

则有

$$c_{ij} = a_{ij}b_j = a_{ij}^+b_j^+ + a_{ij}^-b_j^- - (a_{ij}^-b_j^+ + a_{ij}^+b_j^-) = c_{ij}^+ - c_{ij}^- \quad (8)$$

(8)式可化成 2×2 的矩阵乘法形式

$$\begin{bmatrix} c_{ij}^+ & c_{ij}^- \\ c_{ij}^- & c_{ij}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij}^+ & a_{ij}^- \\ a_{ij}^- & a_{ij}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_j^+ & b_j^- \\ b_j^- & b_j^+ \end{bmatrix} \quad (9)$$

若 $c_{ij} = a_{ij} + b_j$ 则

$$\begin{bmatrix} c_{ij}^+ & c_{ij}^- \\ c_{ij}^- & c_{ij}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij}^+ & a_{ij}^- \\ a_{ij}^- & a_{ij}^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_j^+ & b_j^- \\ b_j^- & b_j^+ \end{bmatrix} \quad (10)$$

(9)式表示:用非负实数构成的 2×2 对称矩阵表示任一实数,则实数的运算可化为对应矩阵的运算。在含有负元素的矩阵-矢量乘法运算中,每个元素用这样的 2×2 矩阵代替,则可化为仅有非负元素构成的矩阵-矢量乘法运算。

对于复数矩阵的运算,把每个复数按下式分解

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) + a_{ij}^{(2)} \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right), \\ b_j &= b_j^{(0)} + b_j^{(1)} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) + a_{ij}^{(2)} \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中 $i = \sqrt{-1}$, 且三个系数是非负实数。用它们构成 3×3 的辗转矩阵,

$$\begin{bmatrix} a_{ij}^{(0)} & a_{ij}^{(2)} & a_{ij}^{(1)} \\ a_{ij}^{(1)} & a_{ij}^{(0)} & a_{ij}^{(2)} \\ a_{ij}^{(2)} & a_{ij}^{(1)} & a_{ij}^{(0)} \end{bmatrix} = \bar{a}_{ij}, \quad \begin{bmatrix} b_j^{(0)} & b_j^{(2)} & b_j^{(1)} \\ b_j^{(1)} & b_j^{(0)} & b_j^{(2)} \\ b_j^{(2)} & b_j^{(1)} & b_j^{(0)} \end{bmatrix} = \bar{b}_j \quad (12)$$

则不难得到如下的运算法则

$$\left. \begin{aligned} \text{若 } c_{ij} &= -a_{ij}, \text{ 则 } \bar{c}_{ij} = \bar{a}'_{ij}, \\ \text{若 } c_{ij} &= a_{ij}b_j, \text{ 则 } \bar{c}_{ij} = \bar{a}_{ij}\bar{b}_j, \\ \text{若 } c_{ij} &= a_{ij} + b_j, \text{ 则 } \bar{c}_{ij} = \bar{a}_{ij} + \bar{b}_j, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中 \bar{a}'_{ij} 表示 \bar{a}_{ij} 的转置矩阵。可见复数的运算可化为相应矩阵的运算。从而复数矩阵-矢量运算也可用前述的相关乘法器计算。计算的结果代入(11)式就得到通常形式的复数。

三、系统讨论

1. 投影相关器的一般结构

各种形式的投影相关器一般可用图2所示的结构表示。其中 PS 是光源面, P_1 、 P_2 是两模片 MA 、 MB 所在的平面, P_0 是一维针孔列阵面,透镜 L 把 P_0 成像到接收面 P_3 上。非相干面光源向各个方向发射平面波,受 P_0 面上小孔和矢量模片的限制,只有某些特定方向的波才能无衍射地穿过 MA 、 MB 上确定单元而达到特定的接收单元,如图2阴影所示。设 P_1 和 P_2 离 P_0 的距离为 l_1 和 l_2 , l_1 (l_2) 的正或负表示在 P_0 的右或左, MA 和 MB 上单元的线度为 d_1 和 d_2 , 调整系统满足

$$\left. \begin{aligned} (d_1/d_2) &= (l_1/l_2), \\ (d_0/d_1) &= [l_2/(l_2-l_1)], \\ (1/q) - (1/q') &= (1/f), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

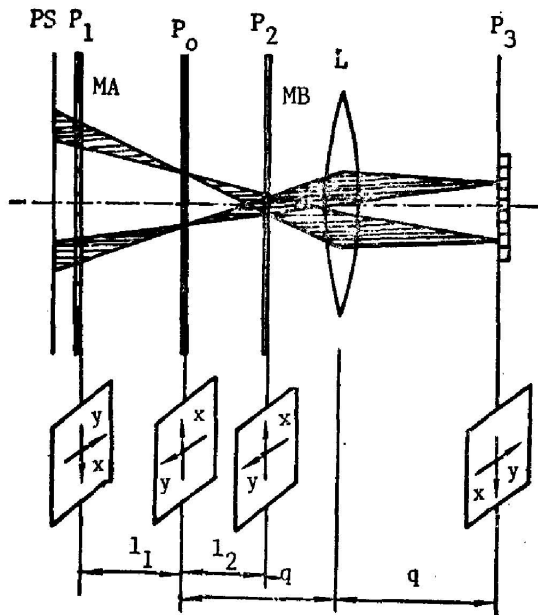


Fig. 2 General configuration of multichannel shadow-casting correlator for calculating matrix-vector product. PS, P_1 , P_2 , P_0 and P_3 are the plane of extended source, MA, MB, hole array and detector respectively

