

# 剪切散斑干涉术的统计分析

陈家璧 周维桢 裴 敏  
(华中理工大学光学工程系)

## 提 要

本文用统计光学方法分析了剪切散斑图的成象过程; 散斑图的频谱分布以及全场滤波干涉条纹的形成。发现剪切散斑干涉条纹不仅与三维位移微分有关, 而且与面内位移量有关。在此基础上又讨论了影响干涉条纹质量的有关因素, 并作了实验验证。

关键词: 剪切散斑干涉术; 频谱分布; 干涉条纹的形成; 统计分析。

## 一、引 言

剪切散斑干涉术与全息干涉, 散斑照相等方法比较, 具有明显的优越性<sup>[1]</sup>, 因而受到实验力学界的重视, 并已发展为工业上实用的无损检测手段<sup>[2~4]</sup>。

Y. Y. Hung 曾陆续设计多种分波面剪切散斑干涉装置<sup>[1, 3, 5, 6]</sup>, 并用光程差分析给出物体变形与光场相对相位变化之间的关系, 以及对全场滤波形成干涉条纹的半定量解释, 这种解释把调制于高频载波上的低频信号称为不可见频率型条纹, 同时认为高通滤波能把它变为可见的强度型条纹, 尽管这种解释不很合理, 但其结论与 Y. Y. Hung 的实验相符已被广泛接受。近年来, 在剪切散斑图的频谱分析方面有了进展, 并提出了最佳滤波区域的概念<sup>[7]</sup>。然而仍未见讨论条纹形成机理的报道。本文利用傅里叶光学和统计光学的基本理论。具体分析剪切散斑图的成象过程和其频谱, 并进一步讨论全场滤波形成干涉条纹的物理过程。导出决定条纹分布的公式, 用实验结果证实了剪切散斑干涉得到的条纹分布不仅与相对位相差有关, 而且与面内变形量大小有关。Y. Y. Hung 的结论仅适用于面内变形量可以忽略的特殊情况。

## 二、剪切散斑图的成象过程

图1所示为典型的剪切散斑图拍摄光路。光源  $S$  在  $x-z$  面内以入射角  $\psi$  照射被测试件的表面; 剪切相机由光楔和物镜组成, 其主截面也是  $x-z$  平面; 光轴则沿被测试件法线方向放置; 试件变形的三个分量为  $u$ 、 $v$ 、 $w$ 。产生变形后光程差为  $\Delta$ , 而光楔的剪切作用导致相对光程差  $\delta$ <sup>[1]</sup>。成象孔径被光楔分割为上、下两个半圆。不难证明, 这两个半孔径对应的脉冲响应函数是相互共轭的, 即:

$$h_{up} = h_{low}^* \quad (1)$$

上标 \* 表示复共轭。这样物面上每点通过物镜产生一对成象于不同位置的光束。变形前它

们对应的象光场复振幅可表示为

$$U_{1up} = a(x_1, y_1) \exp[-j\theta(x_1, y_1)], \quad (2a)$$

$$U_{1low} = a(x_1 + \delta x_1, y_1) \exp[j\theta(x_1 + \delta x_1, y_1)], \quad (2b)$$

对于变形后的第二次曝光则有:

$$U'_{1up} = a(x_1 + u_1, y_1 + v_1) \times \exp[-j\theta(x_1 + u_1, y_1 + v_1)] \times \exp(j2\pi\Delta/\lambda), \quad (2c)$$

$$U'_{1low} = a(x_1 + \delta x_1 + u_1 + \delta u_1, y_1 + v_1 + \delta v_1) \exp[j\theta(x_1 + \delta x_1 + u_1 + \delta u_1, y_1 + v_1 + \delta v_1)] \times \exp[j2\pi(\Delta + \delta)/\lambda]. \quad (2d)$$

