

矩形槽光栅的矢量模式理论*

杨宝成 庄松林
(上海光学仪器研究所)

周学松
(上海微波技术研究所)

提 要

本文引进满足均匀矢量 Helmholtz 方程的矢量波函数作为基矢, 对矩形槽光栅的槽内和槽外的光场分别进行矢量平面波展开和矢量模式展开, 并由耦合条件导出了求解展开系数的方程组, 可进行数值计算。该方法可研究入射场的方向和偏振任意时的衍射效率、偏振特性变化等问题。在 p 偏振和 s 偏振的特殊情况下所得到的公式与用标量模式理论得到的结果一致。

关键词: 矩形槽光栅; 矢量模式。

一、引 言

由于矩形槽光栅的结构易于理论分析, 人们对其衍射问题进行了广泛研究^[1~3]。这些工作都是求解标量 Helmholtz 方程, 孤立地分析 p 偏振和 s 偏振的光场衍射问题(p 偏振和 s 偏振分别是指入射场的电矢量和磁矢量与入射平面垂直, 而入射平面则垂直于光栅的槽向)。其不足处为: 首先, 光场应遵从矢量 Helmholtz 方程; 其次, 在处理入射方向和偏振状态任意的入射场时, 该方法显得麻烦和牵强。

对均匀的矢量 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{F} = 0, \quad (1)$$

可从均匀的标量 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0 \quad (2)$$

的解(称生成函数)出发, 选择适当的常矢量 \mathbf{p} (称领示矢量), 就能组成如下满足(1)式的相互正交的矢量波函数^[4~6]:

$$\mathbf{L} = \nabla\psi; \quad \mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{p}\psi); \quad \mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}. \quad (3)$$

如得到一组完备的标量基 $\{\psi_n\}$, 由它们生成的集 $\{\mathbf{L}_n, \mathbf{M}_n, \mathbf{N}_n\}$ 就是一组完备的矢量基, (1)式的任意解可用它们展开, 对于无源问题, 仅以 $\{\mathbf{M}_n, \mathbf{N}_n\}$ 作为基函数就

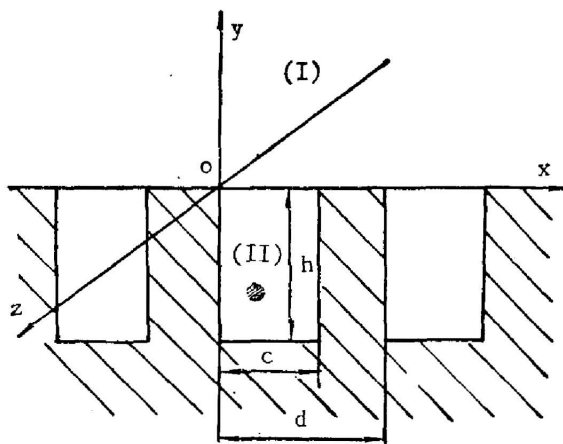


Fig. 1 The model of the grating

收稿日期: 1987年12月14日; 收到修改稿日期: 1988年5月12日

* 国家自然科学基金资助的课题。

已足够。

本文就用上述方法来处理理想导体矩形槽光栅的衍射问题。其模型如图 1 示。 $x-z$ 平面是光栅平面, z 轴与槽向平行, 在 x 方向是一无限周期结构, 其周期为 d , 槽宽 c , 深度 h 。整个光场分成两个场区, (I) 区为光栅平面以上的区域, (II) 区是光栅槽内的区域。

二、矢量 ON 基函数

由于所考虑的衍射问题是无源问题, 所以可不考虑 L 。在 (I) 区, 生成函数为平面波函数

$$\psi^{(I)} = \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)]。 \quad (4)$$

取领示矢量为单位矢量 \mathbf{y} , 可得该区域的矢量基表式:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_n = (k_{xn}^2 + k_{zn}^2)^{-1/2} i \hat{\mathbf{y}} (-\mathbf{x} k_{zn} + \mathbf{z} k_{xn}) \exp[i(k_{xn} x + k_{yn} y + k_{zn} z)], \\ \mathbf{N}_n = [k_{xn}^2 + k_{zn}^2] k^2)^{-1/2} [-\mathbf{x} k_{xn} k_{yn} + \mathbf{y} (k_{xn}^2 + k_{zn}^2) - \mathbf{z} k_{yn} k_{zn}] \exp[i(k_{xn} x + k_{yn} y + k_{zn} z)]. \end{cases} \quad (5)$$

