

双原子系统共振荧光的反聚束效应*

顾 敏 谭维翰

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

本文利用多原子系统的再耦合波函数^[1], 求出双原子系统的二阶相关函数。通过数值计算, 讨论了原子间的受激辐射, 原子的纵横弛豫时间 T_1 、 T_2 和频率失谐等因素对共振荧光反聚束效应的影响。在 $T_1 \gg T_2$ 时, 反聚束效应会减小。

关键词: 共振荧光、二阶相关、反聚束效应。

一、引 言

对于多原子系统 ($N \geq 2$) 的共振荧光已有许多科学家作过理论上的研究^[1~6]。主要是用多原子系统的耦合波函数求解密度矩阵的运动方程。但在处理 N 较大的问题时, 很难导出密度矩阵的运动方程^[2, 3]。为此, 作者用引入一个波函数再耦合的方法^[4], 较容易地求得能量矩阵和密度矩阵的运动方程。在考虑到原子间受激辐射对合作效应的影响之后, 计算了一阶相关函数、即共振荧光谱, 由此可得: 双原子系统的共振荧光谱由五个峰组成。

本文在文献[1]的基础上, 研究双原子系统的二阶相关函数, 即共振荧光的统计特性。主要讨论原子间受激辐射对合作效应的影响和原子的纵、横弛豫时间 T_1 、 T_2 对共振荧光反聚束效应的影响。

二、双原子系统的运动方程

根据文献[1]的波函数再耦合方法, 如果一个多原子系统的耦合波函数为 $|r, m\rangle$, 则利用角动量耦合关系可求出多原子系统的再耦合波函数 $\psi_{R, M} = |R, M\rangle$, 并可获得一个新的密度矩阵 ρ 。对于一个包括原子、外场和热浴的双原子相互作用系统 ($R=2, 1, 0; M=\pm 2, \pm 1, 0$), 在考虑了原子间受激辐射、纵、横弛豫时间和频率失谐等因素之后, 密度矩阵 ρ 满足的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -H'\rho, \\ H' &= \gamma H_1 + igH_2 + i\alpha_s g H_3 + i\Delta\omega H_4, \\ H_1 &= r_I^\dagger r_{\bar{I}} + r_{\bar{II}} r_{II}^\dagger + 2r_{\bar{I}} r_{II}^\dagger, \\ H_2 &= R^+ + R^-, \quad H_4 = R_z, \\ H_3 &= r_{sI}(r_I^\dagger + r_{\bar{I}}) - (r_{II}^\dagger + r_{\bar{II}})r_{sII} + (r_I^\dagger + r_{\bar{I}})r_{sI} - r_{sII}(r_{II}^\dagger + r_{\bar{II}}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

收稿日期: 1987年12月21日; 收到修改稿日期: 1988年9月19日

* 本课题得到中国科学院自然科学基金的资助。

在(1)式中, 2γ 是单原子爱因斯坦系数 A ; $g = \mu E_0$ 为外场 (E_0) 与原子的耦合系数, 等于拉比 (Rabi) 频率 Ω 的一半; μ 是单原子的电偶极矩; α_s 是表示原子间受激辐射大小的系数, 与受激辐射系数和原子密度分布有关; $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_f$ 为频率失谐; r_i^\pm (r_i^\pm) 为双原子系统的合作算符^[2], 而 $R^\pm = r_i^\pm + r_{II}^\pm$, $R_s = r_{sI} + r_{sII}$, 这里的下标 I、II 的意义参见文献[1]。

在 $|R, M\rangle$ 表象中, 密度矩阵 ρ 的投影分量 φ_{RM} 满足下列方程

$$\frac{d\varphi}{dt} = -H\varphi + I, \quad (2)$$

式中 φ 是一个按 $\varphi_{22}, \varphi_{21}, \dots, \varphi_{1,-1}$ 排列的八元列矢量; I 是一个八元列矢量, 即

$$I_i = (\Delta_0/T_1\sqrt{2})\delta_{\tau_i} \quad (i=1, 2, \dots, 8);$$

H 是一个 8×8 的矩阵, 它是算符 H' 在 $|R, M\rangle$ 表象中的矩阵表示, 其元素的表达式已在文献[1]中给出。对(2)式作拉普拉斯(Laplace)变换, 便有

