

有横向分布为 TEM_{10} 模的信号注入 的环形腔激光器的双稳性

樊锡君 田淑芬

王庆吉

(山东师范大学物理系半导体所)

(北京大学无线电电子学系)

提 要

本文假设注入环形腔激光器的信号的横向场分布为 TEM_{10} 模。利用平均场近似方法得到了单横模共振时的定态方程,并进行了线性稳定性分析。结果表明,对优质腔来说,与 Lugiato 等讨论的注入信号为平面波光束及高斯光束(TEM_{00} 模)的情况不同,注入光场横向分布具有 TEM_{10} 模的横式时,环形激光器的输出呈现双稳性。

关键词: 平均场近似, 优质腔, 双稳性。

一、引 言

从热力学观点看来,激光器是一个远离热动平衡的系统。理论分析表明且实验也已经发现,不含吸收体的激光器在阈值处经受具有二级相变特征的一种转变,而含饱和吸收体的激光器能表现出双稳性,从而可作为展示一级相变的远离热平衡系统的例证^[1~3]。

一个有注入信号的激光器的行为相类似^[1,4]。激光器的注入信号、布居数反转及激光场分别与磁性问题中使对称性降损的外场、温度及磁化强度相对应。其根源在于激光理论和铁磁理论从概念上抽象地讲都属于自洽平均场理论。

Lugiato 等利用平均场近似方法^[5]分别讨论了注入环形腔激光器的信号为平面波光束^[6]和高斯光束(TEM_{00} 模)^[7]的情况。结果表明,对“优质腔”,由于定态输入-输出曲线的下分支不存在稳定区域,双稳状态不能出现,故有注入信号的激光器不是一个双稳装置,从而不再展示一级相变。本文在单横模假设的情况下,利用平均场近似方法讨论了注入信号的横向场分布为 TEM_{10} 模的激光器的定态行为和稳定性。线性稳定性分析的结果,“优质腔”环形激光器的输出可以呈现双稳状态,即一级相变能够发生。

二、单横模定态方程

考虑总长度为 \mathcal{L} 的单向环形腔激光器(图1)。腔中含有长度为 L 、半径为 R 的圆柱形原子样品,原子样品是均匀展宽的有大量的(N 个)偶极矩为 μ 的二能级原子,其跃迁频率为 ω_0 ,纵向和横向衰变率分别为 γ_{\parallel} 和 γ_{\perp} 。假定注入光场的频率为 ω_i 的横向分布 TEM_{10} 模,腔内激光场的横向分布亦为 TEM_{10} 模。在外场频率 ω_i 与原子跃迁频率 ω_0 共振,也同激光

场模频率共振的情况下,应用偶极近似和旋波近似,得系统的麦克斯威-布洛赫(Maxwell-Bloch)方程组^[8,9]

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} F(z, t) &= \alpha \int_0^\infty dr \frac{4r}{w_0^2} A(r, z) P(r, z, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} P(r, z, t) &= \gamma_1 \{ D(r, z, t) F(z, t) A(r, z) - P(r, z, t) \}, \\ \frac{\partial}{\partial t} D(r, z, t) &= -\gamma_2 \{ A(r, z) F(z, t) P(r, z, t) + D(r, z, t) - V(r, z) \}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$V(r, z) = \begin{cases} 1, & (|z| \leq L/2, r \leq R) \\ 0, & (|z| > L/2, \text{ 或 } r > R) \end{cases} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} A(r, z) &= \left[1 - \frac{2r^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[-\frac{r^2}{w^2(z)} \right] / [1 + (z/z_0)^2]^{1/2}, \\ w(z) &= w_0 [1 + (z/z_0)^2]^{1/2}, z_0 = (\pi w_0^2 / \lambda_0), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 c 为光速, $F(z, t)$ 为腔模 TEM_{10} 的模振幅, $P(r, z, t)$ 和 $D(r, z, t)$ 分别为离系统的轴为 r 处的宏观原子极化强度和上、下能级布居数差, α 表示原子样品每单位长度的未饱和和吸收系数, $V(r, z)$ 是原子样品的特征函数, w_0 为光束束腰, z_0 为瑞利长度, λ_0 是辐射的光波波长。其边界条件为^[8]

