

# 二维光学沃尔什-哈特曼变换\*

陈 岩 松

(中国科学院物理研究所, 北京)

## 提 要

从光学变换的基本方程出发,分析了变换所需的空域调制型全息透镜的相位误差,提出用计算机产生全息图和光学全息相结合的方法产生高精度的二维变换全息透镜。在实验上实现了二维32序的光学沃尔什-哈特曼变换,实验结果与理论计算一致。

关键词: 光学变换。

## 一、引 言

光学图像与信息处理以光速进行,具有在三维空间中对数据进行二维平行处理的特点,对二维数组的运算可以通过以光速进行的并行处理而一次完成。因此光学方法在信息处理与计算领域中,越来越受到重视。但是除光学傅里叶变换外,用光学方法实现一般的线性变换至今还没有理想的解决方法。近年来,光学普遍变换的研究提出了解决此类问题途径。

光学普遍变换的理论<sup>[1~4]</sup>指出,对于任何一个线性变换,一定存在一个由全息透镜组成的相干光学系统去实现它。这一理论已经通过沃尔什等几个低序的光学变换的实现得到了证实<sup>[5~7]</sup>。在光学普遍变换的实验研究中,由低序变换到高序变换,近来取得了明显的进展,实现了32序和64序的一维沃尔什-哈特曼变换<sup>[8,9]</sup>。但是,只有实现了二维的光学变换才能充分体现光学并行处理与计算的优点。因此进行二维光学变换的研究更为重要。

从一维变换到二维变换,碰到的主要问题是传统的计算机全息图在取样点离开中心位置时引起相位误差,以及在高序变换中因取样数太多而使全息透镜的制造十分困难。本文从光学普通变换的基本方程出发,分析研究了全息透镜因取样点位置的偏离而导致的相位误差,导出了表达式。用计算机产生全息图和光学全息相结合的方法,产生二维光学变换所需的全息透镜,并作二维32序光学沃尔什-哈特曼变换的实验研究,对二维光学普遍变换进行了某些讨论。

## 二、变 换 透 镜

由两块傅里叶透镜和一块全息透镜组成的共焦五平面光学普遍变换系统<sup>[8,9]</sup>,其光学普遍变换的基本方程

$$F(k) = \sum_{j=1}^{N1} T(k, j)f(j), \quad (1)$$

收稿日期: 1988年2月29日; 收到修改稿日期: 1988年9月14日

\* 本工作获国家自然科学基金和中国科学院基金支持。

$$T(k, j) = \sum_{n=1}^N G(k, n)H(n)G(n, j), \quad (2)$$

$$G(n, j) = \exp\left(\frac{-i2\pi nj}{N}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{r_1 n}{N}\right), \quad (3)$$

$$G(k, n) = \exp\left(\frac{-i2\pi kn}{N_2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{rk}{N_2}\right), \quad (4)$$

$$H(n) = A(n) \exp[i\varphi(n)], \quad (5)$$

$$j=1, 2, \dots, N_1, n=1, 2, \dots, N, k=1, 2, \dots, N_2, \quad (6)$$

式中  $f$  与  $F$  分别是输入函数和相应的输出变换谱,  $T$  是所需的变换矩阵,  $G$  是自由空间传播矩阵,  $H$  是全息透镜的振幅相位分布,  $N_1, N_2$  与  $N$  分别是输入平面、输出平面与全息透镜平面上的取样点数。(3)式与(4)式中的  $\operatorname{sinc}$  函数因子来自取样光孔衍射效应的贡献<sup>[10]</sup>, 参数  $r_1$  与  $r$  分别是输入与全息透镜平面上取样单元的光孔比。

同上述方程组共存的一组么正条件是

$$\begin{cases} \frac{\Delta x_1 \Delta x}{f_0 \lambda} = \frac{1}{N}, \\ \frac{\Delta x \Delta x_2}{f_0 \lambda} = \frac{1}{N_2} \quad (N_1 \cdot N_2 = N, N_1 = N_2) \end{cases} \quad (7)$$

