

# 辐射场的压缩的混沌态

黎永清 王育竹

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

## I. 特征函数和压缩性质

### 提 要

本文用 Wigner 特征函数方法将压缩的概念推广到一般量子态; 详细讨论了一类新的光场状态——压缩的混沌态的量子统计性质, 并提出辐射场与其共轭场的光子配组的概念作为其压缩性质的物理解释。

关键词: 压缩的混沌态, 光子配组。

### 一、引 言

量子光学的一个重要发展方向是研究和产生具有非经典统计性质的新型辐射场, 例如压缩态<sup>[1]</sup>, 反聚束和亚泊松分布<sup>[2]</sup>等光场。压缩态光场的压缩性质是指: 场振幅的一个正交相分量的量子噪声相对于相干态中的噪声被减小, 同时另一个相分量上的量子噪声被增大; 它可望应用于光学通信, 引力波探测和光谱学测量等方面。

本文采用特征函数(或密度矩阵)对光场状态的定义方法(不同于 Yuen<sup>[3]</sup>采用算符本征态对双光子相干态的定义方法), 将压缩态的概念推广到一般量子态的情况。特别是考虑对混沌态的压缩, 因为混沌光场广泛存在于实际光学系统中(例热光场和多模激光场等), 它们的场振幅的涨落远远高于相干态的量子噪声或真空起伏, 故研究混沌场的噪声压缩具有十分重要的意义。为此, 本文引进了一种新的光场状态, 即压缩的混沌态, 文中详细讨论了混沌态的压缩性质和光子数统计性质。正如压缩态的噪声压缩是相对相干态而言一样, 压缩的混沌态的压缩性质也是相对混沌场而言的。

### 二、任意量子态光场的噪声压缩

玻色子算符为  $(a, a^+)$  的单模电磁场(简称为模场)的电场算符可写成<sup>[1]</sup>

$$\hat{E}_e(t) = \lambda(ae^{-i\omega t} + a^+e^{i\omega t}), \quad (1)$$

式中  $\omega$  是光频,  $\lambda$  是包括空间波函数的常数。将产生算子  $a^+$  与湮灭算子  $a$  线性组合成一个新的算子

$$b = \mu a + \nu a^+. \quad (2)$$

当参数  $\mu, \nu$  满足  $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$  关系时, 则容易证实

$$[b, b^+] = [a, a^+] = 1, \quad (3)$$

故算符 \$(b, b^+)\$ 也是玻色子, 可以产生一个新的单模场(称为 \$b\$ 模场), 其电场算符可写成

$$\hat{E}_b(t) = \lambda(b e^{-i\omega t} + b^+ e^{i\omega t}). \quad (4)$$

定义: 若 \$a\$ 模场处于密度矩阵为 \$\rho\_a(a, a^+)\$ 的量子态, 则称由(2)式定义的 \$b\$ 模场处于压缩的量子态。\$b\$ 模场的状态可用 \$b\$ 算子的 Wigner 特征函数 \$C\_b^{(w)}(\xi)\$ 表征, 由它可计算出 \$b\$ 模场的量子统计性质。由定义<sup>[4]</sup>和(2)式得

$$C_b^{(w)}(\xi) = \langle\langle \exp[i\eta(\xi b + \xi^* b^+)] \rangle\rangle = C_b^{(w)}(\xi), \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} C_a^{(w)}(\xi) &= \text{Tr}\{\rho_a(a, a^+) \exp[i\eta(\xi a + \xi^* a^+)]\}, \\ \xi &= \mu\xi + \nu^* \xi^*. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 \$\eta\$ 是实参数; \$\xi, \xi^\*\$ 是复参数。\$C\_a^{(w)}(\xi)\$ 是 \$a\$ 算子的 Wigner 特征函数。由(3)式可以验证 \$a\$ 模场和 \$b\$ 模场的相振幅分量满足如下对易关系及测不准关系

