

改进的光波导标量近似有限元分析

赵安平 于荣金

(中国科学院长春物理研究所)

提 要

本文首次将波矢量的匹配条件应用于标量近似有限元法求解条形波导, 从而将二维问题简化成两个一维问题。其结果除了具有标量近似有限元法的一切优点外, 还为节省计算机的存储和时间提供了一条新的途径。

关键词: 光波导, 传播常数, 有限元法。

一、引 言

有限元法是处理具有任意形状不均匀折射率分布介质光波导的一种有效数值方法。迄今为止, 用于求解介质光波导的有限元方程有许多不同形式, 其中标量近似有限元法在分析各向同性和各向异性介质光波导方面有一些显著的优点。如无伪解、易于求高阶模、较小的矩阵维数(内存空间)和较少的计算时间等^[1, 2]。

本文提出了改进的标量近似有限元法。把波矢量 k 在介质分界面上的匹配条件应用于标量近似有限元法中, 对各向同性均匀介质的各种条形波导以及介电张量只具有对角线元素的各向异性(以下简称各向异性)均匀介质的条形波导进行了计算。由于 k_x 与 k_y 具有相互独立性, 因此将二维问题简化成了两个一维问题。

二、基本方程

已经证明, 在条形波导中, 存在两类满足边界条件的基本模式: E_{pq}^x 模和 E_{pq}^y 模, 其中 p 、 q 分别表示电磁场沿 x 和 y 方向的极值数目。如图1所示, 矩形波导由五种各向异性均匀介质(无损耗非磁性介质)组成, 其介电张量为:

$$\epsilon_s = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_{x,s}^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_{y,s}^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_{z,s}^2 \end{pmatrix}, \quad s=1, 2, 3, 4, 5.$$

式中 $n_{x,s}$ 、 $n_{y,s}$ 、 $n_{z,s}$ 为第 s 种介质折射率在 x 、 y 、 z 轴的分量。由介质波导的电磁场理论, 可推得波导中的 E_{pq}^x 模和 E_{pq}^y 模的场方程为:

$$E_{pq}^x \text{ 模: } \frac{n_{x,s}^2}{n_{z,s}^2} \cdot \frac{\partial^2 E_{x,s}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{x,s}}{\partial y^2} + (k_0^2 n_{x,s}^2 - \beta^2) E_{x,s} = 0, \quad (1)$$

$$E_{pq}^y \text{ 模: } \frac{\partial^2 E_{y,s}}{\partial x^2} + \frac{n_{y,s}^2}{n_{z,s}^2} \cdot \frac{\partial^2 E_{y,s}}{\partial y^2} + (k_0^2 n_{y,s}^2 - \beta^2) E_{y,s} = 0, \quad (2)$$

式中 k_0 为真空中的波数, β 为沿 z 方向的传播常数。设 k_s 为第 s 种介质中的波矢, k_{sx} 和

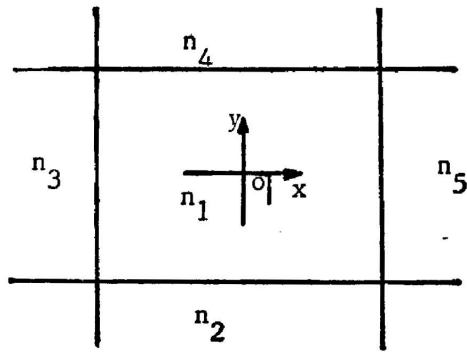


Fig. 1 Rectangular dielectric waveguide

k_{sy} 为 k_s 的 x 、 y 分量, 那么对于沿 z 方向传播的 E_{pq}^x 模有:

$$|k_s|^2 = k_s^2 = k_0^2 n_{x,s}^2 = k_{sx}^2 + k_{sy}^2 + \beta^2. \quad (3)$$

而且在介质分界面上存在如下的匹配条件:

$$\begin{cases} k_{1x} = k_{2x} = k_{4x} = k_x, \\ k_{1y} = k_{3y} = k_{5y} = k_y, \end{cases} \quad (4)$$