式中 \mathbf{x} 、 \mathbf{y} 、 \mathbf{z} 都是单位矢量, n 是基矢的标号, 当它变化时, k_{xn} , k_{yn} 和 k_{zn} 可取遍可能值(视实际场的情况可以是分立的, 亦可连续的)。附录中说明了各基矢前乘上一个系数 $(k_{xn}^2 + k_{zn}^2)^{-1/2}$ 的理由。

(II) 区是有界的, 电场的矢量基在边界上应满足 Dirichlet 条件:

$$\mathbf{n} \times \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^{(II)} \\ \mathbf{N}^{(II)} \end{Bmatrix} \Big|_{\substack{x=0, c \\ y=-h}} = 0。 \quad (6)$$

\mathbf{n} 为界面的法向单位矢量; 磁场的矢量基在边界上应满足 Neumann 条件:

$$\mathbf{n} \times \nabla \times \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^{(II)'} \\ \mathbf{N}^{(II)'} \end{Bmatrix} \Big|_{\substack{x=0, c \\ y=-h}} = 0。 \quad (7)$$

仍取 \mathbf{y} 为领示矢量, 则相应的生成函数组为

$$\begin{cases} \psi_{eom}^{(II)} = \cos \frac{m\pi x}{c} \frac{\sin[\mu_m(y+h)]}{\mu_m} \exp(i k_z z) & m=0, 1, 2, \dots, \\ \psi_{ocw}^{(II)} = \sin \frac{m\pi x}{c} \cos[\mu_m(y+h)] \exp(i k_z z) & m=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (8)$$

式中前两个下标分别表示函数对 x 和 y 的奇偶性, μ_m 是正的实数或虚数, $\mu_m^2 = k^2 - \left(\frac{m\pi}{c}\right)^2 - k_z^2$ 。第一式分母上的因子 μ_m 是为了当 $\mu_m=0$ 时, 该表示的极限仍为有意义的生成函数。虽然使两表式失去了对称性, 但正如后面可看到那样, 这对求解衍射波的振幅没有影响。由生成函数可得满足 (6) 和 (7) 式的矢量基函数组分别为:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{eom} + \left[k_z^2 + \left(\frac{m\pi}{c}\right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ -\mathbf{x} i k_z \cos \frac{m\pi x}{c} \frac{\sin[\mu_m(y+h)]}{\mu_m} \right. \\ \quad \left. - \mathbf{z} \frac{m\pi}{c} \sin \frac{m\pi x}{c} \frac{\sin[\mu_m(y+h)]}{\mu_m} \right\} \exp(i k_z z), \\ \mathbf{N}_{ocw} = \left\{ k^2 \left[k_z^2 + \left(\frac{m\pi}{c}\right)^2 \right] \right\}^{-1/2} \left\{ -\mathbf{x} \frac{m\pi}{c} \mu_m \cos \frac{m\pi x}{c} \sin[\mu_m(y+h)] \right. \\ \quad \left. + \mathbf{y} \left[k_z^2 + \left(\frac{m\pi}{c}\right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{c} \cos[\mu_m(y+h)] \right. \\ \quad \left. - \mathbf{z} i k_z \mu_m \sin \frac{m\pi x}{c} \sin[\mu_m(y+h)] \right\} \exp(i k_z z)。 \end{cases} \quad (9)$$

和

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{M}_{oem} &= \left[k_z^2 + \left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ -x \dot{i} k_x \sin \frac{m\pi x}{c} \cos [\mu_m (y+h)] \right. \\ &\quad \left. + z \frac{m\pi}{c} \cos \frac{m\pi x}{c} \cos [\mu_m (y+h)] \right\} \exp(\dot{i} k_x z), \\ \mathbf{N}_{eom} &= \left\{ k^2 \left[k_z^2 + \left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 \right] \right\}^{-1/2} \left\{ -x \frac{m\pi}{c} \sin \frac{m\pi x}{c} \cos [\mu_m (y+h)] \right. \\ &\quad \left. + y \left[k_z^2 + \left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 \right] \cos \frac{m\pi x}{c} \frac{\sin [\mu_m (y+h)]}{\mu_m} \right. \\ &\quad \left. + z \dot{i} k_x \cos \frac{m\pi x}{c} \cos [\mu_m (y+h)] \right\} \exp(\dot{i} k_x z). \end{aligned} \right. \quad (10)$$