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}(s) &= \mathcal{H}\varphi(t_0) + \frac{1}{s} \mathcal{H}I, \\ \mathcal{H} &= (s+H)^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

将(3)式写成分量形式, 得

$$\tilde{\varphi}_{RM}(s) = \sum_{R'M'} \mathcal{H}_{RM, R'M'}(s) \varphi_{R'M'}(t_0) + \frac{1}{s} \mathcal{H}_{RM, 10}(s) \frac{\Delta_0}{T_1\sqrt{2}}, \quad (4)$$

利用(2)~(4)式, 可求出双原子系统的共振荧光谱, 这便是文献[1]讨论的内容之一。

三、共振荧光的二阶相函数

求解一阶相关函数, 可以给出共振荧光谱分布。如果想进一步了解共振荧光的统计特性, 就必须求出二阶相关函数 $I^{(2)}(\tau) = \langle r^+(t_0)r^+(t_0+\tau)r^-(t_0+\tau)r^-(t_0) \rangle$ 。首先求出单位时间平均值 $\langle r^+(t)r^-(t) \rangle$ 。根据文献[2]的(2.21)式, 有

$$\langle r^+(t)r^-(t) \rangle = \text{Tr}(\rho, r^+, r^-) = 2(\rho_{0,0} + \rho_{1,1}), \quad (5)$$

参照文献[1]的附录(B)式, (5)式可表示为

$$\langle r^+(t)r^-(t) \rangle = \frac{\sqrt{6}}{3} \varphi_{20}(t) + \sqrt{2} \varphi_{10}(t) + 1, \quad (6)$$

式中已假定初始粒子数 $\Delta_0 = -1$ 。对(6)式拉普拉斯变换, 并利用(4)式, 得

$$\begin{aligned} \langle \tilde{r}^+(s)\tilde{r}^-(s) \rangle &= \sum_{RM} \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \mathcal{H}_{20, RM} + \sqrt{2} \mathcal{H}_{10, RM} \right) \varphi_{RM}(t_0) \\ &\quad - \frac{1}{ST\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \mathcal{H}_{20, 10} + \sqrt{2} \mathcal{H}_{10, 10} \right) + \frac{1}{s}, \end{aligned} \quad (7)$$

最后, 由量子回归定理^[2,7], 可获得稳态二阶相函数 $I^{(2)}(\tau)$ 的拉普拉斯变换

$$\begin{aligned} \tilde{I}^{(2)}(s) &= \int_0^\infty d\tau e^{-s\tau} \langle r^+(t_0)r^+(t_0+\tau)r^-(t_0+\tau)r^-(t_0) \rangle \\ &= \sum_{RM} \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \mathcal{H}_{20, RM} + \sqrt{2} \mathcal{H}_{10, RM} \right) \Psi'_{RM}(t_0) \\ &\quad - \frac{1}{T_1S\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \mathcal{H}_{20, RM} + \sqrt{2} \mathcal{H}_{10, 10} \right) \langle r^+(t_0)r^-(t_0) \rangle \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{s}\langle r^+(t_0)r^-(t_0)\rangle, \quad (8)$$

式中 $\Psi'_{RM}(t_0) = r^-\varphi_{RM}(t_0)r^+$, 用文献[1]附录 B 中的方法, 可求得 $\Psi'_{RM}(t_0)$ 为

$$\left. \begin{aligned} \Psi'_{22} &= 2\varphi_{22}, \quad \Psi'_{21} = 2\varphi_{21}, \quad \Psi'_{20} = \frac{5}{3}\varphi_{20} - \frac{\sqrt{3}}{3}\varphi_{10} - \frac{\sqrt{2}}{3}\varphi_{00}, \\ \Psi'_{2-1} &= \varphi_{2-1} - \varphi_{1-1}, \quad \Psi'_{2,-2} = 0, \quad \Psi'_{11} = 2\varphi_{11}, \\ \Psi'_{10} &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\varphi_{20} + \varphi_{10} - \frac{2}{\sqrt{6}}\varphi_{00}, \quad \Psi'_{1-1} = -\varphi_{21} + \varphi_{11}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中 $\varphi_{RM}(t_0)$ 可根据 $(d\varphi/dt) = 0$ 的条件, 求出它们的稳态解。在对 (8) 式作逆拉普拉斯变换之前, 先对它作两点讨论。