下标“1”表示在象面  $x_1-y_1$  上相应的量, 经过线性显影, 二次曝光剪切散斑图的振幅透过率正比于两次曝光强度之和。计算后省去常数因子为:

$$t(x_1, y_1) = |a(x_1, y_1)|^2 + |a(x_1 + \delta x_1, y_1)|^2 + |a(x_1 + u_1, y_1 + v_1)|^2 + |a(x_1 + \delta x_1 + u_1 + \delta u_1, y_1 + v_1 + \delta v_1)|^2 + b(x_1, y_1) + b^*(x_1, y_1) + b(x_1 + u_1, y_1 + v_1) \exp(-j2\pi\delta/\lambda) + b^*(x_1 + u_1, y_1 + v_1) \exp(j2\pi\delta/\lambda), \quad (3)$$

其中  $b(x_1, y_1) = a(x_1, y_1)a(x_1 + \delta x_1, y_1) \exp\{-j[\theta(x_1, y_1) + \theta(x_1 + \delta x_1, y_1)]\}$ , 作为散射表面所成的象,  $U_{1up}$  等分量场都是主观散斑场, 其振幅  $a$  是一个随机变量, 而且因为剪切散斑图拍摄时孔径较大, 这一散斑场颗粒很细, 在以后滤波过程中可近似认为是白噪声型随机过程。由函数  $a$  和  $\theta$  组成的函数  $b$  当然具有同样性质。同时还应当指出的是, 由于两个半径孔径脉冲响应的共轭性, 使相互错位的象场复振幅之间相位相反[见(2)式]。这与 Y.Y. Hung 的分析<sup>[1]</sup>不同, 由上述(2), (3)两式出发可以清楚地分析剪切散斑图频谱, 并阐明其物理意义。

### 三、剪切散斑图的频谱分析

剪切散斑图的空间滤波是在频域进行的, 因而在讨论滤波过程之前必须分析其频谱分布。在相干光照明之下, 散斑图的空间频谱, 略去常数因子可用其振幅透过率的傅氏变换表示:

$$U_f(x_f, y_f) = \mathcal{F}\{t(x_1, y_1)\} \Big|_{\substack{x_f = x_1/\lambda f \\ y_f = y_1/\lambda f}} \quad (4)$$

式中  $\mathcal{F}\{\}$  为傅氏变换算符。下面逐项分析(3)式表示的透过率的空间频谱。对于其中第一项有:

$$\mathcal{F}\{|a(x_1, y_1)|^2\} = \left[ \mathcal{F}\{U_0\} P_{up} \left( -\frac{d_i}{f} x_f, -\frac{d_i}{f} y_f \right) \right] * \left[ \mathcal{F}\{U_0\} P_{up} \left( -\frac{d_i}{f} x_f, -\frac{d_i}{f} y_f \right) \right], \quad (5a)$$

式中  $*$  表示相关运算。  $P_{up}(\xi, \eta)$  为对应于  $h_{up}$  的上半光瞳函数。而  $U_0$  为物体反射光复振

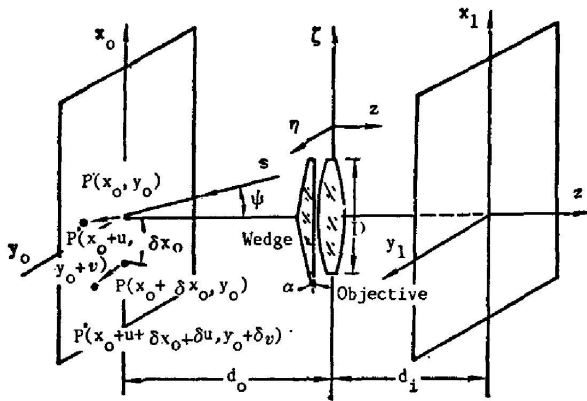


Fig. 1 Imaging optical set-up of shearing specklegram

幅分布。在光学粗糙表面的假设下,  $U_0$  的远场分布  $\mathcal{F}\{U_0\}$  是分布在整个  $x_f$ - $y_f$  面上的散斑场。因而上式表明散斑图透过率的第一项对应的频谱为被上半孔径限制的散斑场的自相关函数, 对于这一自相关函数可以进一步分析计算<sup>[8]</sup>。(3) 式中第一项对应的频谱分布区域是上半光瞳函数的自相关函数不为零的区域, 即光强为零的概率不等于 1 的区域。这个区域容易用作图法得到(见图 2)。图中央类似椭圆的部分为 (3) 式第一项对应频谱的分布区域, 它由一个边长为

