

任意截面介质波导导模的 叠代矩量法分析*

余守宪

(北方交通大学物理系)

提 要

本文提出用以计算任意截面介质波导色散关系的叠代矩量法, 并给出用叠代矩量法计算椭圆介质波导、三角形波导、平切圆波导、蛋形截面波导等的传播特性的实例。计算结果与有限元法、点匹配法等精确数值计算结果符合很好。本方法简便易行, 计算工作量较小。

关键词: 光波导, 光纤, 波导色散, 矩量法。

一、引 言

任意截面介质波导传播特性的分析是纤维光学与集成光学的重要基础问题, 在光纤与光波导器件的设计中有广泛应用。笔者曾在文献[1]、[2]、[3]中用加权余量法(Weighted Residual Method, 缩写为WRM)导出了用以计算各种条形介质波导、条载型介质波导、扩散沟道波导的色散关系以及矩形芯双沟道耦合器耦合长度等的数学表达式。在文献[4]中笔者对加权余量法作了改进, 提出了用以分析这类问题的叠代矩量法(Iterated Moment Method, 简称为IMM), 导出了有关方程与数学表达式, 使计算精度提高。叠代矩量法的要点是叠代地应用矩量法(加权余量法), 以逐次提高计算精度, IMM与文献[5]中提出的“加权折射率”(Weighted Index Method, 缩写为WIM)是等价的, 本文将阐述用IMM计算任意截面介质波导导模的方法, 导出数学表达式, 并给出若干典型实例。所得到的结果是满意的, 这就说明, 本方法可用于分析包括保偏光纤在内的各种光纤的传播特性, 有实用价值。

二、叠代矩量法

为明确起见, 我们讨论芯区折射率为 n_1 、包层折射率为 n_2 的任意截面介质波导(矩形芯介质波导与耦合器在文献[5]中已有阐述, 不再重复)。截面内折射率不均匀或各向异性情况可仿此处理, 只是数学处理稍有不同。

如图1所示, 选择一组直角坐标系 Oxy , 使坐标平面与波导截面相合。将坐标尺度扩大到原来的 $k_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$ 倍, 对应于长度 L_i ($i=1, 2$)定义归一化长度 V_i , 并定义归一化传播常数 P^2 如下

收稿日期: 1988年5月12日

* 本工作得到国家自然科学基金会资助。

$$V_1 = L_1 k_0 (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}, \quad P^2 = (\beta^2 - n^2 k_0^2) / (n_1^2 - n_2^2) k_0^2 \quad (1)$$

于是亥姆霍茨方程

$$(\partial^2 \psi / \partial x^2) + (\partial^2 \psi / \partial y^2) + (n^2 k_0^2 - \beta^2) \psi = 0$$

可以写成

$$\left. \begin{aligned} H\psi &= P^2 \psi, \\ H &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 1 - D^2, \\ D^2 &= (n_1^2 - n^2) / (n_1^2 - n_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

如图 1 选用与 y 轴平行的 N 条直线将芯区横截面分割成 N 条细长矩形, 以逼近该截面。设第 k 条矩形两侧的 x 坐标各为 x_{k-1} 与 x_k , 底和顶的纵坐标各为 y'_k 与 y_k , 再设

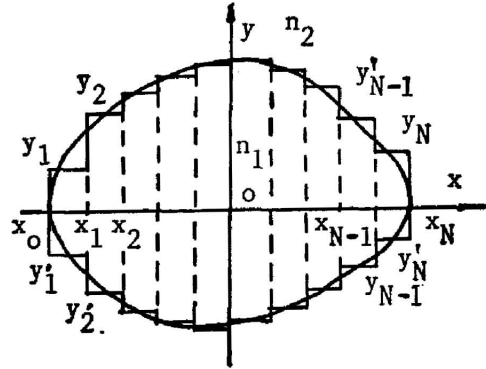


Fig. 1 Waveguide of arbitrary cross-section

$$\left. \begin{aligned} h_0(x) &= \begin{cases} 0 & (-\infty, \infty) \\ 1 & \text{其它} \end{cases}, & h_{N+1}(x) &= \begin{cases} 0 & (x_N, \infty) \\ 1 & \text{其它} \end{cases} \\ h_k(x) &= \begin{cases} 0 & (x_{k-1}, x_k) \\ 1 & \text{其它} \end{cases}, & g_k(y) &= \begin{cases} 0 & (y'_k, y_k) \\ 1 & \text{其它} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$(k=1, 2, \dots, N)$

