

# 方波调制时的光热光束偏转理论

李斌成 曾昭信 何舜华  
(成都电讯工程学院)

## 提 要

本文叙述了加热光束光强以方波调制时的光热光束偏转理论,讨论了偏转信号值与加热光功率、光斑半径,两光点的相对位置及调制频率等的关系并与实验结果比较,其结果是定性一致的。

关键词: 方波调制, 光束偏转。

## 一、引 言

自光声方法<sup>[1]</sup>和光热方法<sup>[2]</sup>提出以来,它已被广泛地应用在低频范围的各个领域<sup>[3~6]</sup>。其调制方式通常是采用机械斩波,即方波调制<sup>[3~5]</sup>。然而,由于理论上讨论方波调制情况的复杂性,人们都用正弦波调制理论代替方波调制理论<sup>[7~10]</sup>。实际上,正弦波调制理论是不符合方波调制的实验结果的<sup>[10]</sup>。针对这种情况,本文给出了方波调制时的光热光束偏转理论,并通过实验验证了这一方波调制理论的正确性。

## 二、光热光束偏转理论

光热光束偏转的物理基础是热传导和热弹性形变。当一束激光(加热光束)照射到样品

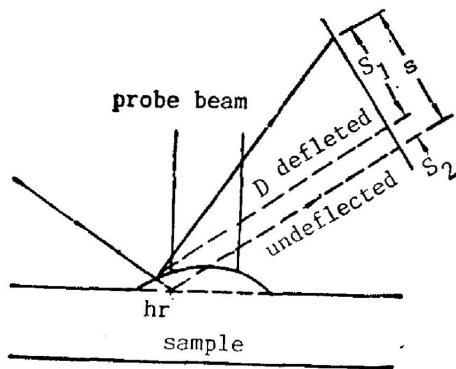


Fig. 1 Schematic depiction of photo-thermal optical beam deflection

表面时,样品吸收能量,内部温度上升、膨胀,结果表面产生凸起,形成一定的倾斜度。当另一束激光(探测光束)照射到该区域时,其反射方向发生偏转,如图1所示。如果加热光束光强周期性调制时,探测光的反射方向也将发生周期性变化,用位敏探测器接收,则产生一交流信号,此即为光热光束偏转信号。假设探测光与样品表面接触点处的凸起高度为 $h_r$ ,倾斜度为 $g_r$ ,探测光的入射角为 $\theta$ ,在与接触点相距为 $D$ 的探测面上探测光的偏转量为<sup>[3]</sup>:

$$S = S_1 + S_2 = 2Dg_r + 2h_r \cos \theta, \quad (1)$$

一般情况下,(1)式中第二项远小于第一项,可忽略不计,于是(1)式可简化成

$$S \approx 2Dg_r. \quad (2)$$

即光束偏转量与表面倾斜度成正比。

### 1. 加热光光强以方波调制时样品内温度分布

当加热光光强方波调制时,有

$$P(t) = P \cdot \begin{cases} 1, & n\tau \leq t \leq n\tau + \tau_1, \\ 0, & n\tau + \tau_1 \leq t \leq (n+1)\tau, \end{cases} \quad (3)$$

其中  $P$  为光功率,  $\tau = (1/f)$ ,  $f$  为调制频率,  $\tau_1$  为加热光照射时间。设激光束光强为高斯分布, 取如图 2 所示的柱坐标系。假设样品是厚度为  $L$  的无限大平板。加热光光斑半径为  $a$  (光强点), 样品对加热光的光学吸收系数为  $\alpha$ , 表面反射率为  $T_r$ , 并假定样品两表面绝热 (因为一般非绝热固体材料的热导率远大于空气的热导率), 则样品内部的热传导方程及边界条件为<sup>[11]</sup>:

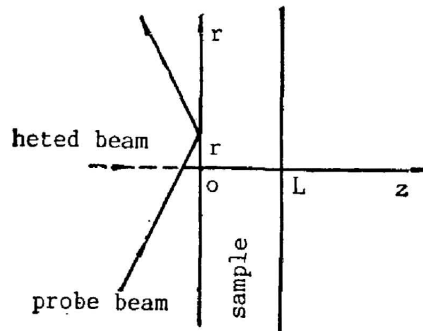


Fig. 2 Coordinate system

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 T(r, z, t) - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{K_{th}} Q(r, z, t), \\ Q(r, z, t) &= \frac{\alpha(1-T_r)}{\pi a^2} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \exp(-\alpha z) P(t), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{th} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0, \\ K_{th} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中  $\lambda$  为样品的热扩散系数,  $\lambda = (K_{th}/\rho c)$ ;  $K_{th}$  为热导率,  $\rho$  为密度,  $c$  为热容量,  $Q(r, z, t)$  为非齐次加热项。当  $n\tau \leq t \leq n\tau + \tau_1$  时, 方程(4)的解可分为稳态问题和齐次问题的解之和;

$$T_1(r, z, t) = T_{st}(r, z) + T_{h0}(r, z, t), \quad (6)$$

表示稳态问题的  $T_{st}(r, z)$  满足

$$\nabla^2 T_{st}(r, z) = -\frac{1}{K+h} \cdot \frac{\alpha P(1-T_r)}{\pi a^2} \exp(-r^2/a^2) \exp(-\alpha z), \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{th} \frac{\partial T_{st}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0, \\ K_{th} \frac{\partial T_{st}}{\partial z} \Big|_{z=L} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

采用积分变换方法求解<sup>[11]</sup>, 最后得:

$$T_{st}(r, z) = \frac{P(1-T_r)}{2\pi K_{th}} \int_0^\infty \delta d \delta J_0(\delta r) \exp(-\delta^2 a^2/4) \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 - \delta^2} \cdot \left[ \frac{\alpha}{\delta} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{[\exp(-\delta L) - \exp(-\alpha L)] \exp(\delta Z) + [\exp(\delta L) - \exp(-\alpha L)] \exp(-\delta Z)}{2 \operatorname{sh}(\delta L)} \\ & - \exp(-\alpha Z) \end{aligned} \right] , \quad (9)$$

表示齐次问题的  $T_{h0}$  为

$$\nabla^2 T_{h0}(r, z, t) - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial T_{h0}(r, z, t)}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{th} \frac{\partial T_{h0}}{\partial Z} \Big|_{z=0} &= 0, \\ K_{th} \frac{\partial T_{h0}}{\partial Z} \Big|_{z=L} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其解为

$$T_{h0}(r, z, t) = \int_0^\infty \delta d\delta J_0(\delta r) \sum_{k=0}^\infty C_k(\delta) \cos \eta_k z \cdot \exp[-\lambda(\delta^2 + \eta_k^2)t], \quad (12)$$

式中  $C_k(\delta)$  为待定系数。  $\eta_k = k\pi/L$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ 。当  $n\tau + \tau_1 \leq t \leq (n+1)\tau$  时,  $Q(r, z, t)$  为零, 此时的温度分布满足齐次方程。于是

$$T_2(r, z, t) = \int_0^\infty \delta d\delta J_0(\delta r) \sum_{k=1}^\infty D_k(\delta) \cos \eta_k z \cdot \exp[-\lambda(\delta^2 + \eta_k^2)(t - \tau_1)], \quad (13)$$

式中  $D_k(\delta)$  为待定系数。

由温度的时间连续性条件, 有

$$\left. \begin{aligned} T_1(r, z, n\tau + \tau_1) &= T_2(r, z, n\tau + \tau_1), \\ T_2(r, z, (n+1)\tau) &= T_1(r, z, (n+1)\tau). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