正如应预料的那样, (II) 区的基函数与光栅周期 d 无关, 只依赖于槽宽 c 。此外, 无论是(I)区或(II)区, 下标相同的一对矢量基函数 \mathbf{M} 和 \mathbf{N} 总满足关系:

$$\nabla \times \mathbf{M} = k\mathbf{N}; \nabla \times \mathbf{N} = k\mathbf{M}. \quad (11)$$

三、光场的矢量基函数展开

取入射光波为矢量平面波, 其电场矢量为:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{I} \exp[\dot{i}(k_x x - k_y y + k_z z)]. \quad (12)$$

式中 k_y 是正实数, \mathbf{I} 是偏振单位矢量, 为简单计已把振幅取为 1。 \mathbf{e}_i 可用(I)区的一对基矢 \mathbf{M}_i 和 \mathbf{N}_i 展开:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= A_i \mathbf{M}_i + \dot{i} B_i \mathbf{N}_i = A_i (k_x^2 + k_z^2)^{-1/2} \dot{i} (-x k_x + z k_z) \exp[\dot{i}(k_x x - k_y y + k_z z)] \\ &\quad + \dot{i} B_i [k^2 (k_x^2 + k_z^2)]^{-1/2} [x k_x k_y + y (k_x^2 + k_z^2) + z k_y k_z] \exp[\dot{i}(k_x x - k_y y + k_z z)]. \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $A_i = \mathbf{M}_i^* \cdot \mathbf{e}_i$, $B_i = -\dot{i} \mathbf{N}_i^* \cdot \mathbf{e}_i$ 。由于场在 x 方向上应满足周期性条件, 故第 n 级衍射波可用一组 $(\mathbf{M}_n, \mathbf{N}_n)$ 来展开, 其表式与(5)式同, 只是现在 $k_{en} = k_x + \frac{2n\pi}{d}$, ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), k_{yn} 是正的实数或虚数, $k_{zn}^2 = k^2 - k_{en}^2 - k_{yn}^2$ 。

于是(I)区的光场可表示为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{(I)} \\ \mathbf{H}^{(I)} \end{bmatrix} &= A_i \begin{bmatrix} \mathbf{M}_i \\ -\dot{i} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{N}_i \end{bmatrix} + B_i \begin{bmatrix} \dot{i} \mathbf{N}_i \\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{M}_i \end{bmatrix} \\ &\quad + \sum_n \left\{ A_n \begin{bmatrix} \mathbf{M}_n \\ -\dot{i} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{N}_n \end{bmatrix} + B_n \begin{bmatrix} \dot{i} \mathbf{N}_n \\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{M}_n \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

类似地, (II) 区的场可用矢量模式(9)和(10)展开, 表为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{(II)} \\ \mathbf{H}^{(II)} \end{bmatrix} = \sum_m \left\{ a_m \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{eom} \\ -\dot{i} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{N}_{eom} \end{bmatrix} + b_m \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{oem} \\ -\dot{i} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{M}_{oem} \end{bmatrix} \right\}. \quad (15)$$

应注意式中 a_m 的角标 m 是从 0 开始的, 而 b_m 的角标 m 是从 1 开始的。

四、振幅方程

在光栅平面上($y=0$), (I) 区的场和(II)区的场应满足:

$$\begin{cases} \mathbf{y} \times \mathbf{E}^{(I)}|_{y=0} = \begin{cases} \mathbf{y} \times \mathbf{E}^{(II)}|_{y=0} = 0 & 0 < x \leq c \\ 0 & c < x \leq d \end{cases} \\ \mathbf{y} \times \mathbf{H}^{(I)}|_{y=0} = \mathbf{y} \times \mathbf{H}^{(II)}|_{y=0} & 0 < x \leq c. \end{cases} \quad (16)$$

把(14)、(15)式代入(16)式,利用表式(5)、(9)和(10)进行一些变换,就可得到计算振幅 A_m 、 B_m 和 a_m 、 b_m 的方程组,它们可以用超矩阵形式表示:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{(1)} & v^{(1)} \\ u^{(2)} & v^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi(-A_i) \\ \pi(B_i) \end{bmatrix}, \quad (17a)$$

$$\begin{bmatrix} \xi^{(1)} & \eta^{(1)} \\ \xi^{(2)} & \eta^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}^{(1)} \\ \mathbf{W}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (17b)$$