$$2r = 2 \frac{f}{d_i} r_0$$

( $r_0$  为光瞳半径) 的正方形和两端的两个半圆组成, 对于式 (3) 第二、三、四项的计算可得同样结果。

用上述方法可计算出第五项对应的频谱分布为:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{b(x_1, y_1)\} = & \left[ \mathcal{F}\{U_0(x_0, y_0)\} P_{up} \left( -\frac{d_i}{f} x_f, -\frac{d_i}{f} y_f \right) \right] \\ & \otimes \left[ \mathcal{F}\{U_0(x_0 + \delta x_0, y_0)\} P_{up} \left( -\frac{d_i}{f} x_f, -\frac{d_i}{f} y_f \right) \right]. \end{aligned} \quad (5b)$$

式中  $\otimes$  表示卷积运算, 由  $P_{up}$  与其自身的卷积可得到其频谱分布, 仍然用作图法可得如图 2 中的上半圆, 其半径为  $2r$ 。第七项与第五项区别仅在于  $U_0$  又被附加的变形所影响, 其频谱分布仍由上半光瞳函数自身卷积决定。另外两项的计算表明, 相应于第六、八项的频谱分布如图 2 中半径为  $2r$  的下半个圆中。

具体分析了式 (3) 各项的频谱分布之后, 可以看出 (3) 式中包含三维变形信息  $\delta$  的最后两项与第五、六两项分布在同一区域, 而前四项则分布在包含于上述区域中的一个类椭圆的区域之中。这四项只包含了面内位移的信息, 其滤波输出会成为散斑场形式的噪声背景, 因此为了消除这四项的干扰, 提取  $\delta$  信息的滤波孔径必需开在不包含类椭圆的频谱区域, 即外面的月牙形区域中。

#### 四、剪切散斑图的滤波输出

剪切散斑图都使用相干光系统滤波, 为了方便, 我们采取如图 3 所示的典型  $4f$  系统, 其中滤波器为对称双孔, 置于上述月牙形区域内。取圆孔也是便于数学描述, 实际上滤波孔可扩展为整个类月牙区域。对称双孔的光瞳函数可写如:

$$\begin{aligned} P(x_f, y_f) = & P_h(x_f, y_f) + P_h(x_f, y_f) \\ P_h(x_f, y_f) = & \left. \begin{cases} 1 & \sqrt{(x_f - x_{f_0})^2 + y_f^2} \leq \frac{D_f}{2} \\ 0 & \text{其他,} \end{cases} \right\} \\ P_h(x_f, y_f) = & \left. \begin{cases} 1 & \sqrt{(x_f + x_{f_0})^2 + y_f^2} \leq \frac{D_f}{2} \\ 0 & \text{其他。} \end{cases} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