确定待定系数  $C_k(\delta)$  和  $D_k(\delta)$ , 即可得到样品内部的三维温度分布。对于大多数金属和不透光固体材料来说, 其光学吸收系数在  $10^5 \sim 10^7$  左右, 故其光学穿透深度远小于样品厚度  $L$ , 可近似地认为样品的光学吸收系数为无限大, 最后得到温度分布的表达式为

$$T(r, z, t) = \begin{cases} \frac{P(1-T_r)}{2\pi K_{th}} \int_0^\infty d\delta J_0(\delta r) \exp(-\delta^2 a^2/4) \cdot \left\{ \frac{\operatorname{ch}(\delta L - \delta Z)}{\operatorname{sh}(\delta L)} - \frac{1}{\delta L} \right. \\ \quad \cdot \left[ \frac{1 - \exp(-\lambda \delta^2 \tau_2)}{1 - \exp(-\lambda \delta^2 \tau)} \cdot \exp(-\lambda \delta^2 t) + 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{\delta^2 \cos \eta_k z}{\delta^2 + \eta_k^2} \right. \\ \quad \left. \left. \cdot \frac{1 - \exp[-\lambda(\delta^2 + \eta_k^2)\tau_2]}{1 - \exp[-\lambda(\delta^2 + \eta_k^2)\tau]} \cdot \exp[-\lambda(\delta^2 + \eta_k^2)t] \right] \right\}, & (n\tau \leq t \leq n\tau + \tau_1) \\ \frac{P(1-T)}{2\pi K_{th} L} \int_0^\infty \frac{d\delta}{\delta} J_0(\delta r) \exp(-\delta^2 a^2/4) \cdot \left[ \frac{1 - \exp(-\lambda \delta^2 \tau_1)}{1 - \exp(-\lambda \delta^2 \tau)} \right. \\ \quad \cdot \exp[-\lambda \delta^2 (t - \tau_1)] + 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{\delta^2 \cos \eta_k z}{\delta^2 + \eta_k^2} \cdot \frac{1 - \exp[-\lambda(\delta^2 + \eta_k^2)\tau_1]}{1 - \exp[-\lambda(\delta^2 + \eta_k^2)\tau]} \\ \quad \left. \left. \cdot \exp[-\lambda(\delta^2 + \eta_k^2)(t - \tau_1)] \right] \right], & (n\tau + \tau_1 \leq t \leq (n+1)\tau) \end{cases} \quad (15)$$

式中  $\tau_2 = \tau - \tau_1$ 。  $J_0(\delta r)$  是第一类零阶贝塞尔至数,  $\delta$  为积分变量。

如果考虑样品两表面向周围空气的热传导, 则 (15) 式还可以适合于所有其它方波调制的光声和光热情况。

## 2. 加热光光强以方波调制时样品表面做倾斜度

表达式由图 1 和图 2, 有

$$g_r = \left. \frac{\partial U_z}{\partial r} \right|_{z=0} \quad (16)$$

由附录,任意准稳态温度分布  $T(r, z, t)$  时样品表面倾斜度为

$$\left. \frac{\partial U_z}{\partial r} \right|_{z=0}(r, t) = 2\alpha_{th}(1+\nu) \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^L d\xi \int_0^\infty \beta^2 d\beta J_0(\beta\rho) J_1(\beta r) \cdot T(\rho, \xi, t) \cdot \frac{\text{sh}(\beta L)\text{sh}(\beta L - \beta\xi) - \beta L \text{sh}(\beta\xi)}{\text{sh}^2(\beta L) - (\beta L)^2}, \quad (17)$$