式中 k_x 和 k_y 为波导芯区的波矢量 k_1 在 x 、 y 方向上的分量, 即有:

$$k_0^2 n_{x,1}^2 = k_x^2 + k_y^2 + \beta^2. \quad (5)$$

根据有限元法中的伽辽金近似方程, 并联合 (1)、(3)、(4) 和 (5) 式, 可推得改进后的标量近似有限元法 E_{pq}^x 模所满足的矩阵方程:

$$\sum_s \int_{l_s} \left\{ \frac{n_{x,s,e}^2}{n_{x,s,e}^2} \left[\frac{\partial N_s}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial N_s}{\partial x} \right]_e - (k_0^2 n_{x,s,e}^2 - k_0^2 n_{x,1,e}^2 + k_x^2) [N_s]_e^T [N_s]_e \right\} [E_{x,s}]_e dx = [0], \quad (s=1, 2, 4) \quad (6a)$$

$$\sum_s \int_{l_s} \left\{ \frac{n_{x,s,e}^2}{n_{x,s,e}^2} \left[\frac{\partial N_s}{\partial y} \right]^T \left[\frac{\partial N_s}{\partial y} \right]_e - \frac{n_{x,s,e}^2}{n_{x,s,e}^2} (k_0^2 n_{x,s,e}^2 - k_0^2 n_{x,1,e}^2 + k_x^2) [N_s]_e^T [N_s]_e \right\} [E_{x,s}]_e dy = [0], \quad (s=1, 3, 5) \quad (6b)$$

类似地, 可得到改进后的标量近似有限元法 E_{pq}^y 模所满足的矩阵方程:

$$\sum_s \int_{l_s} \left\{ \frac{n_{y,s,e}^2}{n_{y,s,e}^2} \left[\frac{\partial N_s}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial N_s}{\partial x} \right]_e - \frac{n_{y,s,e}^2}{n_{y,s,e}^2} (k_0^2 n_{y,s,e}^2 - k_0^2 n_{y,1,e}^2 + k_y^2) [N_s]_e^T [N_s]_e \right\} [E_{y,s}]_e dx = [0], \quad (s=1, 2, 4) \quad (7a)$$

$$\sum_s \int_{l_s} \left\{ \frac{n_{y,s,e}^2}{n_{y,s,e}^2} \left[\frac{\partial N_s}{\partial y} \right]^T \left[\frac{\partial N_s}{\partial y} \right]_e - (k_0^2 n_{y,s,e}^2 - k_0^2 n_{y,1,e}^2 + k_y^2) [N_s]_e^T [N_s]_e \right\} [E_{y,s}]_e dy = [0], \quad (s=1, 3, 5) \quad (7b)$$

式中 \sum_s 表示对线性元 l_s 求和, N_s 为第 s 种介质中的形状函数, T 角标表示矩阵的转置, $[0]$ 表示零矩阵。

对 (6) 和 (7) 式进行整理, 可得到如下有限元方程

$$E_{pq}^x \text{ 模: } \begin{cases} [A] [E_x] = \lambda^2 [B] [E_x], & \lambda^2 = k_x^2 \\ [A] [E_x] = \lambda^2 [B] [E_x], & \lambda^2 = k_y^2 \end{cases} \quad (8a)$$

$$E_{pq}^y \text{ 模: } \begin{cases} [A] [E_y] = \lambda^2 [B] [E_y], & \lambda^2 = k_x^2 \\ [A] [E_y] = \lambda^2 [B] [E_y], & \lambda^2 = k_y^2 \end{cases} \quad (8b)$$

对于 E_{pq}^x 模, 分别对本征值方程 (8a) 和 (8b) 进行计算, 就可得到对应于 k_0 值的本征值 k_x 和 k_y , 然后将 k_x 和 k_y 的值代入 (5) 式, 得出 E_{pq}^x 模的色散曲线。

