

# 用改进的共轭斜量迭代法重建 三维折射率场

高 益 庆

(南昌航空工业学院物理教研室)

丁 汉 泉

(北京航空学院非晶态研究室)

## 提 要

本文通过计算机模拟运算,结合折射率场(温度场)的先验知识,考查了改进的共轭斜量迭代法用于全息干涉计量三维折射率场的重建精度及视角范围和数据噪声的影响,并介绍了一种抑制较大噪声的算法。作为一个应用实例,计算了某一截面火焰温度场的分布,并与热电偶测量的值进行了比较。

关键词: 全息干涉计量术; 温度测试; 像重建。

## 一、引 言

在用全息干涉术重建三维折射率场的应用中,由于某些客观因素,常常难以一次获得 $180^\circ$ 视角范围的干涉条纹图。在这种情况下,尤其是对于非稳态场,三维折射率场的重建算法本身就呈现病态性质,即使是精确的数据,也难以得到较好的重建结果。为了压缩这种病态性质,改善重建质量,必须结合待测场的先验知识以及寻求更好的数值计算方法。文献[1]讨论了几种重建方法,但没有考查数据噪声的影响。本文结合折射率(温度)场的物理限制(先验知识),用改进的共轭斜量迭代法进行研究,通过计算机模拟的有噪声的干涉数据考查了该迭代法重建精度、收敛速率以及观察角范围和数据误差对重建精度的影响。作为一个应用实例,利用文献[2]的实测数据,用该迭代法计算了一个特定截面内的火焰温度分布,并与热电偶测量的值以及文献[2]和[3]的结果进行了比较。

## 二、改进的共轭斜量迭代算法

将待重建的折射率差函数 $f(x, y) = n(x, y) - n_0$ 展成下列级数:

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_{mn} b_{mn}(x, y)。 \quad (1)$$

采用两次曝光技术,光程差函数可表示为

$$\phi(P_i, \theta_j) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_{mn} \int_{S_{ij}} b_{mn}(x, y) ds。 \quad (2)$$

若选择  $b_{mn}$  为:

$$b_{mn}(x, y) = \text{sinc} \left[ \frac{2}{l_x}(x - ml_x) \right] \text{sinc} \left[ \frac{1}{l_y}(y - ml_y) \right]. \quad (3)$$

则(2)式积分可解析算出<sup>[4]</sup>:

$$A_{mn}(P_i, \theta_j) = \int_{S_{ij}} b_{mn}(x, y) ds. \quad (4)$$

从而有

$$\phi(P_i, \theta_j) = \sum_m \sum_n f_{mn} A_{mn}(P_i, \theta_j). \quad (5)$$

对于不同倾角  $\theta_j$  和不同径向值  $P_i$  的光线路径  $S_{ij}$  可得出系列光程差数据  $\phi(P_i, \theta_j)$ , 于是上式构成一组关于未知数  $f_{mn}$  的线性方程组:

$$\phi = A \times f. \quad (6)$$

式中  $\phi$  为  $I \times J$  个已知数据 ( $\phi_{ij} = \lambda N_{ij}$ ) 组成的向量;  $f$  为  $M \times N$  个未知数据组成的向量;  $A$  为  $(I \times J) \times (M \times N)$  个系数组成的矩阵。

由于总观察角小于  $180^\circ$ , (6)式成为一病态方程组; 因数据误差及数值方法自身的误差, (6)式应为:

$$R = A \times f - \phi. \quad (7)$$

实际计算中, 常采用超量数据来求解上式的最小二乘解, 即寻找  $f$ , 使得下式成立:

$$\|R\| = \|A \times f - \phi\| = \min. \quad (8)$$

式中  $\|\dots\|$  定义平方范数。但这不能唯一地决定  $f$ 。为此可以依靠场的先验知识从多个解中寻找满足场空间物理限制的解。当采用两次曝光技术测温度场时, 其中一次是处在室温状态(折射率为  $n_0$ ), 而另一次则是较高的温度(折射率为  $n(x, y)$ ), 这就使得  $f(x, y) = n(x, y) - n_0$  在待测的区域内必然是非正的, 即

$$f(x, y) \leq 0. \quad (9)$$

有时还不难知道场中的最高温度不会大于某一限制, 则又有

$$f(x, y) \geq f_{\min}. \quad (10)$$

这些物理限制可成为我们选择解的一个补充依据。对于噪声较大的数据, 可求解下式有约束的最小二乘解:

$$(A^T A - \sigma I) \times f = A^T \phi. \quad (11)$$

式中  $0 \leq \sigma < 1$  由噪声级别决定,  $I$  为单位矩阵。

当数据噪声不是太大的情况, 用改进的共轭斜量迭代算法求(7)式的最小二乘解的主要步骤如下<sup>[4]</sup>: (简称算法一)