这里  $f_0$  是傅氏透镜的焦距,  $\Delta x_1, \Delta x_2$  与  $\Delta x$  分别是输入、输出与全息透镜平面上的取样周期,  $\lambda$  是光波长。

对于任一给定的线性变换  $T$  及序数  $N_1$ , 按照上述基本方程, 不难求得为实现给定变换  $T$  所需的全息透镜的振幅与相位分布  $H$ , 并且根据么正条件(7)式确定该变换系统的实验参数。按照求得的振幅与相位分布, 产生变换所需的全息透镜通常有两种类型: 一种是振幅与相位为纵向调制的或称  $z$  向调制的全息透镜。此类器件所能达到的振幅与相位精度不高, 当取样数众多时, 研制是十分困难的; 另一种是横向调制型的所谓计算机产生的全息图。对于这种空间横向调制型的全息透镜, 可以达到很高的振幅与相位精度。但是分析表明, 存在着偏离取样中心点位置而引起的相位误差。

设  $\Delta n$  为全息透镜横向调制所需的取样点位置偏离量, 则在(3)与(4)式中由此而引起的相位附加量为

$$\Delta\varphi(n, j) = \frac{2\pi \Delta n j}{N}, \quad (8)$$

$$\Delta\varphi(k, n) = \frac{2\pi k \Delta n}{N_2}. \quad (9)$$

可见, 相位附加量是同输入输出平面上的取样点位置有关的, 随  $j, k$  数值的增大而增加。当  $j, k = N_2$  时, 为

$$\Delta\varphi(n, j) = 2\pi \Delta n / N_2, \quad (10)$$

$$\Delta\varphi(k, n) = 2\pi \Delta n. \quad (11)$$

因为  $|\Delta n| \leq 0.5$ , 所以(10)式所示的相位附加量较小, 一般可以忽略, 但是(11)式所示的附加量却在整个  $2\pi$  范围内变化。因此, 在光学变换中采用空间横向调制型的全息透镜将导致相当大的变换误差。以往的一维变换中, 我们让变换在标的  $x$  方向进行, 让全息透镜的振幅与相位调制在坐标的  $y$  方向进行, 这样可避免变换方向因偏离取样点中心位置而引起的相位

误差,同时又可得到所需的振幅与相位精度。然而在二维光学变换中,这种使变换方向与调制方向互相垂直的方法自然已无法适用。

二维变换的另一个问题是,全息透镜的取样单元数同变换序数成四次方比例关系,对于高序变换,因取样数太多致使设计与制造全息透镜非常困难。例如对于32序的光学变换,取样数就多达 $10^6$ 量级,要产生一块取样数如此众多的全息透镜绝非易事。因此,对于二维变换,特别在高序数情况下,如何产生变换所需的全息透镜将是研究的重点。

### 三、二维变换全息透镜的产生

以上分析表明,采用单纯空间横向调制型的计算机产生全息图的方法将不能得到满足二维变换要求的全息透镜。为此,我们提出用光学全息与计算机产生全息图相结合的光电混合方法产生二维变换所需的全息透镜。

在由两块傅氏透镜和一块全息透镜组成的沃尔什-哈特曼光学变换系统中, $x$ 与 $y$ 两个相互垂直的变换方向是可以单独处理的。因此,将两块一维变换的全息透镜相互垂直放置,原则上是可以完成所需的二维变换。但由于全息透镜的衍射损耗太大,实际上很难实现。使用光学全息方法,将两块一维变换的全息透镜的功能做在一块二维变换的全息透镜之中,是完全可能的。图1是用光学全息产生二维变换全息透镜的示意图。图中的两个完全相同的一维全息透镜是一维变换中所用的高精度的计算机产生的全息图。它们互相垂直放置,让全息透镜 $H_x$ 的正一级衍射光波与 $H_y$ 的负一级衍射光波叠加在记录干板 $P$ 处,其中 $H_x$ 的光波垂直入射, $H_y$ 的光波以 $\alpha$ 角度入射,则光强分布为

