第9卷 第5期 1989年5月
光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA
Vol. 9, No. 5
May, 1989

高斯-斯克尔模型光束经过光学系统的传输

蒲继雄 陈金铠
(华侨大学物理系) (福建师范大学实验中心)

提 要

根据惠更斯-菲涅耳'(Hugens-Fresnel)衍射积分,推导出高斯-斯克尔模型光束二阶相关函数经过光学系统的传输公式。引入与高斯光束类似的 q 参数。证明了高斯-斯克尔模型的 q 参数亦满足 ABCD 变换定律。

关键词: 高斯-斯克尔模型光束;二阶相关函数;复空间相干度。

一、引 言

激光器输出的基模是高斯光束。人们对高斯光束的传输已有比较深入的研究。在讨论高斯光束经过光学系统传输时,一种很方便的处理方法是引进高斯光束的 q 参数,那么,高斯光束的传输则可用 ABCD 变换定律描述[1~3]。

近几年,高斯-斯克尔模型(Gaussian-Schell Model 简写为 GSM)光束引人注目[4~7]。高斯-斯克尔模型光束不仅可以消除在激光应用中因激光光束的高相干性引起的有害效应,如散斑(speckle)、边缘位移(edge shift)、环晕(ringing);而且,高斯-斯克尔模型光束保持了激光光束的高方向性和高亮度的特点,该光束的传输既有别于高斯光束,但又有联系[5]。本文从惠更斯-菲涅耳衍射积分出发,导出高斯-斯克尔模型光束经过光学系统的传输公式。引进与高斯光束类似的 q 参数,证明该光束的 q 参数也满足 ABCD 变换定律。

二、高斯-斯克尔模型光束

用 $\{v(\boldsymbol{r}_1, z)\exp(-ikz-i\omega t)\}$ 代表频率为 ω 的部分相干光场的系综。在 z 二常数的平面内,二阶相关函数 $w(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; z)$ 可以定义为单色标量场 $v(\boldsymbol{r}_1; z)\exp(ikz-i\omega t)$ 按如下形式的系综平均:

$$w(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1'; z)=\langle v^*(\boldsymbol{r}_1; z)v(\boldsymbol{r}_1'; z)\rangle, \tag{1}$$

令 $\boldsymbol{r}_1'=\boldsymbol{r}_1$, 即

$$w(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1; z)=I(\boldsymbol{r}_1; z) \tag{2}$$

为光束截面上的光强分布。$w(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1'; z)$ 的归一化形式为:

$$\mu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1'; z)=\frac{w(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1'; z)}{\{I(\boldsymbol{r}_1; z)I(\boldsymbol{r}_1'; z)\}^{1/2}}, \tag{3}$$

收稿日期: 1988年6月23日

$\mu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1; z)$称为空间复相干度(complex degree of spatial coherence)。当$|\mu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1; z)|=1$，光场为完全相干光；当$|\mu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1; z)|=0$，光场为完全不相干光。而当$0<|\mu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1; z)|<1$，光场为部分相干光。

高斯-斯克尔模型光源的光强分布及空间复相干度的轮廓均为高斯型，即：

$$\left.\begin{aligned} I(\boldsymbol{r}_1; 0) &= a\exp\left\{-\frac{2r_1^2}{w_0^2}\right\}, \\ \mu(\boldsymbol{r}_1, -\boldsymbol{r}'_1; 0) &= \exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}'_1)^2}{2\sigma_{00}^2}\right\}。\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式中$\mu(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}'_1; 0)$仅依赖于$\boldsymbol{r}_1$与$\boldsymbol{r}'_1$之差。运用均匀介质中波动传输规律，在旁轴近似条件下，可得到自由空间中高斯-斯克尔模型光束的二阶相关函数$w(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1; z)$的表达式。

$$\left.\begin{aligned} &w(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1; z) = a(z)\exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}'_1)^2}{2w^2(z)}\right\}\exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}'_1)^2}{\sigma_t^2(z)}\right\}\exp\left\{-i\frac{k(\boldsymbol{r}_1^2-\boldsymbol{r}_1'^2)}{2R(z)}\right\}, \\ &a(z)=[a/\Delta(z)],\ w(z)=w_0\Delta(z), \\ &\sigma_t(z)=\sigma_{t_0}\Delta(z),\ \frac{1}{\sigma_{t_0}}=\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{1}{w_0^2}, \\ &\Delta(z)=\left[1+\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0}\right)^2\left(\frac{1}{w_0^2}-\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\right]^{1/2}, \\ &R(z)=z\left[1+\left(\frac{\pi w_0}{\lambda z}\right)^2\left(\frac{1}{w_0^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}\right)^{-1}\right]。\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