以上讨论的都是各向异性介质。对于各向同性介质, 利用式 $n_x = n_y = n_z = n$, 即可得到相应的有限元方程。

三、数值计算

我们用 FORTRAN IV 程序, 在一台 PDP-11/24 小型机上, 取矩阵 $A(41, 41)$, 计算了各种条形波导的色散曲线。线元总数为 40, 波导芯区内含 20 个线元。

1. 各向同性均匀介质条形波导

图 2 表示矩形波导的色散曲线, 其中归一化频率 ν 和归一化波导折射率 b 为

$$\begin{aligned} \nu &= k_0 T \sqrt{n_1^2 - n_2^2} / \pi, \\ b &= [(\beta/k_0)^2 - n_2^2] / (n_1^2 - n_2^2), \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $k_0 = 9.92918$, 亦即所用的激光波长 $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$ 。在图 2 中, 实点为 Goell 的结果^[3]。由于这种波导具有特殊的对称性, 所以 E_{pq}^x 模与 E_{pq}^y 模的曲线相同。

图 3 和图 4 分别给出了 $W/T = 2$ 的凸条形和掩埋形条形波导的色散曲线。从图中可以看出, 我们的结果与其它有限元法^[4]的结果一致。

图 5 为脊形波导的色散曲线。实点为 Y.S.M 利用模匹配法所得的结果^[5]。

图 6 为条载波导的色散曲线。实点为 Y.H.D.B 有限元法的结果^[4]。我们取矩阵 $A(41, 41)$, 线元总数为 40, 所用的计算机时间约为 40 秒。而 Y.H.D.B 取矩阵 $A(928, 928)$, 三角元总数为 900。所得结果具有同样的精度, 我们的计算机时间可以比 Y.H.D.B 有限元法所需计算机时间缩短两个数量级。