注意到在芯区 $D^2=0$ 而在包层 $D^2=1$, 就有

$$D^2 = (1 - h_0) + \sum_{k=1}^N (1 - h_k)(1 - g_k) + (1 - h_{N+1}),$$

这样可以把 D^2 写成如下形式*

$$D^2(x, y) = A^2(x) + B^2(y) - \sum_{k=1}^N F_k(x) G_k(y), \quad (4)$$

于是算子 H 可写成

$$H = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 1 - A^2(x) - B^2(y) + \sum_{k=1}^N F_k(x) G_k(y), \quad (5)$$

如所周知, 归一化传播常数 P^2 可按变分原理求下列泛函(称为 Rayleigh 商)的极大值得出

$$P^2 = \frac{\iint \psi H \psi \, dx \, dy}{\iint \psi^2 \, dx \, dy} \quad (6)$$

为求 P^2 值, 我们取分离变量型最优尝试函数 $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$, 则由方程

$$(H - P^2) X(x)Y(y) = 0$$

即得

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} X + [1 - A^2(x) - B^2(y) + \sum_{k=1}^N F_k(x) G_k(y) - P^2] XY = 0, \quad (8)$$

方程(6)、(7)、(8)式是 IMM 的基本方程。

在严格的数学意义下, (8)式的精确解是不能求出的。不过, 可以用加权余量法求近似

* 式中 $A^2(x)$ 与 $B^2(y)$ 的选定有一定的自由度, 可以按照所讨论问题的要求确定, 留待后面再说明。

解, 采取逐次叠代的方法, 以使近似解逼近精确解。

取 $Y(y)$ 为权函数, 乘方程(7)的左边, 然后在 $y = -\infty$ 到 $y = +\infty$ 范围内积分, 令积分值等于零, 即得

$$\int Y(y) (H - P^2) X(x) Y(y) dy = 0, \quad (9a)$$

再取 $X(x)$ 为权函数, 乘方程(7)的左边, 然后在 $x = -\infty$ 到 $x = +\infty$ 范围内积, 令积分值等于零, 即得

$$\int X(x) (H - P^2) X(x) Y(y) dx = 0, \quad (9b)$$

上列两个方程是联立的, 它们是 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 的本征值方程, 可用叠代法求解。设 $X_0(x)$, $Y_0(y)$ 为某一级近似解, 则将 $Y_0(y)$ 代入(9a)即可求得高一级的近似解 $X_1(x)$ 及 P^2 近似值, 再将 $X_1(x)$ 代入(9b)又可求得高一级的近似解 $Y_1(y)$ 及 P^2 的高一级近似值, 继续叠代, 即得精确解。

1. 零级近似

作为零级近似, 可以求出面积与芯区截面积相等的一个矩形波导(称之为“逼近矩形波导”)的解^[6]。例如, 对于半长轴与半短轴各为 a 与 b 的椭圆。“逼近矩形”的长与宽各为 $\sqrt{\pi}a/2$ 与 $\sqrt{\pi}b/2$ 。为此, 我们在算子 H 中选定恰当的 $A^2(x)$ 与 $B^2(y)$, 略去交叉项 $\sum F_k(x)G_k(y)$, 然后用分离变量法求解本征值方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 1 - A^2(x) - B^2(y) \right] \psi(x, y) = P_0^2 \psi(x, y), \quad (10)$$

令 $\psi(x, y) = X_0(x)Y_0(y)$, 即得两个本征值方程

$$\left. \begin{aligned} X_0'' + (1 - A^2 - P_{01}^2) X_0 &= 0, \\ Y_0'' + (1 - B^2 - P_{02}^2) Y_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

由此解得 $X_0(x)$, $Y_0(y)$ 及相应的零级近似传播常数

$$P_0^2 = P_{01}^2 + P_{02}^2 - 1. \quad (12)$$

上述解相当于 Marcatili 近似下的解。 $A^2(x)$ 与 $B^2(y)$ 可按按下法选定。设“逼近矩形”的左、右两边分别相应于 $x = x_p$ 与 $x = x_q$, 上、下两边分别相应于 $y = y'_r$ 与 $y = y_r$, 则由(11)式容易看出, 应选定

$$A^2 = (1 - h_0) + \sum_{k=1}^p (1 - h_k) + \sum_{k=q+1}^N (1 - h_k) + (1 - h_{N+1}), \quad B^2 = q_r, \quad (13)$$