将(15)式代入(17)式并进行积分,最后得加热光光强方波调制时样品表面倾斜度的表达式为

$$\left. \frac{\partial U_z}{\partial r} \right|_{z=0}(r, t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{P(1-T_r)\alpha_{th}(1+\nu)}{\pi K_{th}} \int_0^\infty d\delta J_1(\delta r) \exp(-\delta^2 a^2/4) \cdot \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{\delta L} \left[ \frac{\text{ch}(\delta L) - 1}{\text{sh}(\delta L) + \delta L} \right. \right. \\ \cdot \frac{1 - \exp(-\lambda\delta^2\tau_2)}{1 - \exp(-\lambda\delta^2\tau)} \exp(-\lambda\delta^2 t) + 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{\delta^4}{(\delta^2 + \eta_k^2)^2} \cdot \frac{1 - \exp[-\lambda(\delta^2 + \eta_k^2)\tau_2]}{1 - \exp[-\lambda(\delta^2 + \eta_k^2)\tau]} \\ \cdot \exp[-\lambda(\delta^2 + \eta_k^2)t] \cdot \left. \begin{array}{l} \left. \frac{\text{ch}(\delta L) - 1}{\text{sh}(\delta L) + \delta L} \right\} \quad (k: \text{偶数}) \\ \left. \frac{\text{ch}(\delta L) + 1}{\text{sh}(\delta L) - \delta L} \right\} \quad (k: \text{奇数}) \end{array} \right\} \\ \quad (n\tau \leq t \leq n\tau + \tau_1) \\ \\ \frac{P(1-T_r)\alpha_{th}(1+\nu)}{\pi K_{th}L} \int_0^\infty \frac{d\delta}{\delta} J_1(\delta r) \exp(-\delta^2 a^2/4) \cdot \left[ \frac{\text{ch}(\delta L) - 1}{\text{sh}(\delta L) + \delta L} \cdot \frac{1 - \exp(-\lambda\delta^2\tau_1)}{1 - \exp(-\lambda\delta^2\tau)} \right. \\ \cdot \exp[-\lambda\delta^2(t - \tau_1)] + 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{\delta^4}{(\delta^2 + \eta_k^2)^2} \cdot \frac{1 - \exp[-\lambda(\delta^2 + \eta_k^2)\tau_1]}{1 - \exp[-\lambda(\delta^2 + \eta_k^2)\tau]} \\ \cdot \exp[-\lambda(\delta^2 + \eta_k^2)(t - \tau_1)] \cdot \left. \begin{array}{l} \left. \frac{\text{ch}(\delta L) - 1}{\text{sh}(\delta L) + \delta L} \right\} \quad (k: \text{偶数}) \\ \left. \frac{\text{ch}(\delta L) + 1}{\text{sh}(\delta L) - \delta L} \right\} \quad (k: \text{奇数}) \end{array} \right] \\ \quad (n\tau + \tau_1 \leq t \leq (n+1)\tau) \end{array} \right. \quad (18)$$

式中,  $\alpha_{th}$  为样品的线性热膨胀系数,  $\nu$  为泊松比率,  $J_1(\delta r)$  为第一类一阶贝塞尔函数。

因为光热光束偏转信号值与表面倾斜度之间只差一比例常数,故可认为(18)式即为信号的表达式。从(18)式可以看出,光热光束偏转的信号值与加热光功率、光斑半径、调制频率、两光点相对位置等有关。

### 三、实验系统及说明

实验系统如图3所示。由  $\text{CO}_2$  激光器输出的激光束经机械斩波器调制, Ge 透镜聚焦在样品表面作加热光束。由 He-Ne 激光器输出的激光束经扩束后聚焦在加热光点附近作探测光束,其反射光经准直后送入两单元光电探测器产生两电信号,经差分放大后送入锁定放大器。由分束片分出的另一束 He-Ne 光经斩波器,光电探测器接收,产生的电信号经放大后送入锁定放大器的参考通道。示波器和频率计用

