

产生于介质箔组的渡越辐射 微分谱的理论计算

屈 卫 星

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

徐 至 展

(中国高等科学技术中心凝聚态和辐射物理中心)
(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

在产生于单一介质箔渡越辐射的基础上, 利用辐射场相加和辐射强度相加的方法导出了产生于介质箔组的相干和非相干渡越辐射量子微分谱公式, 利用非相干渡越辐射微分谱公式, 对 54MeV 的电子分别穿越铍箔组(18片箔), 镁箔组(12片箔)和铝箔组(12片箔)时产生的渡越辐射微分谱做了计算, 计算结果与实验相符合。

关键词: 渡越辐射; 介质箔组; 软X射线。

一、引 言

在均匀介质中匀速直线运动的带电粒子通常是不会产生电磁辐射的, 只有当粒子的运动速度 V 大于电磁场在该介质中传播的相速度 C_m 时, 才可能产生电磁辐射^[1]。但是若介质在空间上是非均匀的(或在时间上是非稳定的), 即使 $V < C_m$, 也同样会产生辐射, 该辐射称为渡越辐射(transition radiation), 是由著名物理学家 V. L. Ginzburg 和 I. M. Frank 于四十年代最先从理论上提出来的^[2]。

在实验上大都采用相对论电子束穿越介质箔组的方法来产生渡越辐射^[3,4]。介质箔组是由具有相同厚度的介质箔等间距平行排列而构成, 箔之间可以是真空, 也可以充有特定的气体。在一定的条件下, 电子在穿越各介质箔时产生的渡越辐射会发生相干作用, 使某些频率的辐射在某一方向上得到增强。这种相干的渡越辐射是目前人们极为感兴趣的一个研究领域, 因为它很有可能发展成为一种具有高强度的相干 X 射线源。

计算电子穿越介质界面时产生的渡越辐射量子微分谱的方法一般有两种: 1. 利用电磁场在介质界面上的边值条件进行严格求解^[5]。2. 根据介质极化理论做近似求解^[6], 本文采用第二种方法在文献[6]的基础上导出相对论电子穿越介质箔组时产生的渡越辐射量子微分谱公式, 然后利用该公式对较高能量的相对论电子穿越铍箔组, 镁箔组和铝箔组时产生的渡越辐射量子微分谱进行了计算。

二、公式的导出

设一电子沿 z 坐标轴以速度 $\mathbf{V} = v\hat{e}_z$ 匀速运动, 并在 $t=0$ 时刻通过坐标原点。由该电子产生的电场的傅里叶变换为^[6]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\rho(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{\hat{\rho}}{\pi} \frac{(-e)}{V} \frac{\omega}{\gamma V} K_1\left(\frac{\omega\rho}{\gamma V}\right) \exp\left\{i \frac{\omega}{V} z\right\}, \\ \mathbf{E}_z(\mathbf{r}, \omega) &= -i \frac{\hat{z}}{\pi} \frac{(-e)}{\gamma V} \frac{\omega}{\gamma V} K_0\left(\frac{\omega\rho}{\gamma V}\right) \exp\left\{i \frac{\omega}{V} z\right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ (c 为光速) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\hat{\rho}$ 、 \hat{z} 分别为径向(垂直于 z 轴)和轴向(平行于 z 轴)上的单位矢量; $K_0(s)$ 和 $K_1(s)$ 分别是以 $s = \omega\rho/\gamma V$ 为宗量的第二类零阶和一阶变型贝塞耳函数; ω 为电场的频率。

由于相对论电子产生的渡越辐射主要是软 X 射线, 其频率远远高于介质箔的光学共振频率, 所以介质箔内的极化强度的傅里叶变换可近似表示为

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\epsilon(\omega) - 1}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2)$$

其中 $\epsilon(\omega)$ 为箔的介电常数, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ 为电子在真空中产生的电场[已由(1)式给出]。在偶极近似下, 可由(2)式求得辐射场的下列表达式