式中 d_0 为 P_0 上小孔中心间隙, 由于 P_0 、 P_3 是共轭面, (14) 式的第三式成立, 则在 P_3 上就得到运算结果。这时的操作特点是: 两模片单元线度一般地不相等, 且可取任意比例, 只要调整两模片的位置, 两模片和 P_0 可放在系统的光源面和接收面之间的任何地方。(14) 式表明, (d_1/d_2) 和 (d_0/d_1) 可正可负, 它表示 $P_1 \sim P_2$, $P_0 \sim P_1$ 面上坐标轴方向相同或相反, 如图 2 所示。

2. 物理极限

投影相关矩阵-矢量乘法的精度受如下几个因素的影响。(1) 光源是非理想的点光源, 发光强度的随机波动; (2) 模片的制作误差; (3) 系统调整误差; (4) 透镜像差; (5) 衍射效应; (6) 探测器引入的测量误差。其中大多数因素在理论上是可以消除的。如用均匀一般的发光二极管阵列作光源, 加稳压电源消除电压的波动引起的发光强度的波动; 用计算机绘图的方法先制作放大的模片, 然后精缩成所需尺寸

的模片, 通过铬板光刻等技术提高模片的黑白对比度; 精心调整模片的位置, 选用特殊设计的消像差透镜等减少误差。但衍射效应需要特别考虑。它不仅影响计算精度, 而且影响系统的计算能力, 即系统的空间带宽积。

光的衍射使 MA 投射到 MB 上的投影不是二值分布, 且存在光能在不同对应单元之间的交叉^[7]。详细的讨论是很复杂的, 但在深度菲涅尔衍射区, 孔径的衍射像是它的投影^[7], 此时要求

$$\sqrt[3]{\frac{\pi}{4\alpha}} \Delta^{4/3} \ll l \ll \frac{\pi}{\lambda} \Delta^2, \quad (15)$$

可取的孔径宽度 Δ 满足

$$l = \sqrt[3]{\frac{\pi}{4\lambda}} \Delta^{4/3} \alpha_1 = \frac{\pi}{\lambda} \frac{\Delta^2}{\alpha_2},$$

其中 α_1 和 α_2 是两比例常数。从而

$$\Delta = \frac{\lambda}{2\pi} (\alpha_1 \alpha_2)^{3/2}, \quad (16)$$

若认为 α_1 、 α_2 取 10 不等式 (15) 式能成立, 则对于 $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ 的可视中心波长, $\Delta = 0.08(\text{mm})$ 。

衍射效应和透镜的口径限制了系统的通道数。采用图 1 所示的结构, 两透镜的口径 D_1

和 D_2 需满足

$$\left. \begin{aligned} D_1 &\geq \frac{l_{12}}{f} N d_0 + N d = \frac{N d}{f} (l + l_{12}), \\ D_2 &\geq M A \times \left(\frac{l_{34} N d_0}{f}, M d \right), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中 $N \times M$ 是矩阵元素数, $d \geq \Delta$ 。显然, 为尽量满足(17)式, 可使两模片分别尽可能地靠近两透镜。

四、实 验

实验系统如图 1。系统参数为 $f_1 = f_2 = 200 \text{ mm}$, $d_0 = 1.0 \text{ mm}$, $d = 1.5 \text{ mm}$, $\Delta = 1.0 \text{ mm}$, 这样两模片相距 $l = 300 \text{ mm}$ 。图 3 给出了矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

和几个特殊矢量相乘的结果。该矩阵恰好是 6 点 DFT 变换核的编码矩阵, 因此图 3 也演示了 DFT 的有关性质^[8]。

五、结 论

根据相关原理, 本文介绍了一种新型的矩阵-矢量乘法器, 结构上它是非相干多通投影相关器。矩阵和矢量以宽度调制的二值模片透过率来表示。复数(负数)用非负实数构成的 $3 \times 3(2 \times 2)$ 的矩阵编码, 从而实现了用非相干光学系统做复数(负数)运算。该乘法器能