由(2)、(5)两式可得，在z平面，高斯-斯克尔模型光束的光强分布是高斯型的。

$$I(\boldsymbol{r}_1; z) = a(z)\exp\left\{-\frac{2r_1^2}{w^2(z)}\right\}, \tag{6}$$

式中$w(z)$为z平面部分相干光束的宽度，同样，由(3)、(5)和(6)式可以得到，空间复相干度可表示为：

$$\left.\begin{aligned} |\mu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1; z)| &= \exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}'_1)}{\sigma^2(z)}\right\}, \\ \sigma(z) &= \sigma_0\Delta(z), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中$\sigma(z)$为z平面光的相干距离的度量。在讨论高斯-斯克尔模型光束时，常引入综合空间相干度(global degree of spatial coherence)$\alpha=\sigma_0/w_0$。当$\sigma_0\to\infty$，即高斯-斯克尔模型光束转化为高斯光束。当$w_0\gg\sigma_0$，光源称为高斯准均匀光源(Gaussian quasi-homoyereous Souues)[8]。

三、高斯-斯克尔模型光束经过光学系统的传输

如图1所示，在输入平面($z=0$)，单色光场的系综为$v(\boldsymbol{r}_1; 0)$(二阶相关函数为$w(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1; 0)$)。光场沿一系列光学元件$E_1$、$E_2$、…、$E_n$传输。$E_1$、$E_2$、…、$E_n$的光轴在同一直线上。输入平面至输出平面的光线为ABCD传输。依据惠更斯-菲涅耳衍射积分公式[9,10]，输出面光场与输入面光场的关系为：

$$v(\boldsymbol{r}) = -\frac{ik}{2\pi B}\exp(-ikL)\int d\boldsymbol{r}_1 v(\boldsymbol{r}_1)\exp\left\{-\frac{ik}{2B}(Dr^2-2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_1-A\boldsymbol{r}_1^2)\right\}, \tag{8}$$

在上式中，用$\boldsymbol{r}'_1$、$\boldsymbol{r}'$取代$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}$，可得到相同的公式，并对(8)式取共轭。然后利用(1)式，可得

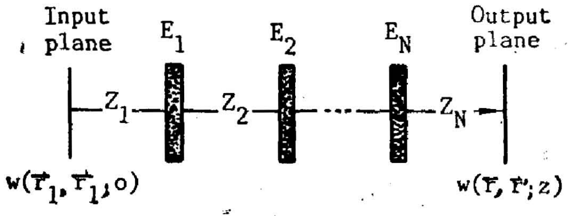

Fig. 1 Schematic diagram of Gaussian-Schell model beam propagation through an optical system containing a train of optical elements

输出面二阶相关函数为：

$$w(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}';z)=\frac{k^2}{4\pi^2B^2}\iint d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}'_1\langle v^*(\boldsymbol{r}_1)v(\boldsymbol{r}'_1)\rangle \exp\Big\{-\frac{ik}{2B}[D(r^2-r'^2)-2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_1+2\boldsymbol{r}'_1\cdot\boldsymbol{r}'+A(r_1^2-r_1'^2)]\Big\},\tag{9}$$

对于高斯-斯克尔模型光束，为简单起见，设输入面为光束束腰位置，$\langle v^*(\boldsymbol{r}_1)v(\boldsymbol{r}'_1)\rangle$ 由(5)式给出：

$$\langle v^*(\boldsymbol{r}_1)v(\boldsymbol{r}'_1)\rangle=a\exp\Big\{-\frac{(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}'_1)^2}{2w_0^2}\Big\}\exp\Big\{-\frac{(\sigma_0^2+w_0^2)(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}'_1)^2}{2\sigma_1^2w_0^2}\Big\}。\tag{10}$$