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\exp\{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}\}}{R} \int_{V'} [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega)] \times \hat{\mathbf{n}} \exp\{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}\} dV'. \quad (3)$$

其中 V' 为介质的体积;

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \quad \text{和} \quad \mathbf{K} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon} \hat{\mathbf{n}}$$

分别为介质外和介质内的辐射波矢(因为 X 射线在介质表面上的折射和反射几乎可以忽略, 故可认为两个区域内的辐射波矢具有相同的方向)。设介质为厚度等于 l 的介质箔。由于系统具有柱对称性, (3)式积分可在如图 1 所示的坐标系中进行, 其中 \hat{e}_θ 和 \hat{e}_ϕ 分别为辐射场的两个偏振矢量, θ 为辐射角。由图 1 的几何关系不难看出:

$$[\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega)] \times \hat{\mathbf{n}} = P_\rho \cos\varphi \hat{e}_\theta + (P_\rho \sin\varphi \cos\theta - P_z \sin\theta) \hat{e}_\phi. \quad (4)$$

将(1)式通过(3)式代入(4)式, 并利用贝塞耳函数的下列性质^[6]

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} K_1(s\sqrt{x^2 + y^2}) &= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial y} K_0(s\sqrt{x^2 + y^2}), \\ \int_0^\infty K_0(\eta\sqrt{x^2 + y^2}) \cos(\xi y) dy &= \frac{\pi/2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \exp\{-|x| \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

对(3)式积分, 便得到渡越辐射场及其量子微分谱的下列表达式

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R}, \omega) &= 2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\epsilon(\omega) - 1}{4\pi} \left(\frac{e}{V}\right) \frac{\exp\{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}\}}{R} \frac{1/\gamma^2 - \beta\sqrt{\epsilon(\omega)} \cos\theta}{(\omega/c)^2 \epsilon(\omega) \sin^2\theta + \omega^2/\gamma^2 V^2} \\ &\times \frac{1 - \exp\left\{i\left(\frac{\omega}{V} - \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega)} \cos\theta\right)l\right\}}{1 - \beta\sqrt{\epsilon(\omega)} \cos\theta} \sin\theta \hat{e}_\theta. \end{aligned} \quad (6)$$

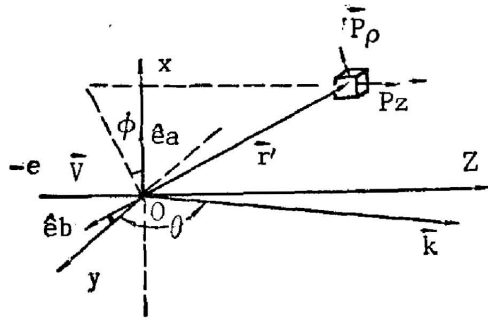
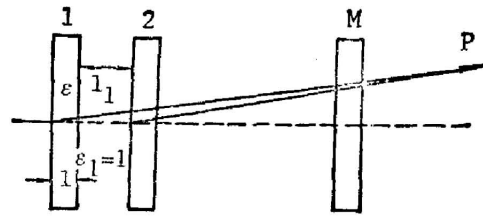


Fig. 1

Fig. 2 Transition radiation from a stack of foils (M foils)

$$\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} = \frac{c}{\hbar\omega} |\mathbf{E}(\mathbf{R}, \omega)|^2 R^2 = 16c \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \left(\frac{\epsilon-1}{\gamma v}\right)^2 \left(\frac{e}{V}\right)^2 (\beta \sqrt{\epsilon} \cos\theta - 1/\gamma^2)^2 \times \frac{\sin^2 \left[\frac{\omega}{2V} (1 - \beta \sqrt{\epsilon} \cos\theta) l \right]}{[(\omega/\theta)^2 \epsilon \sin^2\theta + (\omega/\gamma V)^2]^2} \frac{\sin^2\theta}{(1 - \beta \sqrt{\epsilon} \cos\theta)^2} \quad (7)$$