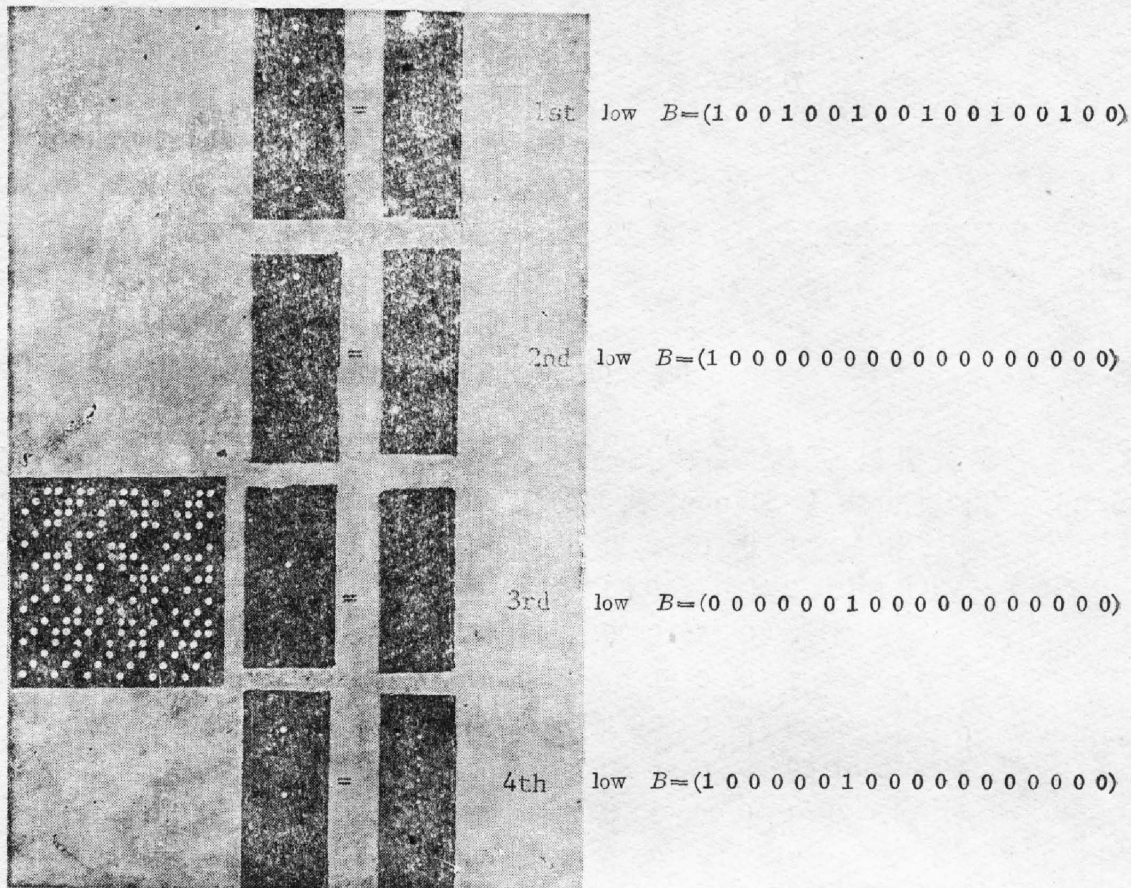


Fig. 3 Experimental results of 18×18 matrix A multiply 18×1 vector B

并行输入和并行输出,且能变换成各种形式,本文给出了其一般结构形式。系统的设计完全是基于几何光学的,因此,衍射效应使计算精度和有效通道数相互制约。本质上,这是一种模拟式的矩阵-矢量乘法器,采用数的图像编码技术^[9],数字计算是可以实现的。

参 考 文 献

- [1] J. J. Hopfield; *Proc. Nat. Acad. Sci. (U. S. A.)*, 1982, **79**, No. 8 (Apr), 2554.
- [2] 姚庆栋等;《图像编码基础》, (人民邮电出版社, 北京, 1983), 61.
- [3] George Eichmann *et al.*; *Appl. Opt.*, 1987, **26**, No. 10 (May), 1827.
- [4] H. J. Hopfield, W. T. Rhodes; *Proc. SPIE*, 1984, Vol. 456, 2~14.
- [5] W. Schnider, W. Fink; *Opt. Acta*, 1975, **22**, No. 11 (Nov), 879~889.
- [6] R. P. Bocker; *Appl. Opt.*, 1974, **13**, No. 7 (Jul), 1670~1676.
- [7] J. W. Goodman;
- [8] Huang Hongxin, Liu Liren; *Opt. Commun.*, 1988, **68**, No. 6 (Nov), 403.
- [9] 私人通讯。

Optical matrix-vector multiplication using multichannel shadow-casting correlator

HUANG HONGXIN AND LIU LIREN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 14 September 1988; revised 21 November 1988)

Abstract

Based on the shadow-casting correlation of geometrical optics, a new correlation scheme for performing matrix-vector multiplication is proposed. The configuration can be simply regarded as an incoherent multichannel shadow-casting correlator. It is interesting that it is capable of fully parallel input and output, and its structure can be varied according to the demand. The general configuration form and the physical limitation of the scheme proposed here are discussed. Experiments are given, and show the method is very simple.

Key words. multichannel shadow-casting correlator; optical matrix operations; matrix coding methods; analog optical computing.