把(10)式代入(9)式，并积分，整理化简后得到：

$$\left.\begin{aligned}&w(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}';z)=a(z)\exp\Big\{-\frac{(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}')^2}{2w^2(z)}\Big\}\exp\Big\{-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2}{2\sigma_t^2(z)}\Big\}\exp\Big\{-i\frac{k(r^2-r'^2)}{2R(z)}\Big\},\\&w(z)=w_0\Delta_T(z),\ \sigma_t(z)=\sigma_{t_0}\Delta_T(z),\ a(z)=[a/\Delta_T^2(z)],\\&\Delta T(z)=\Big[A^2+\Big(\frac{\lambda B}{\pi w_0}\Big)^2\Big(\frac{1}{w_0^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}\Big)\Big]^{1/2},\ R(z)=\frac{(B^2/b_0^2)+A^2}{(BD/b_0^2)+AC},\\&b(z)=(\pi/\lambda)w^2(z)\beta,\ b_0=(\pi/\lambda)w_0^2\beta,\ \beta=[1+(1/\alpha^2)]^{-1/2}。\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

在推导上几式中，用到了关系 $AD-BC=1$。输出面的空间复相干度可由(11)式求得：

$$\left.\begin{aligned}&\mu(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}';z)=\exp\Big\{-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2}{2\sigma^2(z)}\Big\},\\&\sigma(z)=\sigma_0\Delta T(z)。\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

(12)式第二式和(11)式第二式相除得

$$\frac{\sigma(z)}{w(z)}=\frac{\sigma_0}{w_0}=\alpha,\tag{13}$$

(13)式说明。高斯-斯克尔模型光束的横向相干长度与光束截面元之比与光线传输矩阵元无关。这比文献[6]在自由空间中传输得出的结论更普遍。

定义高斯-斯克尔模型光束的 q 参数为：

$$\frac{1}{q(z)}=\frac{1}{R(z)}-\frac{i}{b(z)}。\tag{14}$$

由(11)式，并考虑到高斯-斯克尔模型光束在输入面和输出面的 β 值不变(因为 α 值不变)。可以验证，(14)式定义的 q 参数满足 ABCD 变换定律，即：

$$q(z)=\frac{Aq_0+B}{Cq_0+D},\tag{15}$$

上式对讨论高斯-斯克尔模型光束经过复杂光学系统的传输是很方便的。下面举两个实例

说明之。

1. 高斯-斯克尔模型光束在自由空间传输

设高斯-斯克尔模型光束束腰平面在 $z=0$ 面。光束沿 z 轴传输。从 $z=0$ 平面到 z 平面的光线传输矩阵可写为：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

把(16)式代入(15)式，得：

$$q(z) = q_0 + z_\circ \tag{17}$$

由(11)式和(14)式，可得：

$$w^2(z) = w_0^2\left[1+\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0}\right)^2\left(\frac{1}{w_0^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\right], \tag{18}$$

$$R(z) = z\left[1+\left(\frac{\pi w_0}{\lambda z}\right)^2\left(\frac{1}{w_0^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\right]_\circ \tag{19}$$

上两式即为参考文献[5]给出的(3.11)、(3.14)两式。

2. 高斯-斯克尔模型光束经过扩束望远镜的传输

图 2 所示的扩束望远镜系统的光线传输矩阵为：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & -m\Delta \\ 0 & -\frac{1}{m} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

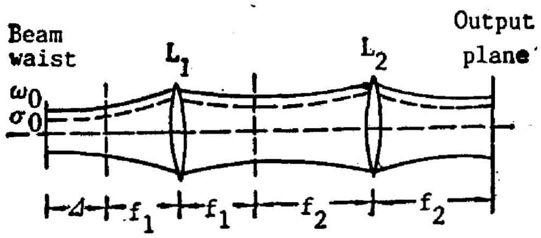

Fig. 2 Schematic diagram of Gaussian schell-model beam propagation through an expanding telescope

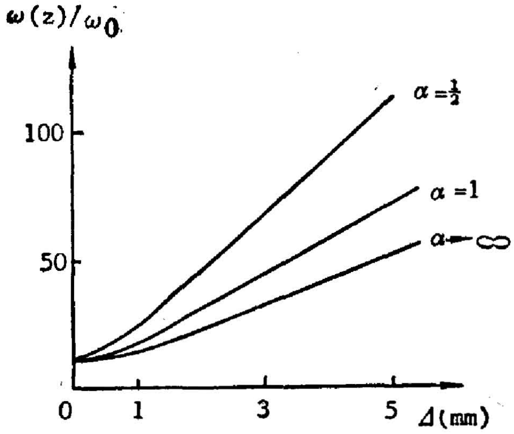

Fig. 3 Dependence of the $w(z)$ on Δ with various values of the global degree of spatial coherence α. We assume $m=10$, other parametes are chosen such that $(\pi w_0^2/\lambda)=1$ mm