(6)式和(7)式分别为相对论电子穿越一片介质箔时产生的渡越辐射场及其微分谱表达式, 为了获得电子穿越介质箔组时产生的渡越辐射的相应表达式, 可将产生于各个介质箔的辐射进行相加, 若辐射是相干的应对(6)式相加, 若是非相干的应对(7)式相加。

设 M 片厚度相同的介质箔等间距平行排列, 箔厚度为 l , 间距为 l_1 (如图2), 如前所述, 仍忽略X射线在箔表面上反射和折射, 认为它是直线形式穿过后继的介质箔传播到观测点 P 处的。由图2可看出: 产生于相邻两片介质箔的辐射场有一光程差

$$\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon} l + \frac{\omega}{c} l_1\right) \cos\theta,$$

而在产生的时间上又有一个时间差 $\frac{\omega}{V} (l_1 + l)$, 所以产生于相邻两介质箔的辐射场有一个总相位差,

$$\Phi = \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon} \cos\theta - \frac{\omega}{V}\right) l + \left(\frac{\omega}{c} \cos\theta - \frac{\omega}{V}\right) l_1 \quad (8)$$

若产生于每片箔的辐射彼此相干, 则应将产生于每片箔的辐射场在 P 点处进行相加, 并考虑到介质箔对辐射场的吸收, 得到总辐射场

$$\mathbf{E} = \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{E}^{(M-m)}(\mathbf{R}, \omega) \exp\left\{m \left(-\frac{\mu}{2} l + i\Phi\right)\right\} \quad (9)$$

其中 $\mathbf{E}^{(j)}(\mathbf{R}, \omega)$ 为产生于第 j 片介质箔的渡越辐射场; μ 为介质箔对X射线的吸收系数。假设电子在各介质箔上产生的辐射场完全相同, 则(9)式可简化为下列形式

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R}, \omega) \frac{1 - \exp\left\{-\frac{M\sigma}{2} + iM\Phi\right\}}{1 - \exp\left\{-\frac{\sigma}{2} + i\Phi\right\}} \quad (10)$$

其中 $\sigma = \mu l$, 由上式可求得相对论电子穿越由 M 片介质箔构成的介质箔组时产生的相干渡越辐射量子微分谱表达式

$$\left(\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega}\right)_M = \frac{c}{\hbar\omega} |E(\mathbf{R}, \omega)|^2 R^2 F_M^{\text{coh}}(\Phi) = \frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} F_M^{\text{coh}}(\Phi). \quad (11)$$

其中 $\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega}$ 已由(7)式给出, 相干叠加因子

$$F_M^{\text{coh}}(\Phi) = \frac{1 + \exp\{-M\sigma\} - 2\cos(M\Phi)\exp\{-M\sigma/2\}}{1 + \exp\{-\sigma\} - 2\cos(\Phi)\exp\{-\sigma/2\}}. \quad (12)$$

若产生于每片箔的辐射彼此不相干, 则应将产生于每片箔的辐射强度在 P 点处相加。由于辐射强度与辐射量子数成正比, 并且产生的辐射每穿过一片箔, 其强度就衰减 $\exp\{-\sigma\}$ 倍, 所以 P 点处的总量子微分谱应为

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega}\right)_M &= \sum_{m=0}^{M-1} \left(\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega}\right) \exp\{-m\sigma\} \\ &= \frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} \sum_{m=0}^{M-1} \exp\{-m\sigma\} = \frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} F_M^{\text{incoh}}. \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega}$ 已由(7)式给出, 非相干叠加因子

$$F_M^{\text{incoh}} = \frac{1 - \exp\{-M\sigma\}}{1 - \exp\{-\sigma\}}. \quad (14)$$

在此假设了电子穿越每片介质箔时产生的量子微分谱都相同。

三、公式的化简

上面导出的渡越辐射量子微分谱公式过于复杂, 不便于进行计算, 为此先对公式进行化简。设电子为能量较高的相对论电子(即 $\gamma \gg 1$)。由于这种电子束产生的渡越辐射基本上是软 X 射线(或 X 射线), 并且主要分布在顶角 $\theta \approx 1/\gamma \ll 1$, 角宽 $\Delta\theta \approx 2/\gamma$ 的前向圆锥体内^[4], 所以可以采用下列近似

$$\sin\theta \approx \theta, \quad \epsilon(\omega) \approx 1 - (\omega_p^2/\omega^2). \quad (15)$$