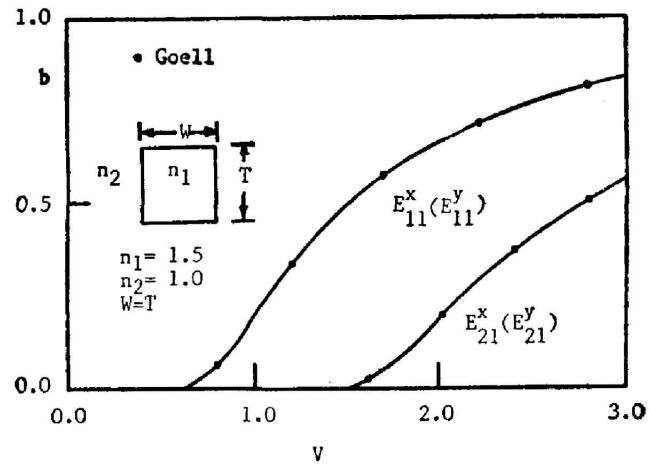


Fig. 2 Dispersion characteristics of the rectangular dielectric waveguide

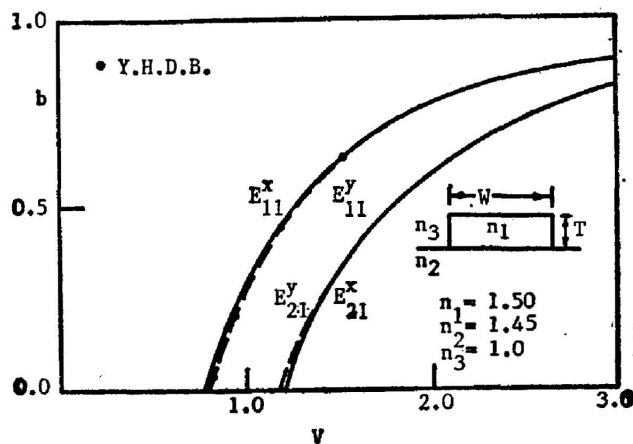


Fig. 3 Dispersion characteristics of the raised waveguide

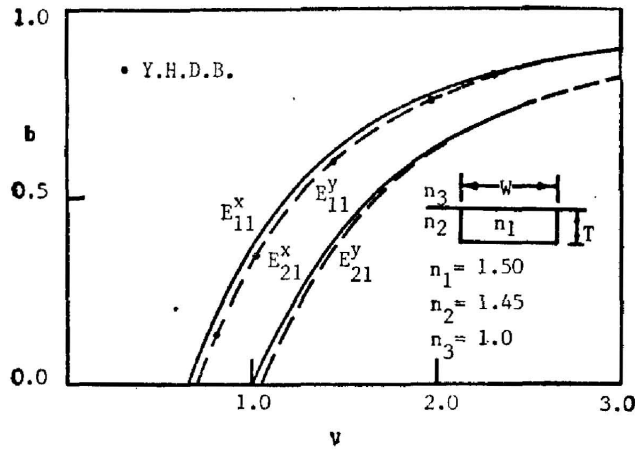


Fig. 4 Dispersion characteristics of the embedded waveguide

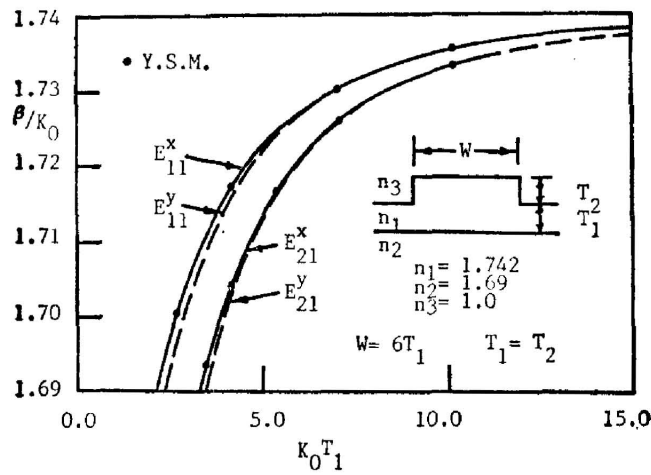


Fig. 5 Dispersion characteristics of the rib waveguide

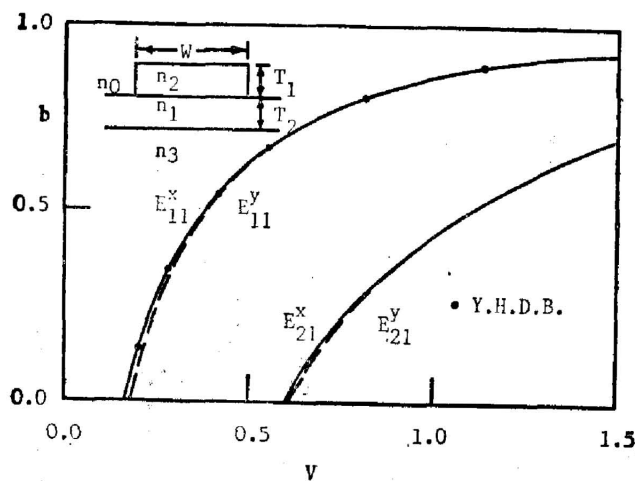


Fig. 6 Dispersion characteristics of the stripline waveguide.

$(n_0=1.0, n_1=\sqrt{2.5}, n_2=\sqrt{2.375}=n_3, T_1=T_2, W=8T_2)$

Table 1 Numerical examples for the optical stripline waveguide.^[4]

Mode	$\frac{T_2}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$	$[(\beta/k_0)^2 - n_2^2]/(n_1^2 - n_2^2)$				
		Finite element method	Vari meth	Effective index method	Marcattili method	Our result
E_{11}^x	0.250	0.270	0.256	0.278	0.167	0.270

表 1 是图 6 中我们的数值结果与有效折射率法、Marcattili 法、变分法及其它有限元法的比较,除 Marcattili 法以外,本文的结果与其它方法有很好的一致性。