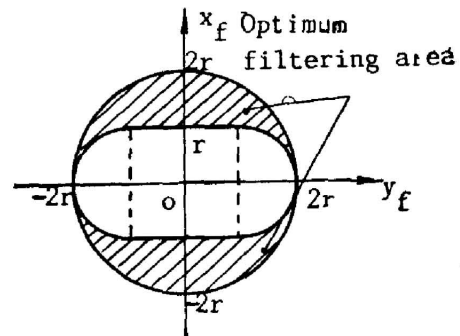


Fig. 2 Spectrum distribution of shearing specklegram

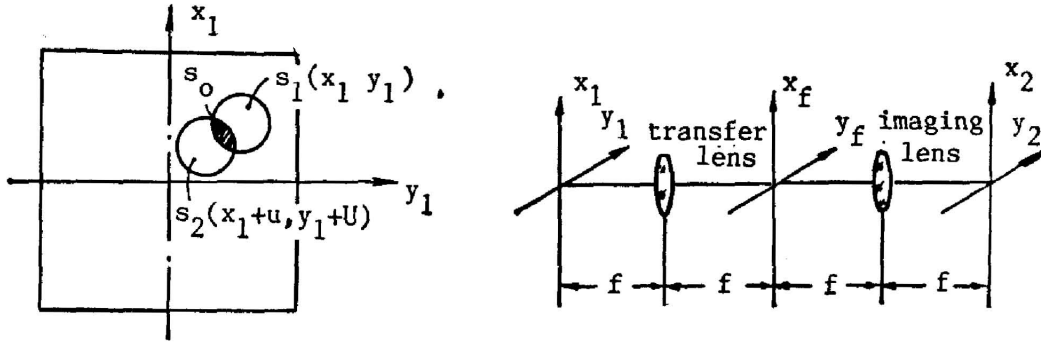


Fig. 3 4f Optical filtering system

式中  $D_f$  为孔的直径,  $(x_{f0}, 0)$  及  $(-x_{f0}, 0)$  分别为上、下两孔的中心坐标, 相应的脉冲响应函数则可近似为下列圆域函数(艾里斑)。

$$h_{f_1}(x_1, y_1) = \begin{cases} \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda f} x_1 x_{f_0}\right) & \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \leq 0.61 \frac{\lambda f}{D_f/2} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (7)$$

$$h_{f_2}(x_1, y_1) = h_{f_1}^*(x_1, y_1)。$$

因为双孔均处于(6)式前四项的类椭圆形频谱区域之外, 滤波之后只有(6)式中后四项参与成象, 而且由于第五、七项的谱只分布在上半圆, 只有上面的单孔对这两项起滤波作用, 反之, 下半孔只对第六、八两项起滤波作用, 从而得到:

$$g(x_2, y_2) = g_1(x_2, y_2) + g_2(x_2, y_2), \quad (8)$$

$$\text{其中 } g_1(x_2, y_2) = \left[ b(x_1, y_1) + b(x_1 + u_1, y_1 + v_1) \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right) \right] \otimes h_{f_1}(x_1, y_1),$$

$$g_2(x_2, y_2) = \left[ b^*(x_1, y_1) + b^*(x_1 + u_1, y_1 + v_1) \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right) \right] \otimes h_{f_2}(x_1, y_1)。$$

$(x_1, y_1)$  与  $(x_2, y_2)$  互为共轭点, 而脉冲响应为圆域函数, 因而卷积为方括号中函数在艾里圆内积分。如果把  $(x_1, y_1)$  及  $(x_1 + u_1, y_1 + v_1)$  为中心的艾里圆之间重叠面积记作  $S_0$ , 而以  $(x_1, y_1)$  为中心的艾里圆剩余面积记作  $S_1$ , 以  $(x_1 + u_1, y_1 + v_1)$  为中心的艾里圆剩余面积记作  $S_2$ <sup>[9]</sup>, 则上述积分可改写为:

$$g_1(x_2, y_2) = g_{10}(x_2, y_2) + g_{11}(x_2, y_2) + g_{12}(x_2, y_2), \quad (9a)$$

其中

$$g_{10}(x_2, y_2) = \left\{ 1 + \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right) \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda f} x_{f_0} u_1\right) \right\}$$

$$\times \iint_{S_0} b(x_1, y_1) \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda f} x_1 x_{f_0}\right) dx_1 dy_1,$$

$$g_{11}(x_2, y_2) = \iint_{S_1} b(x_1, y_1) \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda f} x_1 x_{f_0}\right) dx_1 dy_1,$$

$$g_{12}(x_2, y_2) = \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right) \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda f} x_{f_0} u_1\right)$$

$$\times \iint_{S_2} b(x_1, y_1) \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda f} x_1 x_{f_0}\right) dx_1 dy_1。$$

相应:

$$g_2(x_2, y_2) = g_1^*(x_2, y_2) \quad (9b)$$

由(8)、(9)两式看出, 输出面上的光扰动是六个高斯型随机变量之和, 也是一个高斯型随机变量。同时作为空间坐标 $(x_2, y_2)$ 的函数, 物面照明均匀时, 在一定范围内能够看作具有各态历经性的平稳过程, 其统计平均与空间平均相等。可以利用统计平均来计算空间平均, 即实际观察亮度, 这个统计平均为:

$$\begin{aligned} I_g(x_2, y_2) &= \langle |g_1(x_2, y_2) + g_2(x_2, y_2)|^2 \rangle \\ &= \langle |g_{10} + g_{20}|^2 \rangle + \langle |g_{11} + g_{21}|^2 \rangle + \langle |g_{12} + g_{22}|^2 \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