$$\text{i)} \quad f_0 = \begin{cases} 0, & k=0, \\ f_k, & k \geq 2, \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{ii)} \quad R_0 = A \times f_0 - \phi, \quad (13)$$

$$k=1, k \geq 2. \quad (14)$$

$$\text{iii)} \quad r_{k-1} = A^T R_{k-1}, \quad (15)$$

$$\theta_{k-1} = \frac{\|r_{k-1}\|}{\|r_{k-2}\|}, \quad k \geq 2. \quad (16)$$

$$P_k = \begin{cases} -r_{k-1}, & k=1, \\ -r_{k-1} + e_{k-1}P_{k-1}, & k \geq 2. \end{cases} \quad (17)$$

$$q_k = \frac{\|r_{k-1}\|}{\|AP_k\|}, \quad (18)$$

$$f_k = f_{k-1} + q_k P_k. \quad (19)$$

$$\text{iv) } R_k = R_{k-1} + q_k AP_k. \quad (20)$$

v) 若  $R_k/R_{k-1} \leq EPS$  (预先给定的精度) 不满足, 回至第 iii 步, 否则, 进行下步。

vi) 空域修正:

$$f_k = \begin{cases} f_k, & f_k < 0, \\ 0, & f_k \geq 0. \end{cases} \quad (21)$$

$$f_k = \begin{cases} f_k, & f_k > f_{\min}, \\ f_{\min}, & f_k \leq f_{\min}. \end{cases} \quad (22)$$

回至第 i 步直到满足精度要求和空域限制。

当数据中有较大的随机噪声时, 我们用共轭斜量法求(11)式的最小二乘解, 其主要步骤只须将以上步骤中的 ii 和 iii 改为<sup>[5]</sup>: (简称为算法二)

$$\text{ii) } R_0 = \phi - Af_0, \quad (23)$$

$$P_0 = r_0 = A^T \phi - (A^T A - \sigma I) f_0. \quad (24)$$

$$k=1, k \geq 2. \quad (25)$$

$$\text{iii) } q_{k-1} = \frac{P_{k-1}^T r_{k-1}}{P_{k-1}^T (A^T A + \sigma I) P_{k-1}}. \quad (26)$$

$$r_k = r_{k-1} - q_{k-1} (A^T A + \sigma I) P_{k-1}. \quad (27)$$

$$f_k = f_{k-1} + q_{k-1} P_{k-1}. \quad (28)$$

$$e_{k-1} = \frac{r_k (A^T A + \sigma I) P_{k-1}}{P_{k-1}^T (A^T A + \sigma I) P_{k-1}}. \quad (29)$$

$$P_k = r_k - e_{k-1} P_{k-1}. \quad (30)$$

### 三、计算机模拟运算

我们采用双高斯函数作为模拟运算的温度场:

$$OT(x, y) = T_0 + T_1 \exp[-8x^2 - 25(y + 0.22)^2] \\ + T_2 \exp[-8x^2 - 25(y - 0.22)^2].$$

通过折射率与温度的转换关系<sup>[2]</sup>, 经泊松数值积分, 获得模拟的干涉数据 ( $\phi_{ij} = \lambda N_{ij}$ ,  $\lambda$  为激光波长,  $N_{ij}$  为条纹级数), 分别取条纹截断误差为  $\pm 0.005$  级、 $\pm 0.05$  级和  $\pm 0.5$  级, 对以上算法进行了考查。

温度的平均误差和最大误差定义同文献[2]中的(18)式和(19)式。

#### 1. 视角范围对重建精度的影响

我们取条纹截断误差为  $\pm 0.05$  级的数据, 用算法一比较了视角范围为  $40^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $120^\circ$  和  $180^\circ$  的重建精度和收敛速率(见图1)。可以看出, 视角范围愈大, 收敛速率愈快, 重建精度愈好; 即使是  $40^\circ$  的小角度范围, 亦能达到较好的精度, 但收敛速率较慢。