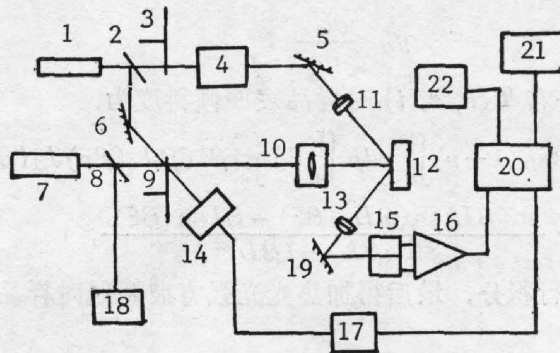


Fig. 3 Schematic of experimental arrangement

1, He-Ne laser; 2, 8, splitter; 3, 9, mechanical chopper; 4, beam expander; 5, 6, 19, mirror; 7, CO<sub>2</sub> laser; 10, 11, 13, lens; 12, sample; 14, single detector; 17, amplifier; 18, powermeter; 20, lock-in amplifier; 21, oscillograph; 22, frequency meter

于监视信号波形和频率，而斩波器 3 则用于初始时调零。信号有效值由锁定放大器直接读出。

### 四、信号值与各参数间的理论关系及实验验证

理论计算假设用铜片作样品，其参数值为

$$T_r: 98.4\%; \alpha_{th}: 1.67 \times 10^{-5} K^{-1}; \nu: 0.33; K_{th}: 401 W/m \cdot K;$$

$$\lambda: 1.1673 \times 10^{-4} m^2/sec; \tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2} \tau; \tau = 1/f.$$

信号值是指信号有效值，按信号峰值归一化。

实验是以黄铜片、云母片等为样品。

#### 1. 信号波形

图 4 是信号的理论 and 实验波形。当频率较低时，在加热时间内样品内部很快就达到稳态，信号波形近似为方波，高频时，加热时间远小于样品达到稳态的时间，波形类似于三角波。

#### 2. 信号值与频率的关系

其理论和实验频率关系曲线分别如图 5 和图 6 所示。在低频时，信号值与频率无关，当频率逐渐增大到某一频率时，信号值开始下降，在高频时，信号值与频率的一次方成反比。

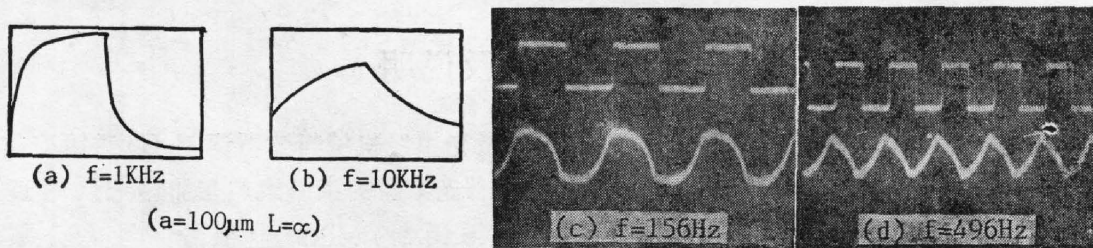


Fig. 4 Signal's wave-shape

(a, b) theoretical wave-shape; (c, d) experimental wave-shape sheet mica

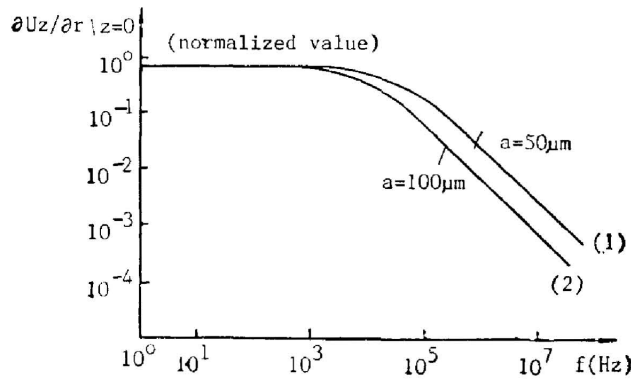


Fig. 5 Beam deflection signal vs modulation-frequency (theory) ( $L=0.4\text{mm}$ )