式中列向量 $\tilde{\mathbf{A}} = (\dots A_{-n}, \dots, A_{-1}, A_0, A_1, \dots, A_n, \dots)$ 、 $\tilde{\mathbf{B}} = (\dots, B_{-n}, \dots, B_{-1}, B_0, B_1, \dots, B_n, \dots)$ 、 $\tilde{\mathbf{a}} = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ 、 $\tilde{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ 、 $\tilde{\pi}(x) = (x\delta_{0n}, x\delta_{0n}, \dots)$ 。 $U^{(i)}$ 、 $V^{(i)}$ 、 $\xi^{(i)}$ 、 $\eta^{(i)}$ 都是无限维矩阵,而 $W^{(i)}$ 是无限维列向量,其具体表示式为:

$$\begin{cases} u_{mn}^{(1)} = \frac{\left[k_z^2 J_{mn} + i \frac{m\pi}{c} k_{zn} I_{mn} \right]}{\sqrt{k_{zn}^2 + k_z^2} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 + k_z^2}} \frac{\sin(\mu_m h)}{d\mu_m}, \\ u_{nm}^{(2)} = \frac{\left[k_{zn} J_{mn} - i \frac{m\pi}{c} I_{mn} \right]}{\sqrt{k_{zn}^2 + k_z^2} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 + k_z^2}} \frac{k k_z \sin(\mu_m h)}{d k_{yn} \mu_m}, \\ V_{nm}^{(1)} = - \frac{\left[i \frac{m\pi}{c} J_{mn} + k_{zn} I_{mn} \right]}{\sqrt{k_{zn}^2 + k_z^2} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 + k_z^2}} \frac{k_z \mu_m \sin(\mu_m h)}{d k_y}, \\ V_{nm}^{(2)} = - \frac{\left[i \frac{m\pi}{c} k_{zn} J_{mn} - k_z^2 I_{mn} \right]}{\sqrt{k_{zn}^2 + k_z^2} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 + k_z^2}} \frac{\mu_m \sin(\mu_m h)}{d k_{yn}}. \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \xi_{nl}^{(1)} = \sum_n \left(\frac{k_{zn} k_{yn}}{k} U_{nl}^{(1)} - k_z U_{nl}^{(2)} \right) \frac{I_{mn}^*}{\sqrt{k_{zn}^2 + k_z^2}} - \delta_{ml} \frac{l\pi \cos(\mu_l h)}{2k \sqrt{\left(\frac{l\pi}{c} \right)^2 + k_z^2}}, \\ \xi_{nl}^{(2)} = \sum_n \left(\frac{k_{zn} k_z}{k} U_{nl}^{(1)} + k_{zn} U_{nl}^{(2)} \right) \frac{J_{mn}^*}{\sqrt{k_{zn}^2 + k_z^2}} + \delta_{ml} \frac{i k_z c (1 + \delta_{0l}) \cos(\mu_l h)}{2k \sqrt{\left(\frac{l\pi}{c} \right)^2 + k_z^2}}, \\ \eta_{nl}^{(1)} = \sum_n \left(\frac{k_{zn} k_{yn}}{k} V_{nl}^{(1)} - k_z V_{nl}^{(2)} \right) \frac{I_{mn}^*}{\sqrt{k_{zn}^2 + k_z^2}} - \delta_{ml} \frac{i k_z c \cos(\mu_l h)}{2 \sqrt{\left(\frac{l\pi}{c} \right)^2 + k_z^2}}, \\ \eta_{nl}^{(2)} = \sum_n \left(\frac{k_{yn} k_z}{k} V_{nl}^{(1)} + k_{zn} V_{nl}^{(2)} \right) \frac{J_{mn}^*}{\sqrt{k_{zn}^2 + k_z^2}} + \delta_{ml} \frac{l\pi \cos(\mu_l h)}{2 \sqrt{\left(\frac{l\pi}{c} \right)^2 + k_z^2}}. \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} W_m^{(1)} = 2I_{m0}^* \left(\frac{A k_\sigma k_y}{k \sqrt{k_x^2 + k_z^2}} + \frac{B k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} \right), \\ W_m^{(2)} = 2J_{m0}^* \left(\frac{A k_x k_z}{k \sqrt{k_x^2 + k_z^2}} - \frac{B k_\sigma}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} \right). \end{cases} \quad (20)$$