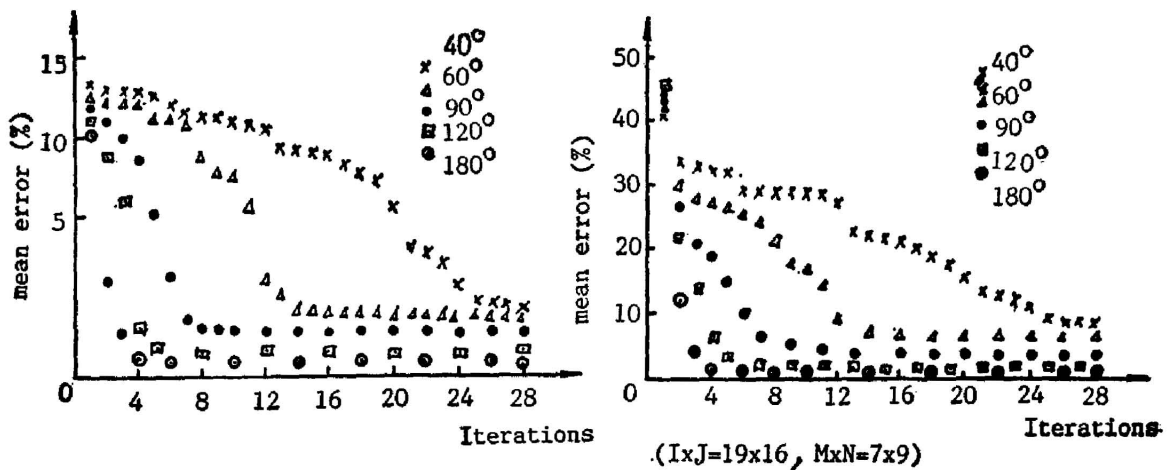


Fig. 1 The influence of total viewing angle on reconstruction precision

2. 条纹截断误差对重建精度的影响

我们用 90° 视角范围的数据, 用算法一比较了条纹截断误差对重建精度的影响, 其结果见图 2, 相应的残量范数(8)式中的  $\|R\|$  的收敛趋势见图 3。图 2 表明, 当条纹截断误差绝对值不大于 0.05 级时, 重建精度和收敛速率都较好; 当条纹截断误差的绝对值不小于 0.5 级时, 过多的迭代, 不仅提高不了精度, 反而使之变坏。

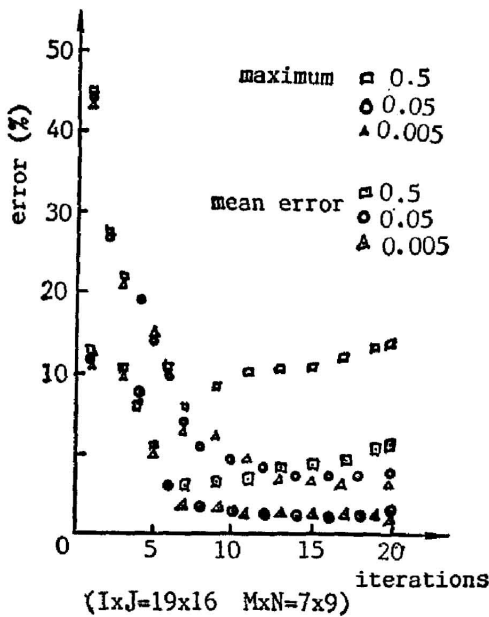


Fig. 2 The influence of fringe roundoff error on reconstruction precision

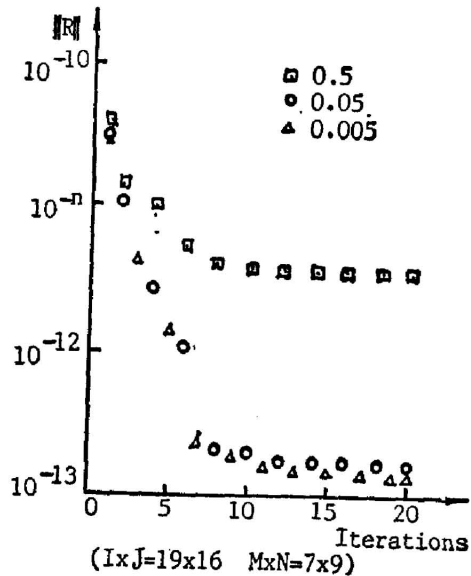


Fig. 3 The influence of fringe roundoff error on  $\|R\|$

3. 噪声的抑制

当条纹截断误差的绝对值不小于 0.5 级时, 迭代发散。但图 3 表明, 作为迭代判据的残量范数  $\|R\|$  仍无条件地收敛于一个极限。在重建精度开始发散时,  $\|R\|$  下降速率缓慢, 当然可以在这时停止迭代(即选择适当的 EPS 值), 但在有些实际问题中, 这种  $R$  度不易掌握。为

此,我们用算法二,对  $90^\circ$  视角范围,条纹截断误差为  $\pm 0.5$  级的数据进行运算,其结果见图 4,其中约束参量  $\sigma=0.1$ ,可见,采用适当的约束,可以改善算法对噪声的敏感性。