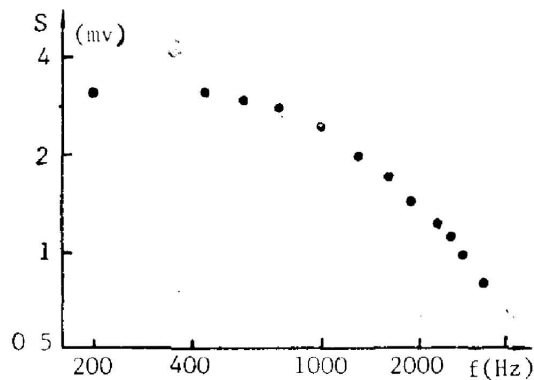


Fig. 6 Beam deflection signal vs modulation-frequency (experimental: copper) ( $a=1$ )

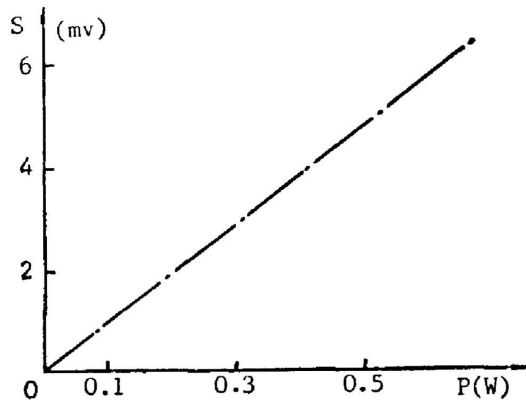


Fig. 7 Beam deflection signal vs power of heated beam (experiment)

图5是不同 $a$ 时的频率关系曲线,随光斑半径 $a$ 的增大,频率特性曲线向低频方向移动。图6是黄铜片样品的实验曲线。

### 3. 信号值与加热光功率的关系

从(18)式很清楚地看到,信号值与加热光功率成正比,实验结果(如图7所示)证明了这一点。

### 4. 信号值与光斑半径 $a$ 的关系

图8和9是信号值与 $a$ 的理论和实验曲线。在接近稳态时,信号值与加热光的光斑半径 $a$ 成反比。随着频率的增大,随着 $a$ 的增大信号下降的幅度就更大(见图8),图9是实验

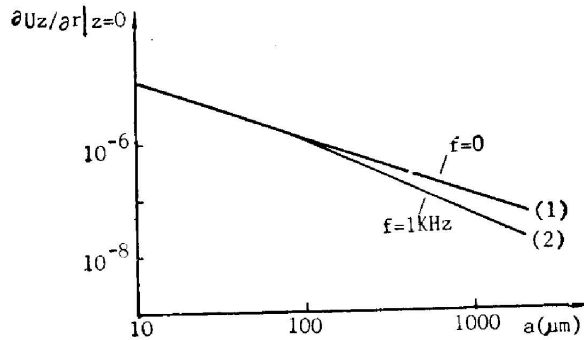


Fig. 8 Beam deflection signal vs radius of heated beam (theory)  
( $L=0.4$  mm; (1)  $f=0$ ; (2)  $f=1$  kHz)

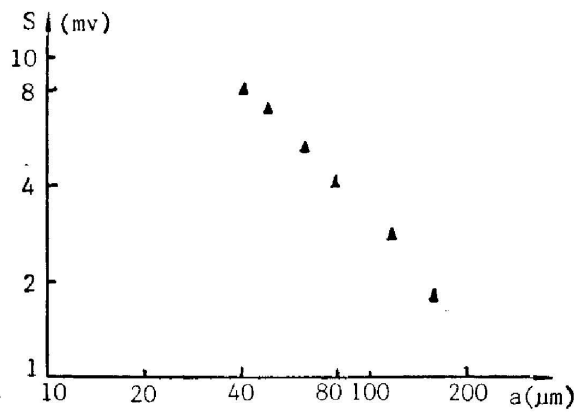


Fig. 9 Beam deflection signal vs radius of heated beam (experiment)  
( $L=0.55$  mm,  $f=640$  Hz)