式中

$$\begin{cases} J_{mn} = \int_0^c \cos\left(\frac{m\pi x}{c}\right) \exp(-ik_{zn}x) dx, \\ I_{mn} = \int_0^c \sin\left(\frac{m\pi x}{c}\right) \exp(-ik_{zn}x) dx. \end{cases} \quad (21)$$

它们满足:

$$\sum_n I_{mn} I_{m'n}^* = \sum_n J_{mn} J_{m'n}^* = \frac{dc}{z} \delta_{mm'}; \quad \sum_n I_{mn} J_{m'n}^* = \sum_n J_{mn} I_{m'n}^* = 0. \quad (22)$$

对(17)式进行数值计算,就可求得各级衍射波的振幅 $\{A_n, B_n\}$,槽内基矢形式上的不对称显然对 $\{A_n, B_n\}$ 的数值结果是没有影响的。

五、衍射效率和偏振

当 k_{yn} 为实数时,第 n 级衍射波是真实传播的衍射光,其效率为:

$$E(n) = (|A_n|^2 + |B_n|^2) k_{yn} / k_y. \quad (23)$$

当 k_{yn} 为虚数时,第 n 级波是消逝波,其效率无实际意义。真实衍射波的总效率应为1。

$$\sum_{n \in R} E(n) = 1. \quad (24)$$

式中 $n \in R$ 表示求和只对 k_{yn} 为实数的级次进行。

复振幅 A_n, B_n 可表示为 $A_n = |A_n| \exp(i\theta_n)$, $B_n = |B_n| \exp(i\phi_n)$,若记 $\delta_n = \phi_n - \theta_n$,则当 $\delta_n = 0$ 或 π 时,第 n 级衍射波是线偏振的,其偏振矢量位于由矢量 $\mathbf{z} = (k_{zn}^2 + k_z^2)^{-1/2}(-\mathbf{x}k_{zn} + \mathbf{z}k_{zn})$ 和 $\mathbf{y} = [k^2(k_{yn}^2 + k_z^2)]^{-1/2}[-\mathbf{x}k_{zn}k_{yn} + \mathbf{y}(k_{zn}^2 + k_z^2) - \mathbf{z}k_{yn}k_z]$ 所决定的平面内,与 \mathbf{y} 的夹角为 χ_n 。

$$\operatorname{tg} \chi_n = \pm |A_n| / |B_n|. \quad (25)$$

式中正负号分别对应于 $\delta_n = 0$ 和 π 。当 $\delta_n = \pm \frac{\pi}{2}$ 时,第 n 级衍射波是右(左)椭圆偏振的, \mathbf{y} 和 \mathbf{z} 为椭圆的两根轴,分别长 $|B_n|$ 和 $|A_n|$;当 δ_n 为其他值时,对应的衍射波也是椭圆偏振的,但这时椭圆的一根轴与 \mathbf{y} 的夹角 χ'_n 。

$$\operatorname{tg} 2\chi'_n = 2|A_n| |B_n| \cos \delta_n / (|B_n|^2 - |A_n|^2). \quad (26)$$

两轴长分别为 α_n 和 β_n 。

$$\begin{cases} \alpha_n = |\sin \delta_n| \left[\frac{\cos^2 \chi'_n}{|B_n|^2} - \frac{2 \cos \delta_n \sin \chi'_n \cos \chi'_n}{|A_n| |B_n|} + \frac{\sin^2 \chi'_n}{|A_n|^2} \right]^{-1/2}, \\ \beta_n = |\sin \delta_n| \left[\frac{\sin^2 \chi'_n}{|B_n|^2} - \frac{2 \cos \delta_n \sin \chi'_n \cos \chi'_n}{|A_n| |B_n|} + \frac{\cos^2 \chi'_n}{|A_n|^2} \right]^{-1/2}. \end{cases} \quad (27)$$