$$F(-L/2, t) = Ty_0 + (1-T)e^{-i\delta} F(L/2, t - \Delta t), \quad (4)$$

式中 $\Delta t = [(L-L)/2]$, y_0 为归一化入射场振幅, T 是镜 1 和镜 2 的强度透射系数(见图 1), δ 为腔的调谐参量。在定态 $(\partial F/\partial t) = (\partial P/\partial t) = (\partial D/\partial t) = 0$ 的情况下,由方程组(1)式得

$$\left. \begin{aligned} P_{st}(r, z) &= \frac{F_{st}(z) A(r, z)}{1 + A^2(r, z) F_{st}^2(z)} V(r, z), \\ D_{st}(r, z) &= \frac{1}{1 + A^2(r, z) F_{st}^2(z)} V(r, z), \\ \frac{\partial}{\partial z} F_{st}(z) &= \alpha \int_0^\infty dr \frac{4r}{w_0^2} A(r, z) P_{st}(r, z). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

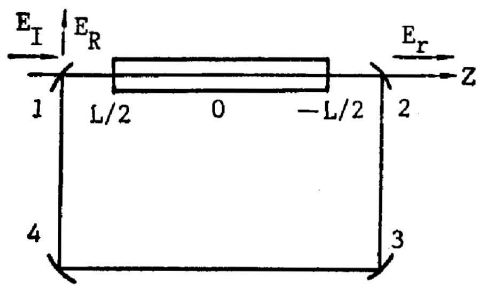


Fig. 1 Unidirectional ring cavity with spherical mirrors

E_I, E_T, E_R are the incident, transmitted and reflected fields respectively. Mirrors 3 and 4 have 100% reflectivity, whereas mirrors 1 and 2 have transmissivity coefficient T

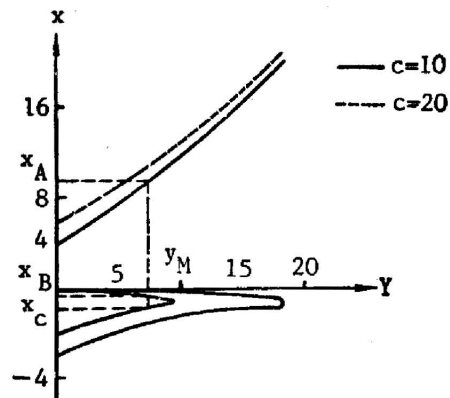


Fig. 2 Steady state input-output curves for different C values

* 包括全部纵模,单横模指只涉及横模。

考虑菲涅尔(Fresnel)数 $\mathcal{F} = [\pi w_0^2 / (\lambda_0 L)] \gg 1$, 以及 $(R/w_0) \gg 1$ (这样在整个原子样品长度内的光束半径实际上是个常数), 并利用平均场极限条件^[5]

$$\begin{cases} \alpha L \rightarrow 0, T \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0 \\ (\alpha L / 2T) = C, C = \text{常数} \end{cases} \quad (6)$$

和(2)~(5)各式, 可导出定态方程(方法同参考文献[9]):

$$y = x - \frac{2Cx}{1+x^2} \left[1 + \frac{0.25x^2}{1+x^2} - \frac{0.381x^4}{(1+x^2)^2} \right], \quad (7)$$

式中 x 为输出光场振幅, $x = F_{st}(L/2)$, 输入输出光场关系曲线如图 2 所示。

以 $C=10$ 为例, 对输入场与输出场之间的关系作一分析。曲线上具有负斜率的部分是不稳定的。对于 $0 < y < y_M$ 的区域, 一个输入 y 对应于两个输出 x_A 和 x_C 。因此, 人们可以期望系统呈双稳状态。在 x_A 态, 输出场与输入场位相相同; 在 x_C 态, 输出场与输入场位相差 180° 。