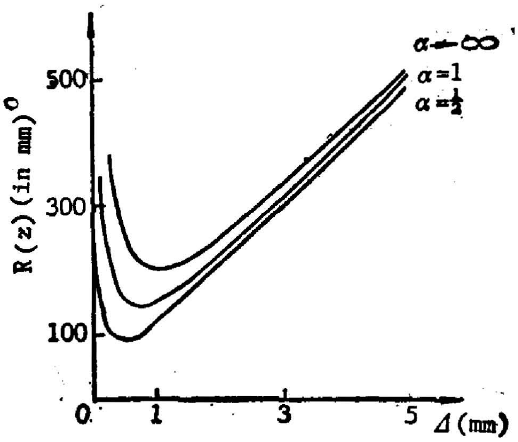

Fig. 4 $R(z)$ vs Δ other parameters are the same as given in Fig. 3

式中 $m=(f_2/f_1)$ 是望远镜系统的放大倍数。由(15)式及(20)式可得输出面高斯-斯克尔模型光束的 q 参数。

$$q(z)=m^2q_0+m^2\Delta,$$

那么，由(14)式 $w(z)$ 和 $R(z)$ 可表示为：

$$w(z)=mw_0\{1+[\Delta^2/(\pi w_0^2\beta/\lambda)^2]\}^{1/2}, \tag{21}$$

$$R(z)=m^2\Delta\{1+[(\pi w_0^2\beta/\lambda)/\Delta^2]\}。 \tag{22}$$

按(21)和(22)式作出 $w(z)$ 和 $R(z)$ 与 Δ 的关系图(见图3、4)。由图3、4可见，输出面的束腰半径 $w(z)$ 及波阵面的曲率半径 $R(z)$ 不仅依赖于 m、w_0 和 Δ；而且与综合相干度 α 密切相关。当 $\alpha\rightarrow\infty$，即为高斯光束情形。

四、讨　　论

(1) 在推导得出(15)式时，我们曾假定输入面是高斯-斯克尔模型光束的束腰位置。若输入面不是高斯-斯克尔模型光束束腰位置，可以证明，(15)式同样成立。

(2) 当 $\alpha\rightarrow\infty$，高斯-斯克尔模型光束即转化为高斯光束；(15)式就是高斯光束 s 参数的 ABCD 变换定律。由此可见，本文所得到的高斯-斯克尔模型光束 q 参数的 ABCD 变换定律适用范围较广；并且，为研究高斯-斯克尔模型光束的传输提供了捷径。

参 考 文 献

[1] H. Kogelnik; *Appl. Opt.*, 1965, **4**, No. 12 (Dec), 1562～1569.

[2] L. Ronch; *Appl. Opt.*, 1982, **21**, No. 23 (Dec), 4189～4191.

[3] J. Turunen; *Appl. Opt.*, 1986, **25**, No. 17 (Sep), 2908～2911.

[4] J. Deschamps *et al.*; *J. O. S. A.*, 1983, **73**, No. 3 (Mar), 256～261.

[5] A. T. Friberg *et al.*; *Opt. Commun.*, 1982, **41**, No. 6 (May), 383～387.

[6] A. T. Friberg *et al.*; *Optica Acta*, 1983, **30**, No. 8 (Aug), 1075～1097.

[7] N. A. Ansari *et al.*; *Opt. Commun.*, 1986, **59**, No. 5/6 (Oct), 385～389.

[8] E. Collett; *Opt. Commun.*, 1980, **32**, No. 1 (Jan), 27～31.

[9] P. Baues: *Opto-Electron.*, 1969, **1**, No. 1 (Jan), 37～44.

[10] S. A. Collins Jr.; *J. O. S. A.*, 1970, **60**, No. 9 (Sep), 1168～1177.

Propagation of Gaussian Schell-Mode beams through optical system

PU JIXIONG
(*Department of Physics, Huachiao University, Quanzhou*)

CHEN JINKAI
(*Experimental Center, Fujian Normal University, Fuzhou*)

(Received 23 June 1988)

Abstract

The formula describing propagation of second order correlation function of Gaussian-Schell model beam via optical system has been derived based on Hugens-Fresnel diffraction integral. By introducing a parameter q similar to that of Gaussian beam, it is proved that the ABCD transformation law is satified with the q of Gaussian-Schell model beam.

Key words: Gaussian-Schell model beam; second-order correlation function; complex degree of spatial coherence.