

二次多项式折射率分布 平面光波导的模式

范俊清

(中国科学院长春物理研究所)

提 要

对于折射率分布为二次多项式的非对称平面光波导,求解了 Helmholtz 方程,推得用抛物柱函数表示的模式场分布和模方程。结果可用于处理这类波导(如银离子交换玻璃光波导等)的模耦合或有关器件的问题。

关键词: 光波导; 模传播常数; 模式场; 集成光学。

一、引 言

用银离子交换法制备玻璃光波导,具有成本低、制备容易、波导损耗小等优点,已被广泛用于制造各种集成光学无源器件,并对其特性进行过多方研究^[1,2]。本文给出其模式场分布的另一类表达式。

银离子交换玻璃光波导是具有二次多项式折射率分布的非对称平面光波导^[1]。本文求解了这一类平面光波导的 Helmholtz 方程,推得了模式场表达式和相应的模方程。并通过数值计算证明,我们在简化情况下推得的模方程与光线理论推得的一致。但是,光线理论不能求得模式场分布,而本文用波动理论从另一途径解决了这一问题。这一结果可用于这类波导器件及模耦合问题的研究。

二、本征模的解

二次多项式折射率分布可写成^[1]

$$n^2(x) = \begin{cases} n_0^2 & x < 0 \\ n_s^2 - 2n_s \Delta n \left[b \left(\frac{x}{d} \right)^2 + \frac{x}{d} \right] & 0 \leq x \leq d_1 \\ n_b^2 & x > d_1 \end{cases} \quad (1)$$

式中 n_s 、 n_b 和 n_0 分别是波导表面、衬底和上包层的折射率, $\Delta n = n_s - n_b$, b 是常数, d 是扩散深度, d_1 是下式的正根

$$b \left(\frac{x}{d} \right)^2 + \frac{x}{d} = 1 \quad (2)$$

即 $n^2(d_1) \approx n_b^2$ 。 $n^2(x)$ 的图形如图 1 所示。

由 Maxwell 方程知道, 平面光波导的 TE 模的非零场分量只有 E_y 、 H_x 和 H_z 。其中 H_x 和 H_z 可由 E_y 推得^[3]:

$$H_x = -(\beta/\omega\mu_0)E_y, \quad H_z = (i/\omega\mu_0)\partial E_y/\partial x,$$

式中 β 是模沿 z 方向的传播常数, ω 是光波角频率, μ_0 是磁导率, i 是虚数单位。故以下只推导电场 y 分量 E_y 的解。

略去指数因子 $e^{i(\omega t - \beta z)}$, E_y 满足以下方程

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + k^2(n^2 - N^2)E_y = 0 \quad (3)$$

式中 k 是真空波数, $N = \beta/k$ 是模有效折射率。

在方程(3)中引入变量替换

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \zeta_1 \left(x + \frac{d}{2b} \right), \\ \zeta_1 &= \left(\frac{2bk^2 n_s \Delta n}{d^2} \right)^{1/4}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

则方程(3)变成

$$\frac{d^2 E_y}{d\zeta^2} + (\lambda - \zeta^2)E_y = 0, \quad (5)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= kd \left(B + \frac{1}{4b} \right) \sqrt{\frac{2n_s \Delta n}{b}}, \\ B &= \frac{n_s^2 - N^2}{2n_s \Delta n}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

在波导芯层 ($0 \leq x \leq d_1$) 内, 方程(5)的解可表示为^[4]

$$E_y = C_1 D_\nu(\sqrt{2}\zeta) + C_2 D_\nu(-\sqrt{2}\zeta), \quad (7)$$

式中 C_1 和 C_2 是待定常数, D_ν 是抛物柱形函数, $D_\nu(\sqrt{2}\zeta)$ 和 $D_\nu(-\sqrt{2}\zeta)$ 相互独立且当 $\zeta \rightarrow \infty$ 时 $D_\nu(\sqrt{2}\zeta) \rightarrow 0$, $D_\nu(-\sqrt{2}\zeta) \rightarrow \infty$ 。抛物柱形函数可用 Hermite 函数表示

$$D_\nu(\sqrt{2}\zeta) = 2^{-\nu/2} e^{-\zeta^2/2} H_\nu(\zeta), \quad (8)$$

其中 H_ν 是 Hermite 函数

$$H_\nu(\zeta) = 2^\nu \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, \zeta^2\right) + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} \zeta F\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, \zeta^2\right) \right\}, \quad (9)$$

Γ 表示 Gama 函数, $F(\alpha, \gamma, \xi)$ 表示合流(或称退化)超几何函数

$$F(\alpha, \gamma, \xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_l}{(\gamma)_l l!} \xi^l, \quad (10)$$

$$(\alpha)_l = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+l-1), \quad (\alpha)_0 = 1,$$