三、线性稳定性分析

为了考察定态解的稳定性, 引进三个偏离量

$$\left. \begin{aligned} \delta_F(z, t) &= F(z, t) - F_{st}(z), \\ \delta_P(r, z, t) &= P(r, z, t) - P_{st}(r, z), \\ \delta_D(r, z, t) &= D(r, z, t) - D_{st}(r, z), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将(8)式代入方程组(1)式并进行线性化, 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta_F + \frac{\partial}{\partial z} \delta_F &= \alpha \int_0^\infty dr \frac{4r}{w_0^2} A(r, z) \delta_P, \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta_P &= \gamma_\perp \{ A(r, z) [D_{st} \delta_F + F_{st} \delta_D] - \delta_P \}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta_D &= -\gamma_\parallel \{ A(r, z) [P_{st} \delta_F + F_{st} \delta_P] + \delta_D \}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中偏离量 δ_F 服从边界条件

$$\delta_F(-L/2, t) = (1-T) \delta_F(L/2, t - \Delta t), \quad (10)$$

为了简化求解过程, 以下取 $\mathcal{F} \gg 1$, $\gamma_\perp = \gamma_\parallel = \gamma$ 。我们寻求下面形式的解

$$\left. \begin{aligned} \delta_F(z, t) &= e^{\lambda t} \tilde{\delta}_F(z) + c.c., \\ \delta_P(r, z, t) &= e^{\lambda t} \tilde{\delta}_P(r, z) + c.c., \\ \delta_D(r, z, t) &= e^{\lambda t} \tilde{\delta}_D(r, z) + c.c., \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

将(11)式引进方程组(9), 并使用(8)式消去 $\tilde{\delta}_P$ 和 $\tilde{\delta}_D$, 于是得到关于 $\tilde{\delta}_F$ 的方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\delta}_F &= \left\{ \alpha \int_0^\infty dr \left[\frac{4r}{w_0^2} K(r) H \right] - \frac{\lambda}{c} \right\} \tilde{\delta}_F, \\ H &= \frac{K(r)}{1 + (\lambda/r)} \left\{ D_{st} - F_{st} \left[1 + \frac{K^2(r) F_{st}^2}{[1 + (\lambda/\gamma)]^2} \right]^{-1} \left[\frac{K(r) P_{st}}{1 + (\lambda/\gamma)} - \frac{K^2(r) F_{st}^2}{[1 + (\lambda/\gamma)]^2} \right] \right\}, \\ K(r) &= [1 - (2r^2/w_0^2)] \exp(-r^2/w_0^2). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

使用边界条件(10)式以及(8)式和(12)式, 可以找到决定 λ 值的方程如下

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= -i\alpha_n + \frac{c}{\mathcal{L}} \ln(1-T) + \frac{\alpha c}{\mathcal{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dz \left[\int_0^\infty dr \frac{4r}{w_0^2} K(r) H \right], \\ \alpha_n &= 2\pi cn/\mathcal{L}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

下标 n 对应于腔内的纵模频率, 而且本征值 λ 是以 n 来标记的(在(13)式中我们未明显地标出)。在(13)式中引入(5)式后, 可得

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n &= -i\alpha_n + \frac{c}{\mathcal{L}} \ln(1-T) + \frac{ck}{T} \int_{-L/2}^{L/2} dz \left[\int_0^\infty dr \frac{4r}{w_0^2} B \right], \\ B &= \frac{V(r, z) K^2(r)}{[1+K^2(r) F_{st}^2(z)]} \cdot \frac{[1-K^2(r) F_{st}^2(z) + (\lambda_n/\gamma)]}{\{[1+(\lambda_n/\gamma)]^2 + K^2(r) F_{st}^2(z)\}}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中 $k = (cT/\mathcal{L})$ 称为空腔阻尼系数。在平均场极限条件(6)式成立的情况下, 则可以用 $(-T)$ 代替 $\ln(1-T)$, 而且这时定态场 $F_{st}(z)$ 在区间 $-L/2 \leq z \leq L/2$ 内实际上是均匀的, 因此可用 $F_{st}(L/2) = x$ 来代替它。进一步, 只考虑 $k \ll \gamma$ 的“优质腔”情况, 则(14)式的解可以立即用叠代法求出为