1. 单原子情况

参照文献[1]的附录 A, (6) 和 (7) 式可写为

$$\langle r^+(t)r^-(t)\rangle = (1+\Delta), \quad (10)$$

$$\langle \tilde{r}^+(s)\tilde{r}^-(s)\rangle = (s^{-1} + \tilde{\Delta}), \quad (11)$$

利用量子回归定理, 可以求得单原子系统的二阶相关函数的拉普拉斯变换为

$$\tilde{I}^{(2)}(s) = \frac{2\beta^4}{2\beta + (1/4)} \frac{1}{s\{(s+1)[s+(1/2)] + 4\beta^2\}}, \quad (12)$$

对它作逆拉普拉斯变换, 便是文献[2]中 (2.26) 式表示的单原子系统的二阶相关函数。

2. 稳态相关函数

由 (8) 式可求得 $t \rightarrow \infty$ 时的二阶相关函数 $I^{(2)}(\infty)$ 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I^{(2)}(t_0) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{I}^{(2)}(s) = \langle r^+r^- \rangle^2, \quad (13)$$

即是文献[2]的 (2.29) 式。一般的二阶相关函数 $I^{(2)}(\tau)$, 应通过逆拉普拉斯变换求得, 即

$$I^{(2)}(\tau) = \int_0^\infty \tilde{I}^{(2)}(s)e^{s\tau}ds. \quad (14)$$

然而, 这一积分主要涉及到对 $\int e^{s\tau} \mathcal{H}_{20, RM} ds$ 和对 $\int e^{s\tau} \mathcal{H}_{10, RM} ds$ 的积分。一般来说, 难以给出这些积分的解析解。由于包括大量的逆矩阵计算, 即使使用数值计算也是非常复杂的。为此, 我们采用文献[2]的求留数方法。这样, 对矩阵元 $(s+H)_{RM, R'M'}^{-1}$ 和 $[s^{-1}(s+H)_{RM, R'M'}^{-1}]$ 的计算, 可化为相应的代数余子式和行列式的比。以 $(s+H)^{-1}$ 为例, 如 $s_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 是它的极点, 则有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{s\tau}(s+H)_{RM, R'M'}^{-1} ds &= \sum_{i=1}^8 \text{Residue}[e^{s\tau}(s_i+H)_{RM, R'M'}^{-1}] \\ &= \sum_{i=1}^8 e^{s_i\tau} \frac{\text{Cofactor}(s_i+H)_{RM, R'M'}}{\prod_{j \neq i} (s_i - s_j)}, \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $\text{Cofactor}(s_i+H)_{RM, R'M'}$ 是矩阵 $(s+H)^{-1}$ 的代数余子式。同样, 对 $[s^{-1}(s+H)^{-1}]$ 的积分可化为

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{s\tau}s^{-1}(s+H)_{RM, R'M'}^{-1} ds \\ = \sum_{i=1}^8 e^{s_i\tau} \frac{\text{Cofactor}(s_i+H)_{RM, R'M'}}{s_i \prod_{j \neq i} (s_i - s_j)} + \frac{\text{Cofactor}H_{RM, R'M'}}{\prod_{j=1}^8 s_j}, \end{aligned} \quad (16)$$