在式(7)~(9)中, ν 是与特定模式有关的参数

$$\nu = \frac{1}{2}(\lambda - 1), \quad (11)$$

根据式(7)及在 $x < 0$ 和 $x > d_1$ 区域内场应是指指数衰减的, 我们可得方程(3)的解

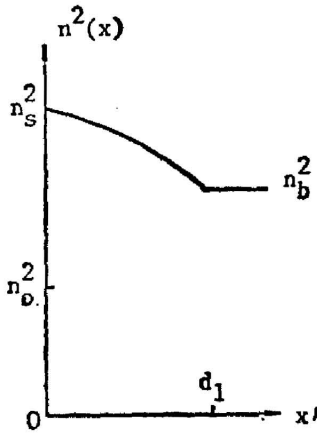


Fig. 1 Index profile of second order polynomial

$$E_y = \begin{cases} C_3 e^{px}, & x < 0 \\ C_1 D_\nu \left[\sqrt{2} \zeta_1 \left(x + \frac{d}{2b} \right) \right] + C_2 D_\nu \left[-\sqrt{2} \zeta_1 \left(x + \frac{d}{2b} \right) \right], & 0 \leq x \leq d_1 \\ C_4 e^{-h(x-d_1)}, & x > d_1 \end{cases} \quad (12)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} p &= k(N^2 - n_0^2)^{1/2}, \\ h &= k(N^2 - n_b^2)^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= C_1 D_\nu(\sqrt{2} \zeta_0) + C_2 D_\nu(-\sqrt{2} \zeta_0), \\ C_4 &= C_1 D_\nu(\sqrt{2} \zeta_2) + C_2 D_\nu(-\sqrt{2} \zeta_2), \\ \zeta_0 &= \frac{\zeta_1 d}{2b}, \\ \zeta_2 &= \zeta_1 \left(d_1 + \frac{d}{2b} \right), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

利用场分量 E_y 和 H_x 在 $x=0$ 和 $x=d_1$ 处连续的条件, 可以得到模式色散方程

$$\frac{h D_\nu(\sqrt{2} \zeta_2) + \sqrt{2} \zeta_1 D'_\nu(\sqrt{2} \zeta_2)}{h D_\nu(-\sqrt{2} \zeta_2) - \sqrt{2} \zeta_1 D'_\nu(-\sqrt{2} \zeta_2)} - \frac{p D_\nu(\sqrt{2} \zeta_0) - \sqrt{2} \zeta_1 D'_\nu(\sqrt{2} \zeta_0)}{p D_\nu(-\sqrt{2} \zeta_0) + \sqrt{2} \zeta_1 D'_\nu(-\sqrt{2} \zeta_0)} = 0, \quad (15)$$

及 C_1 和 C_2 的关系

$$\frac{C_2}{C_1} = - \frac{h D_\nu(\sqrt{2} \zeta_2) + \sqrt{2} \zeta_1 D'_\nu(\sqrt{2} \zeta_2)}{h D_\nu(-\sqrt{2} \zeta_2) - \sqrt{2} \zeta_1 D'_\nu(-\sqrt{2} \zeta_2)}, \quad (16)$$

在式(15)和(16)中, 上标撇“'”表示求导数。

对于给定的波导, 由式(15)可以确定模有效折射率 N 及对应的参数 ν , 再利用式(14)和(16)由式(12)可完全确定场分布。

三、简化情形的本征模

上节推得的式(12)和(15)是二次多项式折射率平面光波导模式的严格解, 但是其表示式较复杂, 尤其是式(15)求数值解很繁琐。在本节中, 我们要导出一种形式简单的简化情形的解, 这是不考虑衬底影响的情形。即假定折射率分布为如下形式

$$n^2(x) = \begin{cases} n_0^2, & x < 0 \\ n_s^2 - 2n_s \Delta n \left[b \left(\frac{x}{d} \right)^2 + \frac{x}{d} \right], & x \geq 0 \end{cases} \quad (17)$$

它的图形如图 2 所示。显然在 $0 \leq x \leq d_1$ 区域中式(1)和(17)相等。

显然, 在式(17)条件下, 方程(3)于 $x \geq 0$ 区域中的解仍是式(7)的形式。但是, 于 $x \rightarrow \infty$ (相当于 $\zeta \rightarrow \infty$) 时场应保持有限的要求, 导致必须选择 $C_2 = 0$ 。于场在 $x < 0$ 区域时, 应是指衰减的, 在 $x=0$ 处保持连续, 得方程(3)的解

$$E_y = \begin{cases} C_1 D_\nu(\sqrt{2} \zeta_0) e^{px}, & x < 0 \\ C_1 D_\nu \left[\sqrt{2} \zeta_1 \left(x + \frac{d}{2b} \right) \right], & x \geq 0 \end{cases} \quad (18)$$

再由 H_x 在 $x=0$ 处连续条件及式(8)易得模式色散方程

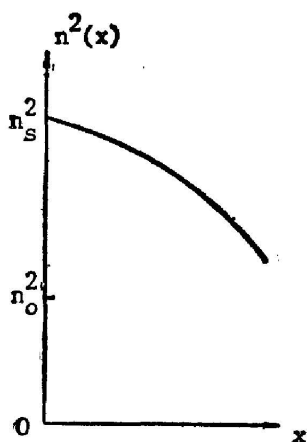


Fig. 2 Index profile of simple case

$$(p + \zeta_0 \zeta_1) H_\nu(\zeta_0) = \zeta_1 H'_\nu(\zeta_0), \quad (19)$$

利用式(9)及关系式

$$\frac{d}{d\zeta} F(\alpha, \gamma, \zeta) = \frac{\alpha}{\gamma} F(\alpha+1, \gamma+1, \zeta),$$