相应地, 各个 F_k 及 G_k 即同时确定。

2. 一级近似

将交叉项 $\sum F_k G_k$ 作为 H 中的微扰项, 即可求得一级近似传播常数 P_1^2 。把 X_0 、 Y_0 代入(6)式, 得

$$\left. \begin{aligned} P_1^2 &= P_{01}^2 + P_{02}^2 - 1 + \sum F_{k0} G_{k0}, \\ F_{k0} &= \int F_k(x) X_0^2(x) dx / \int X_0^2(x) dx, \\ G_{k0} &= \int G_k(y) Y_0^2(y) dy / \int Y_0^2(y) dy. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

3. 二级近似及更高级近似解

将 $Y_0(y)$ 代入(9a)中, 即得

$$X_1'' + (P_{02}^2 - P^2 - A^2 + \sum F_k G_{k0}) X_1 = 0, \tag{15}$$

由此可解得二级近似传播常数 P_2^2 及 $X_1(x)$ 。再将 $X_1(x)$ 代入(9b)中, 利用(15)式(令 $P^2 = P_2^2$), 即得

$$\left. \begin{aligned} Y_1'' + [1 - P_{02}^2 + P_2^2 - P^2 - B + \sum F_{k1}(G_k - G_{k0})] Y_1 &= 0, \\ F_{k1} &= \int F_k(x) X_1^2(x) dx / \int X_1^2(x) dx, \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

由此可解得三级近似传播常数 P_3^2 及 $Y_1(y)$, 而场函数的近似解为 $X_1(x)Y_1(y)$ 。仿此, 继续叠代, 即由 $Y_1(y)$ 求出 P_4^2 及 $X_2(x)$, 再由 $X_2(x)$ 求出 P_5^2 及 $Y_2(y)$ 等等, 余类推。计算结果表明, 叠代过程收敛很快, 一般地, 二级近似已给出足够精确的结果。各级计算, 无非是求解平板波导的本征值方程, 方法简便易行, 计算工作量较小。

三、典型实例

这里, 给出一些典型实例, 说明叠代矩量法的具体应用, 并将计算结果与文献[7]、[8]中用有限元法及点匹配法等精确数值计算结果比较。

1. 椭圆介质波导

如图 2, 考虑半长轴、半短轴各为 a 、 b 的椭圆介质波导。由对称性, 只需分析第一象限内亥姆霍茨方程的解。将横截面分割成 N 个细长矩形。为具体说明起见, 取 $N=20$, 设第 k 条矩形左、右两边 x 坐标各为 x_{k-1} 与 x_k ($x_0=0$), 上边 y 坐标为 y_k , ($k=1, 2, \dots, 20$)。令

$$h_k(x) = \begin{cases} 0 & (x_{k-1}, x_k) \\ 1 & \text{其它} \end{cases}, \quad h_{21}(x) = \begin{cases} 0 & (x_{20}, \infty) \\ 1 & \text{其它} \end{cases}$$

$$g_k(y) = \begin{cases} 0 & (0, y_k) \\ 1 & \text{其它} \end{cases}$$

则有
$$D^2 = \sum_{k=1}^{20} (1-h_k)g_k + (1-h_{21}),$$

取“逼近矩形”的长与宽各为 $\sqrt{\pi} a/2$ 与 $\sqrt{\pi} b/2$, 于是可以取

$$A^2 = (1-h_{19}) + (1-h_{20}) + (1-h_{21}), \quad B^2 = g_9,$$

从而

$$F_k = -(1-h_k) \quad (k=1, \dots, 8 \text{ 及 } k=10, \dots, 18); \quad F_9 = h_9$$

$$G_k = g_k \quad (k=1, 2, \dots, 18); \quad F_k = (1-h_k), \quad G_k = (1-g_k), \quad (k=19, 20)$$

为简明计, 以下只考虑基模。则有

$$X_0(x) = \cos(\sqrt{1-P_{01}^2} x), \quad (0, x_{18})$$

$$X_0(x) = O_e \cos(\sqrt{1-P_{01}^2} x_{18}) \exp[-P_{01}(x-x_{18})], \quad (x_{18}, \infty)$$