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -i\alpha_n - k \left\{ 1 - 2c \int_0^R dr \frac{4r}{w_0^2} \frac{K^2(r) [1 - K^2(r)x^2 - (i\alpha_n/\gamma)]}{[1+x^2K^2(r)] \{ [1 - i(\alpha_n/\gamma)]^2 + K^2(r)x^2 \}} \right. \\ &\quad \left. + O\left(\frac{x}{\gamma}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

当在 $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 的取值中至少有一个使得本征值 λ_n 的实部为正, 即 $\text{Re } \lambda_n > 0$ 时, 定态将是不稳定的。其中

$$\begin{aligned} \text{Re } \lambda_n &= -k \left\{ 1 - 2c \int_0^R dr \frac{4r}{w_0} \frac{K^2(r)}{[1+x^2K^2(r)]} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{[1-x^2K^2(r)] [1+x^2K^2(r) - (\alpha_n/\gamma)^2] + 2(\alpha_n/\gamma)^2}{[1+x^2K^2(r) - (\alpha_n/\gamma)^2] + 4(\alpha_n/\gamma)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

当 $R \gg w_0$ 即原子样品的半径远大于光束束腰时, 则可将被积函数作适当变化后按级数展开, 经过冗长的计算可得

$$\begin{aligned} \text{Re } \lambda_n &= -k \left[1 - \frac{2c}{x^2} \Gamma^{(n)}(x, \bar{\alpha}_n) \right], \\ \Gamma^{(n)}(x, \bar{\alpha}_n) &= \frac{x^2}{Q} (3 - \bar{\alpha}_n^2) + \frac{x^2}{Q^2} [(3 - \bar{\alpha}_n^2)x^2(0.5 - 0.5\bar{\alpha}_n^2 + 0.881x^2) \\ &\quad - (1 + \bar{\alpha}_n^2)^2(2 - 2\bar{\alpha}_n^2 - 0.75x^2)] + \frac{x^4}{Q^3} [(3 - \bar{\alpha}_n^2)x^2(-1.523 - 1.523\bar{\alpha}_n^4 \\ &\quad + 3.046\bar{\alpha}_n^2 + 0.849x^2 - 0.849\bar{\alpha}_n^2x^2 + 0.693x^4) \\ &\quad - (1 + \bar{\alpha}_n^2)^2(5 + 5\bar{\alpha}_n^2 - 10\bar{\alpha}_n^4 + 0.523x^2 - 0.523\bar{\alpha}_n^2x^2 + 1.418x^4)], \\ \bar{\alpha}_n &= (\alpha_n/\gamma), \quad Q = 1 + 2\bar{\alpha}_n^2 + \bar{\alpha}_n^4 + 2x^2 + x^4 - 2\bar{\alpha}_n^2x^2. \end{aligned} \quad (17)$$

于是, 失稳条件亦可表达为

$$\frac{2c}{x^2} \Gamma^{(n)}(x, \bar{\alpha}_n) > 1. \quad (18)$$

上式左端可理解为第 n 个腔模的“增益”, 而右端则可看作已归一化的损耗; 当至少有一个腔模的增益超过损耗时, 失稳就要发生。

当 $C=10$ 和 $C=20$ 时满足(18)式的 x 及 $\bar{\alpha}_n$ 的取值范围即 $(x - \bar{\alpha}_n)$ 平面上的失稳区分别如图 3 所示(图中打点区域)。由于(18)式左端是 x 的偶函数, 所以当 x 取负值时所得失稳

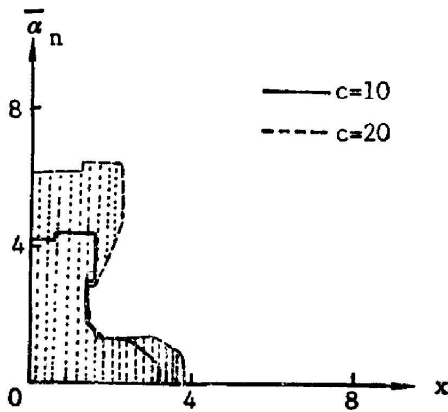


Fig. 3 Unstable part on the plane of the variables x and \bar{a}_n

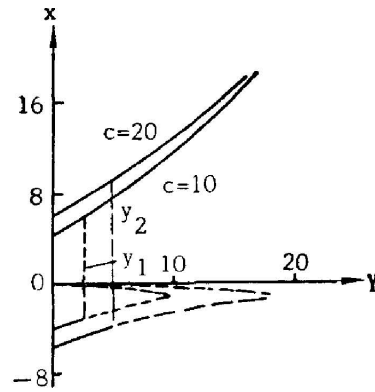


Fig. 4 Steady state curve of output versus input amplitudes with stable and unstable