$$\left. \begin{aligned} [a_1, a_2] &= [b_1, b_2] = (i/2), \\ \langle(\Delta a_1)^2\rangle \langle(\Delta a_2)^2\rangle &\geq (1/16), \\ \langle(\Delta b_1)^2\rangle \langle(\Delta b_2)^2\rangle &\geq (1/16), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= [(a + a^+)/2], \quad a_2 = [(a - a^+)/2i], \\ b_1 &= [(b + b^+)/2] = [(c_1 + c_1^*)a_1 + (c_2 + c_2^*)a_2]/2, \\ b_2 &= [(b - b^+)/2i] = [(c_1 - c_1^*)a_1 + (c_2 - c_2^*)a_2]/2i, \\ c_1 &= \mu + \nu, \quad c_2 = i(\mu - \nu). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

于是由(8)式容易计算 \$b\$ 模场的噪声压缩性质如

$$\left. \begin{aligned} \langle(\Delta b_1)^2\rangle &= \langle b_1^2\rangle - \langle b_1\rangle^2 \\ &= \frac{1}{4}\{(c_1 + c_1^*)^2 \langle(\Delta a_1)^2\rangle + (c_2 + c_2^*)^2 \langle(\Delta a_2)^2\rangle \\ &\quad + (c_1 + c_1^*)(c_2 + c_2^*) \langle\Delta a_1 \Delta a_2 + \Delta a_2 \Delta a_1\rangle\}, \\ \langle(\Delta b_2)^2\rangle &= \langle b_2^2\rangle - \langle b_2\rangle^2 \\ &= -\frac{1}{4}\{(c_1 - c_1^*)^2 \langle(\Delta a_1)^2\rangle + (c_2 - c_2^*)^2 \langle(\Delta a_2)^2\rangle \\ &\quad + (c_1 - c_1^*)(c_2 - c_2^*) \langle\Delta a_1 \Delta a_2 + \Delta a_2 \Delta a_1\rangle\}, \\ \langle\Delta a_i \Delta a_j\rangle &= \text{Tr}\{\rho_a(a, a^+) (a_i - \langle a_i\rangle)(a_j - \langle a_j\rangle)\}. \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

显然, 当 \$\mu, \nu\$ 同为实参数时, 有

$$\left. \begin{aligned} \langle(\Delta b_1)^2\rangle &= |\mu + \nu|^2 \langle(\Delta a_1)^2\rangle, \\ \langle(\Delta b_2)^2\rangle &= |\mu - \nu|^2 \langle(\Delta a_1)^2\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

而当 \$\mu, \nu\$ 同为虚参数时, 有

$$\left. \begin{aligned} \langle(\Delta b_1)^2\rangle &= |\mu - \nu|^2 \langle(\Delta a_2)^2\rangle, \\ \langle(\Delta b_2)^2\rangle &= |\mu + \nu|^2 \langle(\Delta a_1)^2\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

同时满足

$$\langle(\Delta b_1)^2\rangle \langle(\Delta b_2)^2\rangle = \langle(\Delta a_1)^2\rangle \langle(\Delta a_2)^2\rangle,$$

由此可见, 在以上两种情况下, 相对处于任意量子态的 \$a\$ 模场而言, \$b\$ 模场的一个相振幅分量上的噪声被压缩, 而另一个相分量上的噪声被增大。这与压缩态的特征是相似的。

作为一种特殊情况, 当 \$a\$ 模场处于相干态 \$|a\rangle\$ 时, 可以验证 \$b\$ 模场处于双光子相干态(即压缩态)。这时有

$$\left. \begin{aligned} \rho_a(a, a^\dagger) &= |\alpha\rangle\langle\alpha|, \\ \langle(\Delta a_1)^2\rangle &= \langle(\Delta a_2)^2\rangle = \frac{1}{4}, \\ \langle\Delta a_1\Delta a_2 + \Delta a_2\Delta a_1\rangle &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} C_b^{(w)}(\xi) &= \exp[-(1/2)\eta^2|\xi|^2] \exp[i\eta(\tilde{\xi}\alpha + \tilde{\xi}^*\alpha^*)], \\ \langle(\Delta b_1)^2\rangle &= \frac{1}{4}|\mu^* + \nu|^2, \\ \langle(\Delta b_2)^2\rangle &= \frac{1}{4}|\mu^* - \nu|^2, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