其中对 H^z 模 $O_e = (n_1/n_2)^2$, 对 E^y 模, $O_e = 1$, 本征值方程为

$$\sqrt{1-P_{01}^2} x_{18} = \arctan \left[O_e \frac{P_{01}}{\sqrt{1-P_{01}^2}} \right],$$

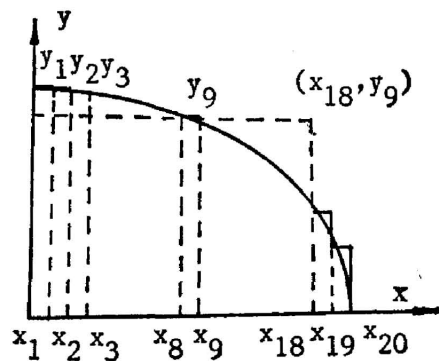


Fig. 2 quarter of an elliptic guide

而 $Y_0(y)$ 为

$$Y_0(y) = \cos(\sqrt{1-P_{02}^2}y), \quad (0, y_0),$$

$$Y_0(y) = C_y \cos(\sqrt{1-P_{02}^2}y_0) \exp[-P_{02}(y-y_0)], \quad (y_0, \infty),$$

其中对 E^o 模 $C_y=1$, 对 E^y 模 $C_y=(n_1/n_2)^2$, 本征值方程为

$$\sqrt{1-P_{02}^2}y_0 = \arctan \left[C_y \frac{P_{02}}{\sqrt{1-P_{02}^2}} \right].$$

于是零级近似传播常数

$$P_0^2 = P_{01}^2 + P_{02}^2 - 1.$$

一级近似传播带数为

$$P_1^2 = P_0^2 + \sum_{k=1}^{20} F_{k0} G_{k0},$$

其中

$$F_{k0} = -I_k/I, \quad (k=1, \dots, 8, 10, \dots, 18)$$

$$F_{90} = 1 - (I_9/I), \quad F_{k0} = I_k/I \quad (k=19, 20)$$

而

$$I_k = \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1}) + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1-P_{01}^2}} (\sin^2 \sqrt{1-P_{01}^2} x_k - \sin^2 \sqrt{1-P_{01}^2} x_{k-1}),$$

$$(k=1, 2, \dots, 18)$$

$$I_k = (C_x^2/2P_{01}) \cos^2(\sqrt{1-P_{01}^2} x_{18}) \{ \exp[-2P_{01}(x_{k-1}-x_{18})] - \exp[-2P_{01}(x_k-x_{18})] \}, \quad (k=19, 20)$$

$$I_{21} = (C_x^2/2P_{01}) \cos^2(\sqrt{1-P_{01}^2} x_{18}) \exp[-P_{01}(x_{20}-x_{18})],$$

$$I = \sum_{k=1}^{21} I_k,$$

又

$$G_{k0} = \left(\sum_{i=1}^k J_{22-i} \right) J, \quad (k=1, 2, \dots, 18)$$

$$G_{19,0} = (J_1 + J_2)/J, \quad G_{20,0} = J_1/J,$$

而

$$J_1 = \frac{1}{2} y_{20} + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1-P_{02}^2}} \sin(2\sqrt{1-P_{02}^2} y_{20}),$$

$$J_k = \frac{1}{2}(y_{20-k} - y_{21-k}) + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1-P_{02}^2}} (\sin^2 \sqrt{1-P_{02}^2} y_{21-k} - \sin^2 \sqrt{1-P_{02}^2} y_{22-k}),$$

$$(k=2, \dots, 12)$$

$$J_k = (C_y/2P_{02}) \cos^2(\sqrt{1-P_{02}^2} y_0) \{ \exp[-2P_{02}(y_{22-k}-y_0)] - \exp[-2P_{02}(y_{21-k}-y_0)] \} \quad (k=13, \dots, 20)$$

$$J_{21} = (C_y/2P_{02}) \cos^2(\sqrt{1-P_{02}^2} y_0) \exp[-2P_{02}(y_1-y_0)],$$

$$J = \sum_{k=1}^{21} J_{k0}$$

二级近似传播常数 P_2^2 及 $X_1(x)$ 由下列本征值方程求得

$$X_1'' + (P_{02}^2 - P^2 - A^2 + \sum_{k=1}^{20} F_k G_{k0}) X_1 = 0.$$

这里不再详细列出有关各式。较高级的计算式从略。

表 1 及表 2 分别给出弱导情况下 $[(n_1 - n_2) \ll 1]$, 圆波导与椭圆波导 $((a/b) = 2)$ 的计算结果与精确值及射线法计算值的比较 (表中 $V_1 = ak_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$)。