这样,由(8)、(14)~(16)式,可求得二阶相关函数为

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(2)}(\tau) = & \sum_{RM} \left\{ \sum_{i=1}^s e^{s_i \tau} \frac{1}{\prod_{j \neq i} (s_i - s_j)} \left[\frac{\sqrt{6}}{3} \text{Cofactor}(s_i + H)_{RM, 20} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sqrt{2} \text{Cofactor}(s_i + H)_{RM, 10} \right] \right\} \Psi'_{RM}(t_0) \\
 & - \sum_{i=1}^s e^{s_i \tau} \frac{1}{\sqrt{2} s_i \prod_{j \neq i} (s_i - s_j) T_1} \left[\frac{\sqrt{6}}{3} \text{Cofactor}(s_i + H)_{10, 20} \right. \\
 & \left. + \sqrt{2} \text{Cofactor}(s_i + H)_{10, 10} \right] \langle r^+(t_0) r^-(t_0) \rangle \\
 & - \frac{1}{\sqrt{2} \prod_{j=1}^s s_j} \left[\frac{\sqrt{6}}{3} \text{Cofactor} H_{10, 20} + \sqrt{2} \text{Cofactor} H_{10, 10} \right] \\
 & \times \langle r^+(t_0) r^-(t_0) \rangle + \frac{\sqrt{6}}{3} \varphi_{20}(t_0) + \sqrt{2} \varphi_{10}(t_0) + 1. \quad (17)
 \end{aligned}$$

四、数值计算和讨论

为了对(17)式作数值计算,采用下列归一化方案

$$\left. \begin{aligned}
 t & \rightarrow t/(2/T_2), \quad H \rightarrow H/(2/T_2), \quad \alpha = \alpha_0 g/(2/T_2), \\
 \beta & \rightarrow g/(2/T_2), \quad \Delta\omega \rightarrow \Delta\omega/(2/T_2), \quad T' = T_2/2\pi\omega.
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

并且 $\Gamma^{(2)}(\tau)$ 用 $\Gamma^{(2)}(\infty)$ 归一化, 即 $\nu^{(2)}(\tau) = \Gamma^{(2)}(\tau)/\Gamma^{(2)}(\infty)$ 。在 B6935 机上数值计算所得的主要结果置于图 1~4 中。为检验程序的正确性, 算出当 $\alpha=0$, $\beta=1$, $T'=1$ 的二阶相关函数, 其结果与文献[2]的图 10 一致。

1. $\Delta\omega=0$ (共振情况)

参数 $|\alpha|$ 的增大, 使二阶相关函数的振荡频率增加。在 $T'=1$ (即 $T_2=2T_1$, 图 1) 时, 如中等强度场作用于双原子系统时, 则二阶相关函数随 τ 的增加而振荡^[2]。在 $\tau=0$, $|\alpha|=0$ 时, $\nu^{(2)}(0)=0.69$, 即由于多原子系统的合作效应使光子反聚束效应变小。如 $|\alpha| \neq 0$, 即增强原子间的受激辐射, 则 $\nu^{(2)}(0)=0.48$, 这表明反聚束效应变强。可以理解这个现象; 由于原子间存在受激吸收, 一个原子自发辐射的光子可能被另一个原子吸收, 对整个系统来说, 发

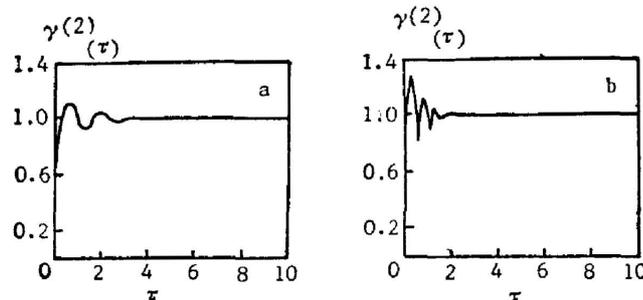


Fig. 1 The normalized correlation function $\gamma^{(2)}(\tau)$ in the case of $T_2/2T_1=1$ and $\beta=2.5$. (a) $\alpha=0$, (b) $\alpha=-2$

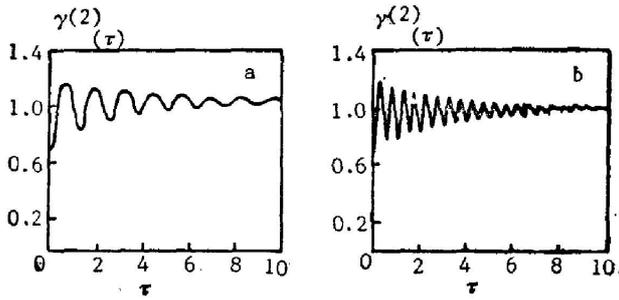


Fig. 2 The normalized correlation function $\gamma^{(2)}(\tau)$ in the case of $T_2/T_1=5 \times 10^{-7}$ and $\beta=2.5$.
(a) $\alpha=0$, (b) $\alpha=-2$