六、特 例

现在特别考虑 $k_z = 0$ 的情形。由(5)、(9)和(10)式可知这时

$$\begin{cases} M_i = \mathbf{z} i \exp[i(k_x x - k_y y)], \\ N_i = k^{-1}(\mathbf{x}k_y + \mathbf{y}k_x) \exp[i(k_x x - k_y y)], \\ M_n = \mathbf{z} i \exp[i(k_{zn} x + k_{yn} y)], \\ N_n = k^{-1}(-\mathbf{x}k_{yn} + \mathbf{y}k_{zn}) \exp[i(k_{zn} x + k_{yn} y)]. \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{eom} = -\mathbf{z} \sin \frac{m\pi x}{c} \frac{\sin[\mu_m(x+h)]}{\mu_m}, & m=1, 2, 3, \dots, \\ \mathbf{N}_{eom} = k^{-1} \left\{ -\mathbf{x} \mu_m \cos \frac{m\pi x}{c} \sin[\mu_m(y+h)] + \mathbf{y} \frac{m\pi}{c} \sin \frac{m\pi x}{c} \cos[\mu_m(y+h)] \right\}, \end{cases} \quad (29)$$

$$m=0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{oem} = \mathbf{z} \cos \frac{m\pi x}{c} \cos[\mu_m(y+h)], & m=0, 1, 2, \dots, \\ \mathbf{N}_{oem} = k^{-1} \left\{ -\mathbf{x} \sin \frac{m\pi x}{c} \cos[\mu_m(y+h)] + \mathbf{y} \frac{m\pi}{c} \cos \frac{m\pi x}{c} \frac{\sin[\mu_m(y+h)]}{\mu_m} \right\}, \end{cases} \quad (30)$$

$$m=1, 2, 3, \dots$$

而振幅方程中各矩阵元简化为:

$$\begin{cases} U_{nm}^{(1)} = \hat{\psi} I_{mn} \frac{\sin(\mu_m h)}{d\mu_m}, \\ V_{nm}^{(2)} = -\hat{\psi} J_{mn} \frac{\mu_m \sin(\mu_m h)}{dk_{yn}}; \quad U_{nm}^{(2)} = V_{nm}^{(1)} = 0. \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \xi_{ml}^{(1)} = \sum_n \hat{\psi} I_{ln} I_{mn}^* \frac{k_{yn}}{k} \frac{\sin(\mu_l h)}{d\mu_l} - \delta_{lm} \frac{c}{2k} \cos(\mu_l h), \\ \eta_{ml}^{(2)} = \sum_n \hat{\psi} J_{ln} J_{mn}^* \frac{\mu_l \sin(\mu_l h)}{dk_{yn}} + \delta_{lm} \frac{c}{2} \cos(\mu_l h); \quad \xi_{ml}^{(2)} = \eta_{ml}^{(1)} = 0. \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} W_m^{(1)} = 2I_{m0}^* A \hat{\psi} \frac{k_y}{b}, \\ W_m^{(2)} = -2J_{m0}^* B_i. \end{cases} \quad (33)$$

于是振幅方程(17)就分离为两个独立的方程组。

$$\begin{cases} \mathbf{A} = U^{(1)} \mathbf{a} - \boldsymbol{\pi}(A_i), \\ \xi^{(1)} \mathbf{a} = \mathbf{W}^{(1)}. \end{cases} \quad (34a)$$

和

$$\begin{cases} \mathbf{B} = V^{(2)} \mathbf{b} + \boldsymbol{\pi}(B_i), \\ \eta^{(2)} \mathbf{b} = \mathbf{W}^{(2)}. \end{cases} \quad (34b)$$

现在 $\tilde{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, $\tilde{\mathbf{b}} = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ 。这一结果是与标量模式理论导出的公式一致的^[2,3], 令 $B_i = 0$ 或 $A_i = 0$ 就是所说的 p 偏振或 s 偏振的情形。

我们用矢量波函数建立了矩形槽光栅的矢量模式理论, 可研究入射方向和偏振任意的平面波的衍射效率、偏振变化等问题, 标量模式理论的 p 偏振和 s 偏振情况是该方法的特殊情形, 由于篇幅原因, 数值计算及结果拟另文讨论。

附录: 有关矢量基函数的补充说明

对任意的领示矢量 \mathbf{p} , 当平面波生成函数 $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ 的波矢 \mathbf{k} 与其平行时, 生成的矢量基 \mathbf{M}, \mathbf{N} 就会成为零矢量;

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \nabla \times [\mathbf{p} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = i(\mathbf{k} \times \mathbf{p}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = 0, \\ \mathbf{N} = k^{-1} \nabla \times \mathbf{M} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