Table 1 P^2 for HE_{11} mode of circular guide

P^2 V_1	2	4	6	8	10
IMM	0.410	0.769	0.879	0.926	0.949
exact	0.417	0.773	0.883	0.929	0.952
ray ^[9]	0.434	0.782	0.887	0.932	0.954

Table 2 P^2 for HE_{11} mode of elliptical guide ($a/b=2$)

P^2 V_1/π	1.2	2.0	2.8	3.6
IMM	0.555	0.781	0.871	0.915
Finite Element ^[7]	0.551	0.787	0.871	0.915
ray ^[9]	0.544	0.784	0.875	0.919

Table 3 P^2 for E_{11}^x and E_{11}^y mode of an elliptical guide ($b/a=0.8, n_1=1.50, n_2=1$)

P^2 $V_1 \cdot \frac{2}{\pi}$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	
E_{11}^x	Point Match ^[8]	0.084	0.346	0.551	0.690	0.769	0.825	0.856
	IMM	0.066	0.369	0.570	0.693	0.769	0.820	0.856
E_{11}^y	Point Match ^[8]	0.063	0.308	0.520	0.667	0.751	0.812	0.849
	IMM	0.033	0.330	0.540	0.673	0.756	0.810	0.849

表 3 给出强导引情况下 ($n_1=1.50, n_2=1$), 对 $(b/a)=0.8$ 的椭圆波导 E_{11}^x 与 E_{11}^y 模的一级计算结果与点匹配法结果^[8]的比较。

由各表可见, 叠代矩量法结果与精确值符合很好。

2. 三角形波导

如图 3 为等边三角形波导, 底边长 $2V_1$, 高 V_2 。由对称性, 可只考虑右半个三角形 (V_1, V_2 为归一化长度) 取 $N=20$, 则“逼近矩形”顶角坐标可取为 (x_{12}, y_6) , 而

$$D^2 = \sum_0^{19} (1-h_k) g_k + (1-h_{20}), \quad A^2 = \sum_{13}^{20} (1-h_k), \quad B^2 = g_6.$$

计算结果与有限元计算结果比较如表 4 所示。

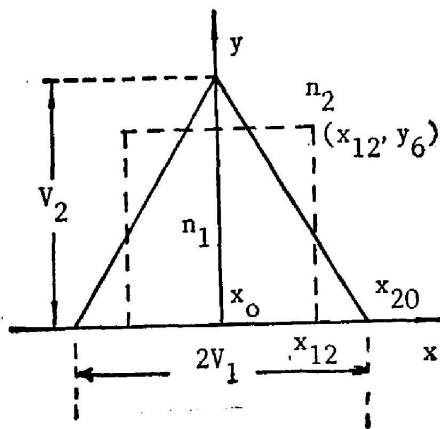


Fig. 3 Equi-lateral triangular guide

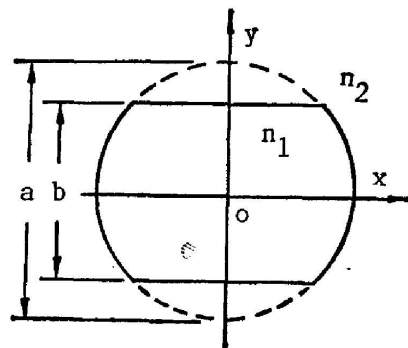


Fig. 4 Chipped-circle guide

Table 4 P^2 for equilateral triangle (fundamental mode)

P^2	V_2/π	0.8	1.6	2.4	3.2	4.0	4.8	5.6	6.4	7.2
	Finite Element		0.09	0.422	0.650	0.766	0.834	0.875	0.903	0.923
IMM		0.02	0.415	0.640	0.760	0.827	0.869	0.897	0.917	0.932

Table 5 P^2 for chipped-circle guide ($n_1^2=2.04$, $n_2^2=1$)