可推得式(19)中的 $H'_\nu(\zeta_0)$ 的计算式

$$\begin{aligned} H'_\nu(\zeta_0) = & -2\nu\zeta_0 A F\left(-\frac{\nu}{2}+1, \frac{3}{2}, \zeta_0^2\right) \\ & + B F\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, \zeta_0^2\right) \\ & + \frac{2}{3} \zeta_0^2 (1-\nu) B F\left(\frac{3-\nu}{2}, \frac{5}{2}, \zeta_0^2\right), \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$A = 2^\nu \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}, \quad B = 2^\nu \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}, \quad (21)$$

式(18)和(19)显然比式(12)和(15)简单得多。

以上推导了 TE 模的场表达式和模方程。如果在 TM 模的 H_y 场分量满足的方程中, 令 $H_y = nW$, 则可以证明 W 将近似满足与方程(3)同类的方程。据此, 能由前面的结果直接导出 TM 模的公式, 这里不再列出。

四、与光线理论公式的比较

在本节中, 我们要通过数值计算比较波动理论公式(19)和光线理论推得的模方程。文献[1]曾用光线理论导出二次多项式折射率光波导的模方程

$$\begin{aligned} \frac{kd}{4b} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \alpha \right) \sqrt{\frac{n_s \Delta n}{2b}} - \sqrt{n_s^2 - N_m^2} \right\} \\ = m\pi + \frac{\pi}{4} + \text{tg}^{-1} \left(\frac{N_m^2 - n_0^2}{n_s^2 - N_m^2} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $m=0, 1, 2, \dots$ 表示模阶数,

$$\alpha = \sqrt{\frac{n_s \Delta n}{n_s \Delta n + 2b(n_s^2 - N_m^2)}}. \quad (23)$$

为了比较式(19)和式(22), 我们举例进行了数值计算。计算中银离子交换玻璃波导的参数取为^[2]: $n_s=1.605$, $n_b=1.5125$, $n_0=1$, $b=1.2188$, $d=13.8772$, 光波长 $\lambda_0=0.6328 \mu\text{m}$ 。计算结果列于表 1 中。由表 1 可以看到, 由式(19)和(22)求得的模有效折射率数值解是相同的。表面上有 1×10^{-4} 的差异是计算误差造成的。两种方法计算的模式数也相等。不同的只有 ν 与 m , 前者甚致不是整数, 这由 ν 的定义式(11)是不难理解的。

根据上述计算比较, 可以认为式(22)是足够精确的(类似的情形在平方折射率光波导也有^[3, 6])。由于式(22)易于求数值解, 但光线理论不能导出场表达式。因此, 实用上我们可以由易于求解的式(22)确定 N , 再由式(6)和(11)决定 ν , 最后以式(18)表示模式的场分布。

Table 1 Comparison of Mode Effective Indices Calculated by Eqs. (19) and (22)

formula (19)		formula (22)	
ν	N_ν	m	N_m
11.07	1.5925	0	1.5926
15.08	1.5814	1	1.5815
18.55	1.5718	2	1.5718
21.85	1.5627	3	1.5627
24.94	1.5539	4	1.5539
27.97	1.5454	5	1.5455
30.85	1.5372	6	1.5372
33.76	1.5290	7	1.5291
36.51	1.5211	8	1.5210
39.34	1.5130	9	1.5131

以上我们严格求解了二次多项式折射率非对称平面光波导的 Maxwell 方程, 推得以抛物柱形函数表示的模式场分布表达式和模方程。这些结果对发展这类光波导(比如银离子交换玻璃光波导等)及有关器件的研究是很有用的。

参 考 文 献

- [1] G. Stewart *et al.*; *IEEE J. Q. E.*, 1977, **QE-13**, No. 4, 197~200.
- [2] G. Griffiths and P. J. Knan; *IEEE J. Q. E.*, 1981, **QE-17**, No. 4, 529~535.
- [3] M. S. Sodha and A. K. Ghatak; *Inhomogeneous Optical Waveguides*, (Plenum Press, New York and London, 1977), 1~36.
- [4] H. H. 列别捷夫;《特殊函数及其应用》, (高等教育出版社, 北京, 1957), 317~342.
- [5] 金锋, 范俊清;《集成光学》(上册),《光学技术》编辑部主编, (国防工业出版社, 北京, 1981), 38~39.

Modes in planar optical waveguide with index profile of second order polynomial

FAN JUNQING

(Changchun Institute of Physics, Academia Sinica)

(Received 4 May 1987; revised 3 January 1988)

Abstract

For the optical waveguide with index profile of second order polynomial, the Helmholtz equation is solved, and exact solution of mode profile and mode equation are derived. The results can be used to deal with the relevant problems to the glass waveguide fabricated by Ag ion exchange technique.

Key words: optical waveguide; mode propagation constant; mode field; integrated optics.