其中 ω_p 为介质箔的等离子体频率。由(15)式的近似, 可进一步得到下列一些近似

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\epsilon(\omega) - 1}{4\pi}\right) \frac{1}{(1 - \beta\sqrt{\epsilon}\cos\theta)^2} \frac{1}{[(\omega/c)^2 \epsilon \sin^2\theta + (\omega/\gamma V)^2]} \\ &\approx \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{V^2}{\omega^2}\right) 4 \left(\frac{\omega}{4V}\right)^2 (z_1 - z_2)^2. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\omega}{2V} (1 - \beta\sqrt{\epsilon}\cos\theta) l \approx l/z_2. \quad (17)$$

$$(\beta\sqrt{\epsilon}\cos\theta - 1/\gamma^2)^2 \approx \beta^2 = 1. \quad (18)$$

其中

$$z_2 = \frac{4V/\omega}{1/\gamma^2 + (\omega_p^2/\omega^2) + \theta^2}, \quad z_1 = \frac{4V/\omega}{1/\gamma^2 + \theta^2}. \quad (19)$$

分别为介质箔和箔间真空的形成长度^[4]。在(16)~(18)近似式中只保留了一级小量 $1/\gamma^2$, ω_p^2/ω^2 和 θ^2 。将(16)~(18)近似式用于(7)式, 可得到(7)式的近似表达式

$$\left(\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega}\right) = \left(\frac{\omega\alpha \sin^2\theta}{16\pi^2 c^2}\right) (z_1 - z_2)^2 4 \sin^2\left(\frac{l}{z_2}\right). \quad (20)$$

其中 $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ 为精细结构常数。

由于X射线的波长非常短,因此要获得较好的相干性很困难;另外相干叠加因子 F_{coh} 随辐射量子能量和辐射角度的变化而迅速振荡,要分辨出(11)式的极大值几乎是不可能的。所以实验上只能测量出(11)式的平均值,也就是非相干的辐射量子微分谱。因此我们将根据公式(13)进行计算,便使能够同实验做比较。

为了尽量减少辐射的吸收,介质箔都制做得非常薄(大约为 $1 \mu\text{m}$ 左右),即 $\sigma = \mu l \ll 1$,因此可将(14)式简化为

$$F_{\text{coh}}^{\text{inc}} \simeq (1 - \exp\{-M\sigma\})/\sigma. \quad (21)$$

将(20)和(21)代入(13)式,得到

$$\left(\frac{d^2N}{d\omega d\Omega}\right)_{\text{M}} = \frac{k^2 \omega \alpha \sin \theta}{16 \pi^2 c^2} (z_1 - z_2)^2 4 \sin^2 \frac{l}{z_2} \frac{1 - \exp\{-M\sigma\}}{\sigma}. \quad (22)$$

在上式中引入了系数 $k = 1.51930 \times 10^{15}$,为的是将原来单位(photons/electro·Hz·Sr)转换成新的单位(photons/eV·Sr·electro)这是一般文献中常用的一种。(22)式中的频率 ω 单位是 eV。

四、计算结果及其分析

根据(22)式分别对较高能量的相对论电子($\gamma \gg 1$)穿越铍、镁、铝三种介质箔组时产生的渡越辐射量子微分谱做了计算。为了显示产生于单一箔微分谱和产生于箔组微分谱的差别,还同时计算了相应的电子在单一箔上产生的谱,计算结果及参数的选取均由图3至图6分别给出。

从图3和图4可看出:在极大峰的低频端还存在一个次极大峰,这是由于产生于每一片介质箔的前后两个界面上辐射的相干作用所引起的。虽然是根据(13)式对产生于每一片介质箔的辐射微分谱求和,但产生于每一片介质箔前后界面的辐射仍具有一定的相干作用,它类似于由两个相干源所发生的光的相互干涉,(20)式中的因子 $4 \sin^2 \left(\frac{l}{z_2}\right)$ 描述了这种干涉。