2. 各向异性均匀介质条形波导

利用(6)式和(7)式可以对光轴沿三个不同方向(x, y, z)的情况进行计算,本文在图 7 和图 8 中给出了光轴沿 x 方向的结果。

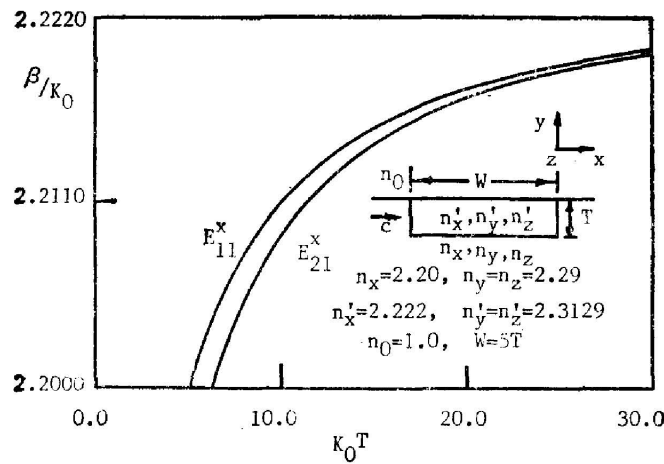


Fig. 7 E_{pq}^x modes dispersion characteristics of the LiNbO₃ waveguide (C-axis is oriented along the x -axis).

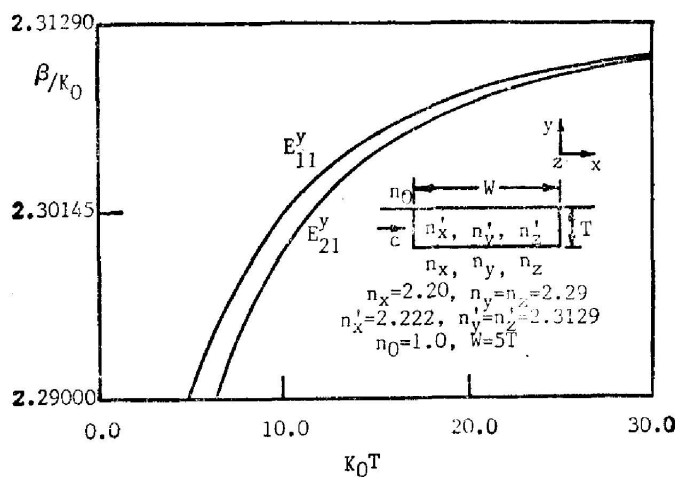


Fig. 8 E_{pq}^y modes dispersion characteristics of the LiNbO₃ waveguide (C-axis is oriented along the x -axis).

四、结 论

从数值计算的结果中可以看出,改进后的标量近似有限元法在处理各向同性和各向异性均匀介质的条形波导时,大大减少了所用的矩阵维数与计算机时间,而且具有很好的精度。因此本方法是计算这类波导的一种实用而简便的方法。

参 考 文 献

- [1] M. Koshiya, K. Hayata *et al.*; *Electron. Lett.*, 1982, **18**, No. 10 (May), 411~413.
- [2] N. Mabaya, P. E. Lagasse, *et al.*; *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1981, **MTT-29**, No. 6 (Jun), 600~605.
- [3] J. E. Goell; *Bell Syst. Tech. J.*, 1969, **48**, No. 7 (Sep), 2133~2160.
- [4] C. Yeh, K. Ha *et al.*; *Appl. Opt.*, 1979, **18**, No. 10 (May), 1490~1504.
- [5] K. Yasuura, K. Shimohara *et al.*; *J. Opt. Soc. Amer.*, 1980, **70**, No. 2 (Feb), 183~191.

Improved approximate scalar finite-element analysis of optical waveguides

ZHAO ANPING AND YU RONGJIN

(Changchun Institute of Physics, Academia Sinica)

(Received 5 October 1987; revised 8 April 1988)

Abstract

The match conditions of wave vector is firstly used for solving the strip waveguide problems by approximate scalar finite-element method in this paper. Thus the two-dimensional problems are simplified into two one-dimensional ones. This may provide a new approach for less computer memory and time, and retains all the advantages of approximate scalar finite-element method.

Key words: optical waveguide; propagation constant; finite-element method.