区与取正值时所得失稳区关于 \bar{a}_n 轴是对称的。这样,图 3 (a)和(b)的横坐标值亦可看成是标记了 x 的绝对值。由图 3 可以看出,随着 C 值的增大,失稳区将增大。

与图 3 所给出的失稳区相对应的定态输入-输出曲线上的失稳区分别如图 4 中 $C=10$ 曲线和 $C=20$ 曲线中虚线所示,而实线则代表稳定区。由图 4 图可以看出:定态曲线的上分支全部都是稳定的,这与注入信号为平面波光束和高斯光束(TEM_{10} 模)时的情况不同(后两者定态曲线的上分支有部分失稳);另一方面,定态曲线的下分支也不象注入信号为平面波光束和高斯光束(TEM_{10} 模)时那样全部失稳,而是斜率为正的曲线部分中有一段是稳定的,其稳定区的范围随 C 值增大而增加,在这种情况下,对于 $0 < y < y_1$ ($C=10$ 时)或 $0 < y < y_2$ ($C=20$ 时)的区域,则相应地存在双稳输出情况。这就说明,跟注入信号为平面波光束和高斯光束(TEM_{00} 模)时的激光器不同,注入信号是横向分布为 TEM_{10} 模的光场的优质腔环形激光器展示有一个双稳装置,从而可以说又呈现出了一级相变行为。

参 考 文 献

- [1] V. Degiorgio and M. O. Scully; *Phys. Rev.*, 1977, **A2**, 1170~1177.
- [2] R. Graham and H. Haken; *Z. Phys.*, 1970, **237**, No. 1, 31~46.
- [3] H. 哈肯著;《协同学》, (原子能出版社,北京,1984), 299~303.
- [4] C. R. Willis; *Opt. Commun.*, 1977, **23**, No. 2, 151~154.
- [5] R. Bonifacio and L. A. Lugiato; (a) *Opt. Commun.*, 1976, **19**, No. 2, 172~176; (b) *Lett. Nuovo Cimento*, 1978, **21**, No. 15, 505~509; (c) *Phys. Rev. (A)*, 1978, **A18**, No. 3, 1129~1144.
- [6] R. Bonifacio, L. A. Lugiato; *Lett. Nuovo Cimento*, 1978, **21**, No. 15, 510~516.
- [7] L. A. Lugiato, R. J. Horowicz et al.; *Phys. Rev. (A)*, 1984, **A31**, No. 3, 1366~1376.
- [8] L. A. Lugiato; *Z. Phys.*, 1983, **B50**, No. 2, 171~179.
- [9] 樊锡君;《红外研究》, 1988, **7(A)**, No. 3, 175~183.

The bistability of the ring cavity laser with a injected signal having a transverse distribution of the TEM₁₀ mode

FAN XIJUN AND TIAN SHUFEN

(Physics Department, Shandong Normal University, Jinan)

WANG QINGJI

(Peking University)

(Received 13 April 1988; revised 10 October 1988)

Abstract

In this paper we assume that the signal injected into ring cavity laser have a transverse distribution of the TEM₁₀ mode. Using the method of mean field approximation, we obtained the steady state equation and performed linearized stability analysis under the one transverse mode resonant condition. The result showed that for the good cavity case the output of laser with a injected signal having a transverse distribution of the TEM₁₀ mode exhibits a bistability, and this is different from the case discussed by Lugiato et al in which the signal injected into ring cavity laser is a plane wave beam and a Gaussian beam (TEM₀₀ mode) respectively.

Key words: the mean field approximation method; good cavity; bistability.