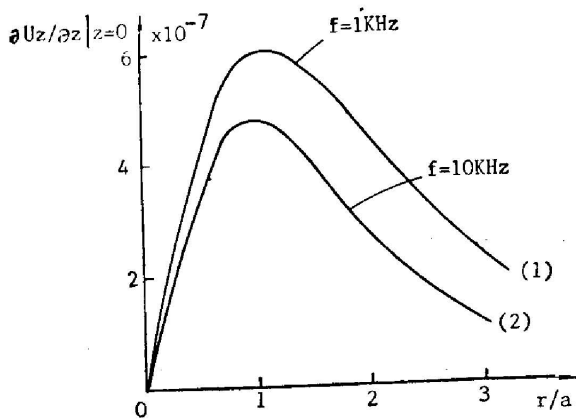


Fig. 10 Beam deflection signal vs the radiative position of heated and probe beam (theory),  
( $a=50$   $\mu$ m  $L=0.5$  mm)

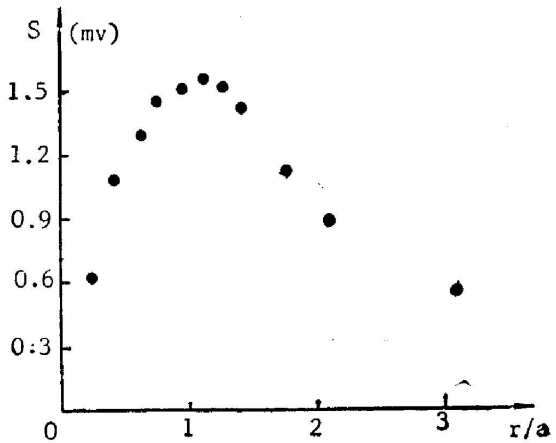


Fig. 11 Beam deflection signal vs the radiative position of heated and probe beam (experiment)  
( $f=245$  Hz,  $a=150$   $\mu$ m)

结果。

5. 信号值与两光点相对位置的关系

其理论关系如图 10 所示。当两光点重合时, 信号为零。随着两光点的分开, 信号值迅

速增大,最后达到一最大值点,然后开始下降。当其间距远大于加热光的光斑半径时,信号值下降到零。最大值点的位置与频率有关,接近稳态时,  $r=1.12a$  时出现最大,频率增大,最大值点向加热光光斑中心移动。图 11 是实验结果。

从前面的分析可以看出,实验结果与理论是基本符合的,未能定量的原因是涉及的物理参数太多,很难都有确定的值。

## 五、结 语

光热光束偏转的正弦波调制理论不符合方波调制情况的最明显的地方是在高频时(相对于频率特性曲线而言),正弦波调制理论中信号值与频率的 3/2 次方成正比[参考文献[10]中(6)式],而方波调制的实验结果是与频率的一次方成反比。本文中理论与实验结果的一致证明了理论的正确性,从而解决了方波调制时的理论问题。

## 附 录

准稳态温度分布时表面倾斜度  $(\partial U/\partial r)|_{z=0}$  的表达式。

仍取图 2 所示的坐标系,(准)稳态时样品内部的热弹性方程和边界条件为<sup>[12]</sup>

$$(1-2\nu)\nabla^2\mathbf{u}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})=2(1+\nu)\alpha_{th}\nabla T, \quad (\text{A-1})$$

$$\sigma_{12}|_{z=0,L}=0, \quad (\text{A-2})$$

$$\sigma_{22}|_{z=0,L}=0, \quad (\text{A-3})$$

式中  $\alpha_{th}$  为线性热膨胀系数; $\nu$  为泊松比率; $T$  为样品内温度分布; $\mathbf{u}$  为形变位移矢量,  $u_z$  为  $z$  向分量。 $\sigma_{12}$ 、 $\sigma_{22}$  分别为  $rz$  平面的切应力和  $sz$  方向正应力。本(A-1)式的解分解为特解  $u_1$  和通解  $u_2$  之和。