关于双光子相干态的详细讨论, 见文献[3]。

### 三、压缩的混沌态

#### 1. 特征函数及压缩性质

若  $a$  模场处于混沌态, 则称由(2)式定义的  $b$  模场所处的状态是压缩的混沌态。附录中给出了平均光子数为  $\langle n \rangle$  的  $a$  模混沌态光场的密度矩阵、Wigner 特征函数及场振幅的涨落性质为

$$\left. \begin{aligned} \rho_a(a, a^\dagger) &= \frac{1}{\pi\langle n \rangle} \int \exp(-|\alpha|^2/\langle n \rangle) |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha, \\ C_a^{(w)}(\xi) &= \exp\left[-\frac{1}{2}\eta^2|\xi|^2(1+2\langle n \rangle)\right], \\ \langle a_1 \rangle &= \langle a_2 \rangle = 0, \\ \langle(\Delta a_1)^2\rangle &= \langle(\Delta a_2)^2\rangle = \frac{1}{4}(1+2\langle n \rangle), \\ \langle\Delta a_1\Delta a_2 + \Delta a_2\Delta a_1\rangle &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

于是利用(5)、(8)、(9)三式容易得到  $b$  模压缩的混沌态光场的特征函数及场振幅的量子涨落为

$$\left. \begin{aligned} C_b^{(w)}(\xi) &= \exp\left[(-1/2)\eta^2|\mu\xi + \nu^*\xi^*|^2(1+2\langle n \rangle)\right], \\ \langle b_1 \rangle &= \langle b_2 \rangle = 0, \\ \langle(\Delta b_1)^2\rangle &= \frac{1}{4}(1+2\langle n \rangle)|\mu^* + \nu|^2, \\ \langle(\Delta b_2)^2\rangle &= \frac{1}{4}(1+2\langle n \rangle)|\mu^* - \nu|^2, \\ \langle\Delta b_1\Delta b_2 + \Delta b_2\Delta b_1\rangle &= (1/4)(1+2\langle n \rangle) \cdot 2i(\mu^*\nu^* - \nu\mu), \\ \langle(\Delta b_1)^2\rangle\langle(\Delta b_2)^2\rangle &= (1/16)(1+2\langle n \rangle)^2|\mu^{*2} - \nu^2|^2. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

设

$$\mu = |\mu|e^{i\phi_\mu}, \quad \nu = |\nu|e^{i\phi_\nu}, \quad (17)$$

式中  $\phi_\mu, \phi_\nu$  分别是复参量  $\mu, \nu$  的相位角。

令  $\phi = (\pi/2) - [(\phi_\mu + \phi_\nu)/2]$  作算符变换

$$b' = b'_1 + ib'_2 = b e^{i\phi} = (b_1 + ib_2) e^{i\phi}, \quad (18)$$

则不难验证:  $b'$  算子的  $b'_1$  和  $b'_2$  分量具有最小和最大的量子涨落, 并且测不准量取极小值, 即

$$\left. \begin{aligned} \langle (\Delta b_1')^2 \rangle &= (1/4)(1+2\langle n \rangle)(|\mu| - |\nu|)^2, \\ \langle (\Delta b_2')^2 \rangle &= (1/4)(1+2\langle n \rangle)(|\mu| + |\nu|)^2, \\ \langle (\Delta b_1')^2 \rangle \langle (\Delta b_2')^2 \rangle &= (1/16)(1+2\langle n \rangle)^2. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

为了形象地反映场振幅  $b$  的涨落, 按照 Oaves<sup>[5]</sup> 处理压缩态的方法, 在相空间中, 以最小和最大量子涨落的分量  $b_1'$  和  $b_2'$  为极轴的椭圆称为压缩的混沌态的误差椭圆。图 1 给出了混沌态的误差圆和几种情况下压缩的混沌态的误差椭圆。