由(19)式不难看出:随着辐射频率 ω 的增加, z_1 与 z_2 之间的差减小,所以微分谱的强度也会迅速地衰减下来[见公式(20)]。而当辐射频率 ω 降低时,微分谱的强度也应该会有相应的增加。然而由于介质箔对极软的X射线具有严重的吸收,实际上所观测到的极软的X射线的强度是非常弱的。

由于介质箔组对辐射的严重吸收,产生于介质箔组的辐射强度并不能随介质箔数目的增加而成比例地增加。可以采用一些特殊的方法尽可能地减少辐射穿越后继介质箔的数目^[5,7],以减少箔对辐射的吸收。另外,产生于箔组的微分谱与产生于单一箔的微分谱,不仅强度不同,而且结构也有明显的差别。由于箔组的严重吸收,使辐射中的低频部分所占的比例大大减少,因此谱峰也就会向高频发生相应的偏移,从图3和图4很容易看出这点。

由于镁、铝的K吸收限位于软X射线的频率范围,所以对渡越辐射微分谱必有一定的影响。为了获得最强的量子微分谱,我们适当地选取了箔的厚度、数目以及电子的能量,为的是使微分谱的极大峰正好位于镁、铝的K吸收限处 $\omega_k \hbar$,由于频率略大于 ω_k 的辐射会

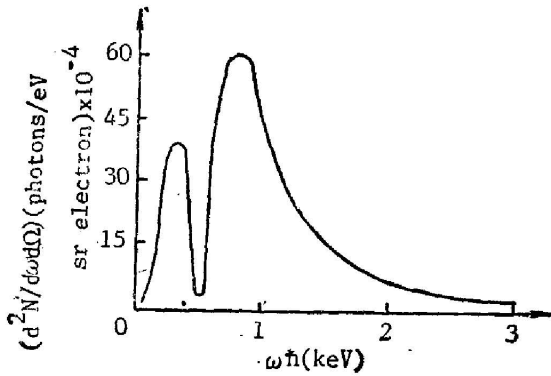


Fig. 3 Calculated differential quantum spectrum of transition radiation from a single beryllium foil ($l=1.5 \mu\text{m}$) for 54-MeV incident electron ($\gamma=106$)

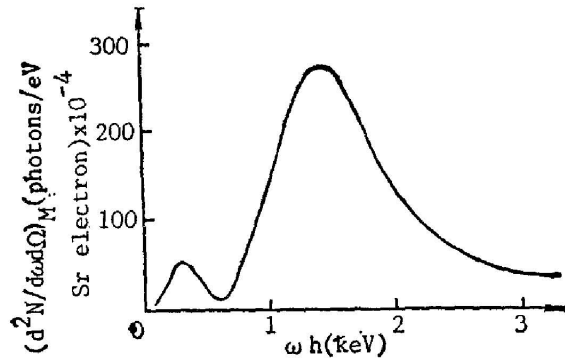


Fig. 4 Calculated differential quantum spectrum of transition radiation from a stack of beryllium foils ($M=18, l=1.5 \mu\text{m}, l_1=1.5 \text{mm}$) for 54-MeV incident electron ($\gamma=106$)

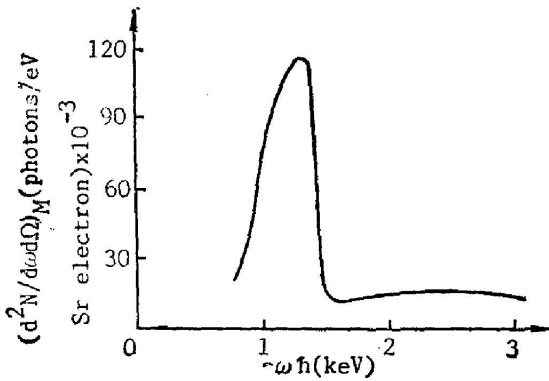


Fig. 5 Calculated differential quantum spectrum of transition radiation from a stack of magnesium foils ($M=12, l=2.0 \mu\text{m}, l_1=1.5 \text{mm}$) for 54-MeV incident electron. $\omega_k \hbar = 1.3 \text{ keV} (\lambda_k = 9.51 \text{ \AA})$