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2, \quad (\text{A-4})$$

$u_1$  满足

$$\mathbf{u}_1=\nabla\phi, \quad (\text{A-5})$$

$$\nabla^2\phi=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_{th}T, \quad (\text{A-6})$$

式中  $\phi$  热弹性位移势。 $u_2$  满足

$$\mathbf{u}_2=(1-2\nu)^{-1}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}\mathbf{r}_0+\left[2(1-\nu)\nabla^2\psi-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]\mathbf{z}_0, \quad (\text{A-7})$$

$\psi$  为勒夫(Love)函数

$$\nabla^4\psi=0, \quad (\text{A-8})$$

方程(A-6)和(A-8)的详细解过程参考文献[12],在解方程(A-8)时,我们提出了一个新的设解

$$\psi(r, z)=\int_0^\infty J_0(\beta r)[(A+B\beta z)\exp(-\beta z)+(C+D\beta z)\exp(\beta z)]d\beta, \quad (\text{A-9})$$

从而使解题过程及结果得到简化,最后的结果为

$$\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big|_{z=0}(r, t)=2\alpha_{th}(1+\nu)\int_0^\infty\rho d\rho\int_0^L d\xi\int_0^\infty\beta^2 d\beta J_0(\beta\rho)J_1(\beta r)T(\rho, \xi, t) \cdot \frac{\text{sh}(\beta L)\text{sh}(\beta L-\beta\xi)-\beta L\text{sh}(\beta\xi)}{\text{sh}^2(\beta L)-(\beta L)^2}, \quad (\text{A-10})$$

## 参 考 文 献

- [1] L. B. Kreuzer; *J. Appl. Phys.*, 1971, **42**, No. 7 (Jun), 2934~2943.
- [2] A. C. Bocara *et al.*; *Appl. Phys. Lett.*, 1980, **33**, No. 2(15 Jan), 130~132.
- [3] A. C. Tam; *Rev. Mod. Phys.*, 1986, **58**, No. 2 (Apr), 381~431.
- [4] G. Rousset *et al.*; *J. Appl. Phys.*, 1983, **54**, No. 5 (May), 2383~2391.
- [5] W. L. Smith *et al.*; *J. Vac. Sci. & Technol.*, 1984, **2**, No 2 (Apr-Jun), 710~716
- [6] K. R. Grice *et al.*; *J. Appl. Phys.*, 1983, **54**, No. 11 (Nov), 6245~6255.



- [7] J. OspaI, A. Rosenwaig; *J. Appl. Phys.*, 1982, **53**, No. 6 (Jun), 4240~4243.  
[8] W. Jackson, N. M. Amer; *J. Appl. Phys.*, 1980, **51**, No. 6 (Jun), 3343~3353.  
[9] L. C. Aamod, J. C. Murphy; *J. Appl. Phys.*, 1981, **52**, No. 8 (Aug), 4908~4914.  
[10] M. A. Olmstead *et al.*; *Appl. Phys.*, (A), 1983, **32A**, No. 8 (Nov), 141~154.  
[11] M. N. Ozisik; «*Heat Conduction*», (John Wiley & Sons, New York, 1980).  
[12] W. Nowacki; «*Thermoelasticity*», (2nd ed., Oxford, Pergamon, 1986).

## Theory of photothermal optical beam deflection at square-wave modulation

LI BINCHEN, ZENG ZHAOXIN AND HE SHUNHUA  
(Chengdu Institute of Radio Engineering)

(Received 12 May 1988)

### Abstract

In this paper, the theory of photothermal optical beam deflection (PTOBD) is described in the case of intensity of heated beam was modulated by square-wave. The amplitude dependences of PTOBD on power and radius of heated beam relative position of heated and probe beam, modulation-frequency are discussed theoretically. Comparison has been made with experimental results, and shown that they are in agreement quantitatively.

**Key words:** square-wave modulation, optical beam deflection.