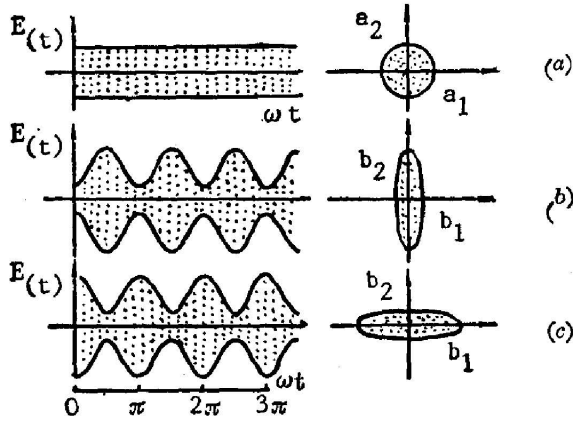


Fig. 1 Plot of single mode electric field against time and phase space plot showing the uncertainty in

- (a) a chaotic state
- (b) a squeezed chaotic state with reduced fluctuation in in-phase component  $b_1$   
( $\text{ang}(\mu) + \text{ang}(\nu) = \pi$ )
- (c) a squeezed chaotic state with reduced fluctuation in out-phase component  $b_2$   
( $\text{ang}(\mu) + \text{ang}(\nu) = 0$ )

由图 1 或 (16) 式可以看到压缩的混沌态 ( $b$  模场) 的压缩性质, 即量子噪声在场振幅的一个相分量上 (相对混沌态的噪声水平) 被压缩, 而在另一个相分量上被增大。

2. 电场的涨落性质

将  $b$  模场的电场算符 (2) 式写成正交相分量的形式

$$\hat{E}_b(t) = 2\lambda(b_1 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t). \quad (20)$$

由 (16) 式很容易计算电场算符的涨落性质

$$\left. \begin{aligned} \langle \hat{E}_b(t) \rangle &= 0, \\ \langle (\Delta \hat{E}_b(t))^2 \rangle &= 4\lambda^2 [\langle (\Delta b_1)^2 \rangle \cos^2 \omega t + \langle (\Delta b_2)^2 \rangle \sin^2 \omega t \\ &\quad + \langle \Delta b_1 \Delta b_2 + \Delta b_2 \Delta b_1 \rangle \sin \omega t \cos \omega t] \\ &= \lambda^2 (1 + 2\langle n \rangle) [|\mu|^2 \\ &\quad + |\nu|^2 + 2|\mu| \cdot |\nu| \cos(2\omega t + \phi_\mu + \phi_\nu)], \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

图 1 绘出了模拟电场随时间涨落的示意图。

由图中可见, 在混沌态光场中, 电场围绕零平均值作无规涨落, 而电场的均方涨落值是不随时间变化的, 或者说其位相是无规的, 而振幅呈高斯分布。然而, 在压缩的混沌态光场中, 电场的平均值虽也为零, 但其均方涨落值却是以  $2\omega$  为频率随时间变化 ( $\omega$  是光场的频率), 这表明电场的涨落不再是完全无规的, 而是受到某种调制。电场涨落的这种调制性质在压缩态光场中也同样存在<sup>[4, 6]</sup>, 它等价于压缩性质。

我们可以把  $b$  模场 (4) 式与作

$$\left. \begin{aligned} \hat{E}_b(t) &= \mu \hat{E}_a(t) + \nu \hat{E}_c(t), \\ \hat{E}_c(t) &= \lambda(a^+ e^{-i\omega t} + a e^{i\omega t}), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式中  $\hat{E}_c(t)$  是  $a$  模场的位相复共轭场 (其中为了讨论简单, (22) 式中假设了  $\mu, \nu$  是实数)。故由 (22) 式可将压缩的混沌态光场看作是混沌态光场与其共轭场的比例叠加, 或者说,  $a$  模场的一群光子 (以  $|\mu|^2$  为系数) 总与其共轭场的一群光子 (光子数比例于  $|\nu|^2$ ) 存在着相关性, 并配成光子组, 这些光子组之间存在着集体性质, 导致  $b$  模场的压缩性质。