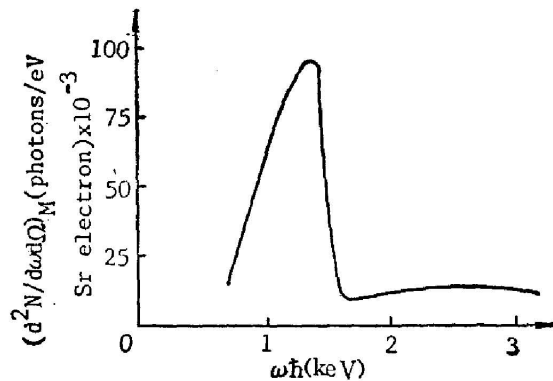


Fig. 6 Calculated differential quantum spectrum of transition radiation from a stack of aluminum foils ($M=12, l=1.48 \mu\text{m}, l_1=1.5 \text{mm}$) for 54-MeV incident electron. $\omega_k \hbar = 1.56 \text{ keV} (\lambda_k = 7.95 \text{ \AA})$

受到严重的吸收，谱的极大峰的高频边沿会相应地变陡，因而整个峰变窄(如图 5 和图 6 所示)。

本文对铍箔组和铝箔组计算的结果与 M. A. Piestrup 等人的实验结果基本上是一致的^[4]，只是产生于铍箔组微分谱的极大峰的位置稍有差别，本文计算出的极大峰位于 1.3keV 处，而实验值却在 0.8keV 左右，这种差别主要是由于我们选取的铍箔的厚度比实验采用的铍箔的厚度厚 0.5 μm 造成的。由于厚度的增加，使(30)式中的函数 $(1 - e^{-M\sigma})/\sigma$ 和 $\sin^2(l/z_2)$ 的极大值都向高频方向略有移动，由于微分谱的极大峰基本上取决于上述两个函数的极大值所在的位置，所以微分谱的极大峰也会相应地向高频方向偏移。

参 考 文 献

- [1] 郭硕鸿;《电动力学》, (人民教育出版社, 北京, 1979), 290~295.
[2] V. L. Ginzburg, I. M. Frank; *J. Phys.*, 1945, **9**, No. 5 (May), 353~362.
[3] A. N. Chu *et al.*; *J. Appl. Phys.*, 1981, **52**, No. 1 (Jan), 22~24.
[4] M. A. Piestrup *et al.*; *Phys. Rev. A*, 1985, **32**, No. 2(Aug), 917~927.
[5] V. L. Ginzburg, V. N. Tsytovich; *Phys. Rev.*, 1979, **49**, No. 1 (Jan), 1~89.
[6] J. D. Jackson; *Classical Electrodynamics*, (John Wiley and Sons, New York, 1974).
[7] 屈卫星, 徐至展;《中国激光》, 1988, **15**, No. 8.

Theoretical calculations for the differential spectrum of transition radiation from a stack of foils

QU WEIXING

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

XU ZHIZHAN

(Center of Condensed Matter and Radiation Physics, CCABT (World Lab.),

and

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 12 October 1987; revised 30 January 1988)

Abstract

On the basis of transition radiation from a single foil, the formulas of differential quantum spectrum of transition radiation from a stack of foils are derived with the superposition of radiation field and of radiation intensity. Using the formula of differential spectrum of incoherent transition radiation, we calculate the corresponding spectra produced by 54-MeV-electron respectively passing through the stack of beryllium foils (18 foils), magnesium foils (12 foils), and aluminium foils (12 foils). The results agree with the experiment.

Key words: transition radiation; stack of foils; soft Xray