P^2	$V_1 \cdot \frac{2}{\pi}$	1	1.5	2.0	2.5	3.0
		$b/a=0.6$				
E_{11}^x	[8]	0.085	0.332	0.525	0.646	0.736
	IMM	0.070	0.344	0.536	0.658	0.738
E_{11}^y	[8]	0.040	0.239	0.452	0.595	0.701
	IMM	-0.024	0.240	0.456	0.603	0.702
$b/a=0.8$						
E_{11}^x	[8]	0.122	0.405	0.593	0.712	0.798
	IMM	0.127	0.423	0.606	0.716	0.798
E_{11}^y	[8]	0.096	0.367	0.565	0.682	0.776
	IMM	0.072	0.376	0.577	0.698	0.774

Table 6 P^2 for egg-shaped guide ($n_1=1.50$, $n_2=1$, $b=0.9a$, $c=0.8b$)

P^2	$V_1 \cdot \frac{2}{\pi}$	1.0	2.0	3.0	4.0
		E_{11}^x			
E_{11}^x	[8]	0.104	0.595	0.781	0.865
	IMM	0.100	0.592	0.782	0.864
E_{11}^y	[8]	0.084	0.585	0.776	0.863
	IMM	0.075	0.581	0.773	0.862

3. 平切圆波导与蛋形截面波导

对于平切圆截面波导(如图4所示)及蛋形截面波导(如图5所示)的 E_{11}^x 模及 E_{11}^y 模的色散关系, 计算结果与点匹配法^[8]计算结果的比较分别见表5和表6。

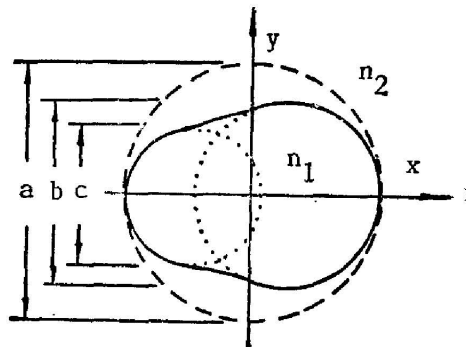


Fig.5 egg-shaped guide

四、结 论

通过以上关于叠代矩量法的分析和一些典型实例计算结果与精确数值解结果的比较,可以看出,本文的方法与精确数值解十分吻合,而且所导出的数学表达式比较简单,又须借助袖珍计算机求解一些简单的超越方程,便于设计工作者采用。由推导方程可以看到,本文方法易于推广应用到各种光波导结构,特别是推广到包括保偏光纤在内的各种光纤(例如复合光纤,各向异性光纤,PANDA光纤BOW-TIE 光纤)及光纤耦合器(例如熔融光纤)等等。

参 考 文 献

- [1] 余守宪;《光学学报》,1987, 7, No. 6 (Jun), 544~550。
- [2] She Shouxian, Qiao Li; *Sino-Japanese Joint Meeting on Optical Fiber Science and Electromagnetic Theory*, Nanjing, May 12-14, 1987, 453~457.
- [3] Qiao Li, She Shouxian; *Opt. Lett.*, 1988, 13, No. 2 (Feb), 167~168.
- [4] She Shouxian; *Optical & Quant. Electron.*, 1988, 20, No. 2 (Feb), 125~136.
- [5] P. C. Kendall, M. J. Adams *et al.*; *Proc. IEE*, PtA, 1987, 134, 699~702.
- [6] A. Kumar, R. K. Varshney; *Optical & Quant. Electron.*, 1984, 16, No. 4 (Jul), 349~354.
- [7] C. Yeh, K. Ha, S. B. Deng *et al.*; *Appl. Opt.*, 1979, 18, No. 10(May), 1490~1504.
- [8] E. Yamashita, K. Atsuki *et al.*; *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, 1979, MTT-27, No. 4(Apr), 352~356.
- [9] Jinqyi Wang, She Shouxian; *Opt. Commun.*, 1987, 64, No. 4 (Nov), 297~301.

IMM Analysis of guided modes of dielectric waveguides with arbitrary cross-section

SHE SHOUXIAN

(Department of Physics, Northern Jiaotong University)

(Received 12 May 1988)

Abstract

In this paper we present an iterated moment method (IMM) for evaluating dispersion relations of dielectric waveguides with arbitrary cross-section. The numerical results are given for the fibers of various shapes such as circles, ellipses, equi-lateral triangles, chipped-circles and egg-shaped cross-sections. The results agree well with exact computer-aided numerical results by finite element method and point-matching method. The present method is simple and saves computation time.

Key words: optical waveguide, optical fiber, waveguide dispersion, moment method.