附 录

由混沌态的密度矩阵 (14) 式<sup>[6]</sup> 可以计算其正规特征函数

$$C_a^{(n)}(\xi) = \langle \langle e^{i\eta t^* a^+} e^{i\eta t a} \rangle \rangle = \int \frac{e^{-2\alpha}}{\pi} \frac{1}{\langle n \rangle} \exp(-|\alpha|^2 / \langle n \rangle) \exp[i\eta(\xi\alpha + \xi^* a^*)], \quad (A1)$$

令  $\alpha = r e^{i\theta}$ ,  $\xi = |\xi| e^{i\beta}$ , 则利用公式[7]

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty e^{-pt} J_\mu(bt) t^{\mu+1} dt &= \frac{b^\mu}{(2p)^{\mu+1}} \exp(-b^2/4p), \quad [\operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(\mu) > -1] \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \exp[i2\eta|\xi|r \cos(\theta+\beta)] d\theta &= J_0(2\eta|\xi|r). \end{aligned} \right\} \quad (A2)$$

可得

$$C_a^{(n)}(\xi) = \frac{1}{\langle n \rangle} \int_0^\infty 2r dr e^{-r^2/\langle n \rangle} J_0(2\eta|\xi|r) = \exp[-\langle n \rangle \eta^2 |\xi|^2]. \quad (A3)$$

故利用  $C_a^{(n)}(\xi)$  与  $C_a^{(w)}(\xi)$  的关系式[4], 可得

$$C_a^{(w)}(\xi) = \exp[-(1/2)\eta^2 |\xi|^2] C_a^{(n)}(\xi) = \exp[-(1/2)\eta^2 |\xi|^2 (1+2\langle n \rangle)], \quad (A4)$$

于是利用  $C_a^{(w)}(\xi)$  的简单微分运算可得

$$\left. \begin{aligned} \langle a_1 \rangle &= \langle (a+a^+)/2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(i\eta)} C_a^{(w)}(\xi) \Big|_{\xi=0} = 0, \\ \langle a_2 \rangle &= \langle (a-a^+)/2i \rangle = \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial(i\eta)} C_a^{(w)}(\xi) \Big|_{\xi=0} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (A5)$$

故有

$$\langle a_1 \rangle = \langle a_2 \rangle = 0. \quad (A6)$$

同样可计算正文中(15)式中其它各式。

### 参 考 文 献

- [1] D. F. Walls; *Nature*, (1983), **306**, p. 141.
- [2] 王育竹等; *Laser Spectroscopy VII*, (Springer-Verlag, New York, 1985), p. 238.
- [3] H. P. Yuen; *Phys. Rev. (A)*, (1976), **A13**, No. 6, p. 2226.
- [4] W. H. Louisell, «辐射的量子统计性质». (中译本, 科学出版社, 北京, 1982年), p. 200.
- [5] C. M. Caves; *Phys. Rev. (D)*, (1981), **23**, No. 8, p. 1698.
- [6] R. J. Glauber; *Phys. Rev.*, (1963), **130**, No. 6, p. 2529.
- [7] 王竹溪, 郭敦仁, «特殊函数概论», (科学出版社, 北京, 1965年), p. 453.

## Squeezed chaotic states of the radiation field

LI YONGQING AND WANG YUZHU

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 6 March 1987; revised 4 April 1988)

### I. Characteristic function and squeezing\*

#### Abstract

The concept of squeezing has been generalizated to any quantum states of the radiation field using wigner characteristic function method. As and example, we have discussed the squeezing of the light field in a new quantum state, squeezed chaotic state. Physically the squeezing can be explained to be created by proton-mixing between the light and its phase conjugate field.

**Key words:** squeezed chaotic state; photon mixing.

\* This paper was reported in "Eighth International Conference of Laser Spectroscopy, EICOLS '87", Åre, Sweden, June 22~26, 1987.