$\langle \rangle$ 表示统计平均, 式中略去了其余的交叉项, 是因为来自不同积分区域相互不相关的交叉项统计平均值为零。进一步计算表明, (10)式中的三个统计平均值分别为:

$$\langle |g_{10} + g_{20}|^2 \rangle = 4K \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( \delta - \frac{x_{f_0}}{f} u_1 \right) \right] S_0, \quad (11a)$$

$$\langle |g_{11} + g_{21}|^2 \rangle = 2K S_1, \quad (11b)$$

$$\langle |g_{12} + g_{22}|^2 \rangle = 2K S_2. \quad (11c)$$

最终输出光强的区域空间平均值为:

$$\begin{aligned} I_g(x_2, y_2) &= 2K \left\{ S_1 + S_2 + 2S \cdot \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( \delta - \frac{x_{f_0}}{f} u_1 \right) \right] \right\} \\ &= 4KS \left\{ 1 + \frac{S_0}{S} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \left( \delta - \frac{x_{f_0}}{f} u_1 \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $S = S_0 + S_1 + S_2 + S_0$  为艾里斑总面积。

(12)式说明, 影响余弦条纹分布的不仅有相对相位差  $\delta$ , 而且还有面内位移量及滤波系统参数  $x_{f_0}$ 、 $f$ 。一般讲  $f$  大于  $x_{f_0}$  一个数量级, 因而  $u_1$  只要小于十倍波长, 对干涉图的影响就小于一个条纹。例如在 Y.Y.Hung 的实验中不会观察到面内位移的影响, 但如存在刚体转动,  $u_1$  随  $x$  线性变化而转角又足够大就会影响到条件的分布和数量。另一方面(12)式中余弦条纹的调制度  $S_0/S$  反映了其对比度,  $S_0/S$  为零时, 对比度为零, 即当  $\sqrt{u^2 + v^2}$  大于艾里圆直径时, 重叠面积  $S_0$  降为零, 同时就不能再观察到条纹。由此可见面内位移的存在不仅产生附加条纹, 而且降低条纹的对比度, 限制剪切散斑技术的测量范围。最后还要着重指出, 上述结果与 Y.Y.Hung 不同的原因在于: 他对频率型到强度型条纹的转换仅做了定性解释, 本文则从成象的物理过程出发, 建立了严格的数学模型, 因此这种分析应较为可靠。

## 五、实验验证

由上节分析可以看出, 当试件绕  $z$  轴作刚性转动时, 根据(12)式, 两次曝光剪切干涉图经空间滤波会在输出面上产生干涉条纹。但是因为刚体转动产生的位移都是坐标的线性函数, 对应的相对相位差  $\delta$  是常数, 按照 Y.Y.Hung 的分析, 不应有条纹出现。首先选择这样一个纯转动的实验来验证我们的结果, 试件为直径 60 mm 的圆板, 两次曝光间转角为  $0.18^\circ$ ; 拍摄剪切散斑时放大率为 1.5 倍; 两滤波孔间距为 50 mm; 变换透镜焦距为 540 mm。实验结果如图 4 所示, 图中(a)、(b)、(c)所用滤波孔径分别为 5 mm, 8 mm 和 12 mm。

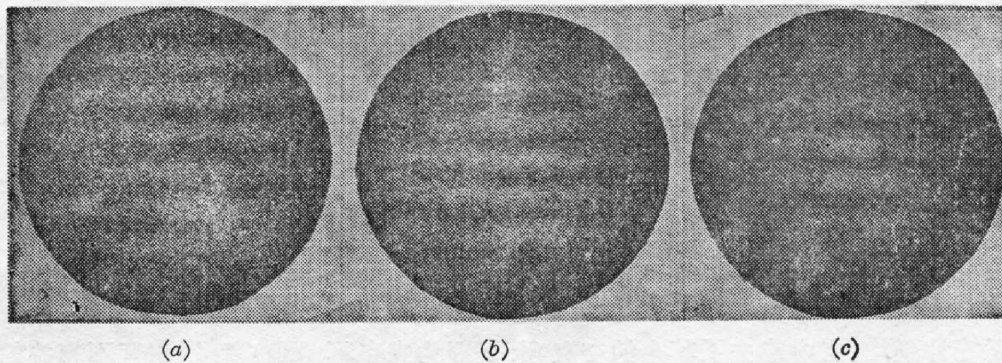


Fig. 4 Fringes caused by rigid body rotation, diameters of the filtering holes  
(a) 5 mm, (b) 8 mm, (c) 12 mm