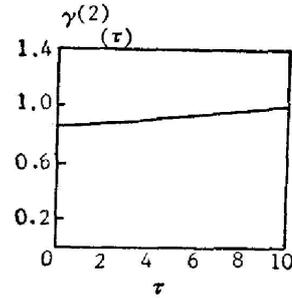


Fig. 3 The normalized correlation function $\gamma^{(2)}(\tau)$ in the case of $\alpha=-0.02$, $\beta=0.05$ and $T_2/T_1=5 \times 10^{-7}$

射光子的时间间隔变长, 因此表示两个光子同时到达观察点($\tau=0$)的几率(二阶相关函数)变小, 即反聚束效应变强。而在 $T_2 \ll T_1$ ($T_2=5 \times 10^{-7}$ 图 2)时, $|\alpha|$ 的增加对光子反聚束效应的影响不大 ($|\alpha|=0$, $\nu^{(2)}(0)=0.71$; $|\alpha|=2$, $\nu^{(2)}(0)=0.75$)。于纵向弛豫时间 T_1 较大, 则吸收几率较小, 因此当 $|\alpha|$ 增大产生较多光子时, 其效果与增加原子数 N 类似, 只能使反聚束效应减小。此外 T_1 增大, 使 $\nu^{(2)}(\tau)$ 的包络随 τ 的变化趋向缓慢。

比较图 1 和图 2, 可以发现, 固定 $|\alpha|$ 值, 当 T_1 增大时, 会使 $\nu^{(2)}(0)$ 的值变大, 即反聚束效应变小。这表示合作效应较强, 故共振荧光谱是一个可观察的多峰光谱^[1], 但这种光子的强度相关较大。

在弱场作用下, 荧光谱出现在一个凹陷^[1]。图 3 的曲线表明这种荧光有不大的反聚束。

2. $\Delta\omega \neq 0$ (非共振情况)

当 $\Delta\omega$ 增大时, 荧光谱的二阶相关函数与共振情形的图 1(b)、图 2(b) 相比, 差别不大。

本文部分工作是在意大利国际理论物理中心(IOTP)的计算机房完成的, 在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Tan Weihan, Gu Min; *Phys. Rev. (A)*, 1986, **34**, No. 5(Nov), 4070.
- [2] G. S. Agarwal, A. C. Brown, L. M. Narducci, G. Vetri; *Phys. Rev. (A)*, 1977, **15**, No. 4(Apr), 1613.
- [3] G. S. Agarwal, R. Saxena, L. M. Narducci, D. H. Feng, R. Gilmore; *Phys. Rev. (A)*, 1980, **21**, No. 1 (Jan), 257.
- [4] I. R. Senitzky; *Phys. Rev. (A)*, 1972, **6**, No. 3 (Sep), 1171.
- [5] I. R. Senitzky; *Phys. Rev. Lett.*, 1978, **40**, No. 20(May), 1334.
- [6] G. S. Agarwal, L. M. Narducci, E. Apostolidis; *Opt. Commun.*, 1981, **36**, No. 4 (Feb), 285.
- [7] M. Lax; *Phys. Rev.*, 1968, **172**, No. 2(Aug), 350.

Antibunching effect of resonance fluorescence in a two-atom system

GU MIN AND TAN WEIHAN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 21 December 1987; revised 19 September 1988)

Abstract

By using the recoupled wave functions in a two-atom system^[1], the second order correlation functions of a two-atom system are solved in this paper. And the influences of the stimulated emission between atoms, the transverse and longitudinal relaxations, and the frequency detuning on the photon antibunching are numerically discussed. If $T_1 \gg T_2$, then the antibunching will be reduced.

Key words: resonance fluorescence; the second-order correlation; antibunching effect.