这时应补充非零的基矢以保证完备性, 在本问题中, 当 k_x 和 k_z 全为零时, 可另取 \mathbf{x} 或 \mathbf{z} 作为新领示矢量进行补充。在 (I) 区, 它们生成的矢量基分别为

$$\mathbf{M}^{(x)} = -\mathbf{z} ik \exp(iky), \quad \mathbf{N}^{(x)} = \mathbf{x} k \exp(iky), \quad (\text{A.2})$$

和

$$\mathbf{M}^{(z)} = \mathbf{x} ik \exp(iky), \quad \mathbf{N}^{(z)} = \mathbf{z} k \exp(iky). \quad (\text{A.3})$$

另一方面, 如在(5)式令 k_x 和 k_z 趋于零取极限, 可得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \xrightarrow{k_x \rightarrow 0, k_z \rightarrow 0} -\frac{1}{k} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(x)} \\ \mathbf{N}^{(x)} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

或

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \xrightarrow{k_x \rightarrow 0, k_z \rightarrow 0} -\frac{1}{k} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(z)} \\ \mathbf{N}^{(z)} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

沿其他路径趋于极限时,会得到两组基的各种组合。于是我们规定(5)式的这种极限为 k_x 和 k_z 趋于零时的补充基矢,从而保证了完备性,应注意的是这样做仅是为了数学上的简便。

(II)区的情形也同样处理,例如,当 k_x 和 m 全为零时,由 x 或 z 生成的满足 Dirichlet 边界条件的补充基矢为:

$$\mathbf{M}_0^{(x)}=0, \mathbf{N}_0^{(x)}=xk \sin[k(y+h)], \quad (\text{A.6})$$

或

$$\mathbf{M}_0^{(z)}=-xk \sin[k(y+h)], \mathbf{N}_0^{(z)}=0. \quad (\text{A.7})$$

而容易算出:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{aom} \\ \mathbf{N}_{oem} \end{bmatrix} \xrightarrow{k_x \rightarrow 0, m \rightarrow 0} -\frac{1}{k} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0^{(x)} \\ \mathbf{N}_0^{(x)} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

和

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{eom} \\ \mathbf{N}_{oem} \end{bmatrix} \xrightarrow{m \rightarrow 0, k_x \rightarrow 0} -\frac{i}{k} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0^{(z)} \\ \mathbf{N}_0^{(z)} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

所以也类似采用取极限方法。但由于取了新的基矢,所以生成函数的奇偶性也有变化,故对(A.8)式,相应的系数 a_m 的角标须从1起始,而 b_m 的则从0起始,与按(8)式规定的相反。

参 考 文 献

- [1] R. Petit; *«Electromagnetic Theory of Gratings»*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1980), 26~30.
- [2] J. R. Andrewartha, J. R. Fox *et al.*; *Optica Acta*, 1979, **26**, No. 1 (Jan), 69~89.
- [3] J. R. Andrewartha, J. R. Fox *et al.*; *Optica Acta*, 1979, **26**, No. 2 (Feb), 197~209.
- [4] Hanse, W. W.; *Phys. Rev.*, 1935, **47**, 139~143.
- [5] Spence, R. D., Wells, C. P.; *«Vector Wave functions, The Theory of Electromagnetic Waves—A Symposium»*, 1951, 95~104.
- [6] Stratton, J. A.; *«Electromagnetic Theory»*, (McGraw-Hill Book Company, New York, 1941).

A vector modal theory for rectangular-groove grating*

YANG BAOCNENG AND ZHUANG SONGLIN

(*Shanghai Institute of Optical Instrument*)

ZHOU XUESONG

(*Shanghai Institute of Microwave Technology*)

(Received 14 December 1987; revised 12 May 1988)

Abstract

The vector wave functions satisfying a vector homogeneous Helmholtz equation are introduced as the basic vectors, and the field both outside and inside the grooves of the grating are expanded by vector plane wave functions and vector modes respectively. Equations of the amplitudes which can be solved numerically are derived. The method can be used to study the diffraction of optical plane waves, the incident direction and the polarization of which can be arbitrary. The results for P - and S -polarization are consistent with that published before.

Key words: rectangular-groove grating; vector modal.

* Funded by the National Natural Science Foundation of PRC.