当孔径为 5 mm 时, 对应的艾里斑直径最大, 因而在整个试件上都有干涉条纹, 随着孔径增大, 艾里斑直径减小, 面内位移量保持不变, 相应重叠面积  $S_0$  减小, 对比度不为零的区域也

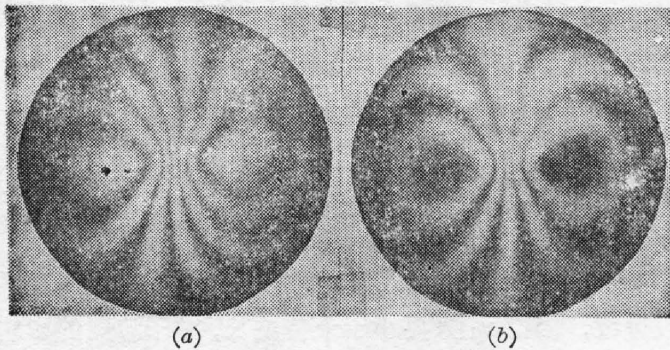


Fig. 5 Fringes caused by 3-D deformation  
(a) loading at center, (b) loading at center with rotation around  $z$ -axis

就减小, 所看到的干涉条纹的区域也减小, 试验结果与上述分析一致。这说明以往的分析在面内位移较大时并不适用。第二个实验在纯转动之上又增加了中心加载所产生的离面位移。图 5(a) 所示为中心加载造成离面位移最大值为  $7 \mu\text{m}$  时, 没有面内位移的结果。这个结果与 Y. Y. Hung 的实验结果相同。这是因为面内位移十分小时, 相当于只

有离面位移的情况。图 5(b) 为同时又施加以  $0.02^\circ$  绕  $z$  轴转动后的结果, 与 (a) 对比可以看出干涉条纹被扭曲, 相当于在图 5(a) 上叠加图 4(a) 的结果。在第三个实验中我们使用了三种不同形状滤波器(如图 6 所示), 相应滤波结果示意图 7。双孔滤波器的输出[图 7(a)]散斑颗粒较大, 是因为滤波孔小所产生二次散斑场较粗, 但因为滤波孔开在类月牙形区域内, 没有无用的噪声背景, 条纹较清晰。高通滤波器输出[图 7(b)]散斑颗粒小, 但条纹不大清晰。因为类似椭圆形的形成噪声的谱分布, 有部分参与了最后成象。第三种类似椭圆的