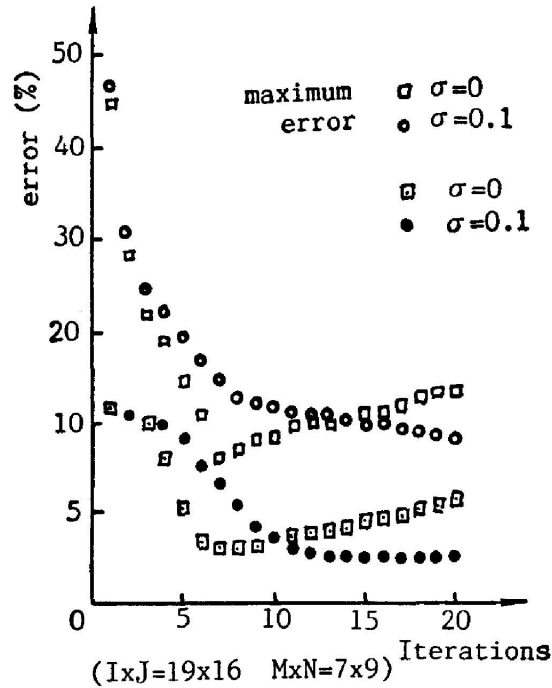


Fig. 4 The results of controlling noise

#### 四、测量火焰温度场的应用实例

我们先前报道了用卷积法<sup>[2]</sup>和快速傅里叶变换迭代法<sup>[3]</sup>计算双灯芯火焰温度场某一截

Table 1 The reconstruction results of flame temperature field  $T(x, y)$  ( $^\circ\text{C}$ )

$m(x)$ $n(y)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-6	20	20	24	29	36	33	20	20	20
-5	20	21	64	151	176	151	72	21	20
-4	24	58	209	379	488	391	227	67	20
-3	25	136	379	904	1050	722	377	123	28
-2	27	160	515	1142	1331	987	492	154	27
-1	27	138	452	924	1183	920	459	144	25
0	22	113	427	734	1073	734	425	113	22
1	25	146	463	945	1231	947	461	142	27
2	27	159	502	1029	1393	1161	528	161	28
3	28	126	389	743	1121	930	391	139	25
4	20	67	233	397	504	387	214	60	24
5	20	21	73	153	182	154	65	22	20
6	20	20	20	33	36	29	24	20	20

Table 2 Comparison of thermocouple measurements and reconstruction results ( $^{\circ}\text{C}$ )

method	$n(y)$												
	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
thermocouple	20	77	421	943	1189	1123	1073	1140	1249	1081	498	68	20
convolution	38	185	482	1000	1214	1031	973	1059	1262	1041	511	191	38
FFT	45	153	495	1053	1326	1077	966	1198	1393	1114	518	155	46
conjugate	36	176	488	1050	1331	1183	1073	1231	1393	1121	504	182	36

面内的温度分布。本文用  $90^{\circ}$  视角范围内的同样的干涉数据, 没有考虑场的纵轴对称性的近似, 用改进的共轭斜量迭代法(算法一)计算同样截面内的温度分布, 计算结果见表 1。表 2 比较了热电偶测量的温度、卷积法、快速傅里叶迭代法和改进的共轭斜量迭代法计算的结果(纵轴上各点), 除临近边缘的点外, 三种计算方法的结果与热电偶测量的值比较接近。误差分析见文献[2]。

本文通过计算机模拟研究, 证实了改进的共轭斜量迭代法在视角范围不小于  $40^{\circ}$ , 条纹截断误差的绝对值不大于 0.05 级的情况下, 能提供较好的重建精度和较快的收敛速率; 在条纹截断误差为  $\pm 0.5$  级的情况下, 采用适当的约束, 可以改善噪声的影响; 用于实验数据处理, 其结果也是较满意的。共轭斜量迭代法与快速傅里叶迭代法比较, 重建精度较好, 在小视角条件下这一优点更突出。

## 参 考 文 献

- [1] D. W. Sweeney, C. M. Vest; *Appl. Opt.*, 1973, 12, No. 11 (Nov), 2649~2664.
- [2] 高益庆等;《光学学报》, 1983, 3, No. 2 (Feb), 181~187.
- [3] 高益庆等;《光学学报》, 1988, 3, No.10(Oct), 892~898
- [4] 冯康,《数值计算方法》, (国防工业出版社, 北京, 1978), 315~316.
- [5] S. Kawata, O. Nalcioglu; *IEEE Trans. Med. Imaging*, 1985, MI-4, No. 2 (Jun), 65~71.

## Reconstruction of 3-D refractive index fields by an improved Conjugate-gradient iterative method

GAO YIQING

*(Nanchang College of Aeronautical Engineering)*

DING HANQUAN

*(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)*

(Received 12 May, 1988)

### Abstract

The reconstruction precision of an improved Conjugate-gradient iterative method, the effects of increased input data error and limited total viewing angle have been studied based on the knowledge of refractive index fields aid of computer simulations. As an example, the flame temperature fields were reconstructed, and the results are compared with thermocouple measurements.

**Key words:** interferometric holography; temperature measurement; image reconstruction.