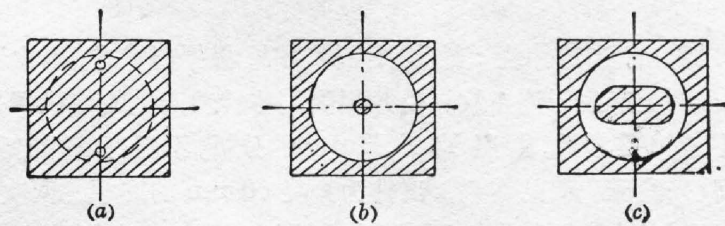


Fig. 6 Three different kinds of filters

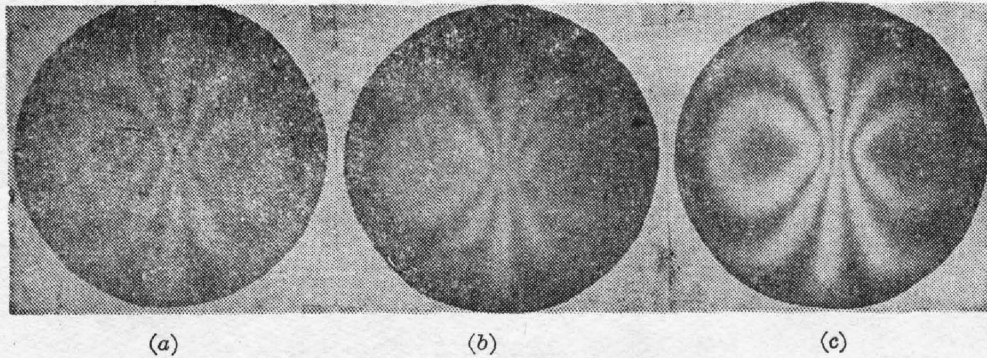


Fig. 7 Output fringe patterns by different filters (loading at center only)

滤波器[图7(c)]的输出,散斑颗粒小而条纹又清晰,这种滤波器是最佳形状,这说明本文关于剪切散斑图的频谱分析是正确的。

## 六、结 论

由以上分析和实验验证可以得出下述结论:

1. 剪切散斑干涉术得到的是余弦型干涉条纹,这种条纹不仅包含着相对相位差,即应变信息,也包含着面内位移信息。一般情况下,两者混合在一起不可分离,只有在面内位移很小,或面内位移近似常数(这种情况会降低条纹对比度)时,才可忽略面内位移影响直接由干涉条纹计算出位移的微分量,从而得到应变变量。

2. 二次曝光剪切散斑图的频谱,可以根据剪切孔径相应脉冲响应函数的共轭性进行准确的分析。在本文讨论的非复合剪切孔径情况下,其频谱的有用成分分布在一个类月牙形区域内。剪切散斑图滤波处理用的最佳滤波器应当与这个区域相一致。

3. 滤波输出的干涉条纹对比度与滤波孔径有关,同时与面内位移大小有关。当不存在面内位移时,滤波器可以选择在类月牙形区域内尽可能大的形状,但是,存在面内位移时,只有控制这一滤波孔径,使其相应艾里圆直径大于面内位移才有可能得到干涉条纹。当然这时能否观察到干涉条纹还要受到二次散斑颗粒大小的限制。一般讲,二次散斑颗粒直径大到干涉条纹间距的三分之一时,将无法辨认,也会限制其测量范围。

## 参 考 文 献

- [1] Y. Y. Hung; *Opt. Eng.*, 1982, **21**, No. 3 (Jun), 391~395.
- [2] J. A. Leendertz, J. N. Butter; *J. Phys. E*, 1973, **6**, No. 11 (Nov), 1107~1110.
- [3] Y. Y. Hung, C. E. Taylor; *Proc. of SPIE*, 1973, **41**, (Aug), 169~173.
- [4] Ke Jingtang *et al.*; «*Speckle Shearing Interferometry and its Application*», (International Conference of Holographic Cata Nondestructive Testing, held in Yugoslavia) 1982.
- [5] Y. Y. Hung, C. E. Taylor; *Experimental Mechanics*, 1974, **14**, No. 7 (Jul), 281~285.
- [6] Y. Y. Hung *et al.*; *Appl. Optics*, 1975, **14**, No. 3 (Mar), 168~622.
- [7] 何毓宁; «*光学学报*», 1985, **5**, No. 3 (Mar), 241~247.
- [8] Q. Fan, J. B. Chen, Y. S. Tang; *Proc. of SPIE*, 1987, **814**, (Aug)
- [9] J. B. Chen, F. P. Chiang; *J. O. S. A. (A)*, 1984, **1**, No. 8 (Aug), 845~849.

## Statistical analysis of shearing speckle interferometry

CHEN JIABI, ZHOU WEIZHENG AND PEI MIN

(*Department of Optical Engineering, Huazhong University of Science and Technology*)

(Received 25 November 1987; revised 5 December 1988)

### Abstract

The imaging process of shearing specklegram, its spectrum distribution and formation of fringes created by whole-field filtering are analysed by means of statistical optics in this paper. We find that the fringe distribution is related not only to the derivation of 3-D displacement but also to the amount of in-plane displacement. Accordingly the factors influencing the quality of fringes are discussed and experimental demonstration is given.

**Key words:** shearing speckle interferometry; spectrum distribution; formation of fringes; statistical analysis.