$$I = \left| H_x + H_y^* \exp\left(\frac{i2\pi}{\lambda} \sin\alpha \cdot y\right) \right|^2$$

$$= H_x^2 + H_y^2 + H_x^* H_y^* \exp\left(\frac{i2\pi}{\lambda} \sin\alpha \cdot y\right) + H_x H_y \exp\left(-\frac{i2\pi}{\lambda} \sin\alpha \cdot y\right), \quad (12)$$

(12)式中第四项就是二维变换所需要的振幅相位分布,其中指数部分的作用恰好使得变换结果同零级光分离而不受干扰。这只需选择合适的 $\alpha$ 角度就能达到目的。

通过上述方法,使用两块完全相同的一维光学变换全息透镜,可以得到变换所需的二维

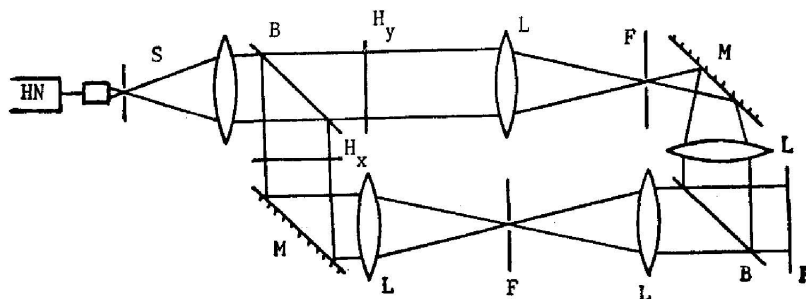


Fig. 1 Scheme of generating 2-D hologram by using two 1-D computer generated holograms

HN: He-Ne laser, S: spatial filter, B: beam splitter,  $H_x$ ,  $H_y$ : 1-D hologram, L: lens, F: 1-order pass filter, M: mirror, P: photoemulsion plate

全息透镜,其振幅与相位分布的精度由计算机产生的一维高精度的全息图决定,同时还消除了因偏离取样中心位置而带来的相位误差。

#### 四、二维 32 序光学沃尔什-哈特曼变换

该二维光学变换的基本方程是两套在  $x$  与  $y$  两个垂直方向上相对独立、在形式上完全相同的方程组,即表达式(1)至(7)。我们让(3)式与(4)式中的  $\text{sinc}$  因子分别归入全息透镜和输出结果项中,则全息透镜的振幅与相位分布可以从下式求得

$$H(n) = H_s(n) / \text{sinc}\left(\frac{r_1 n}{N}\right), \quad (13)$$

$$H_s(n) = \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} \exp\left(\frac{i2\pi nk}{N_2}\right) W(k, j) \exp\left(\frac{i2\pi jn}{N_1}\right), \quad (14)$$

式中  $W$  是 32 序的沃尔什-哈特曼矩阵,它可以通过一个递推公式求出。设  $m$  与  $M$  分别是该矩阵的级数与序数,两者的关系为

$$M = 2^m, \quad (15)$$

递推公式为

$$W(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$W(m) = \begin{pmatrix} W(m-1) & W(m-1) \\ W(m-1) & -W(m-1) \end{pmatrix}.$$

因此 32 序的沃尔什-哈特曼矩阵就是  $W(m=5)$ 。

二维变换系统的设计及其参数同一维变换系统的完全一样,即整个光学变换系统,是由两块焦距为 415 mm 的傅氏透镜  $L$  和一块二维全息透镜  $H$  所组成,如图 2 所示。用氦氖激光作光源,系统中各元件之间的距离均等于透镜之焦距,输入平面  $P_1$  与全息透镜的取样周期相同,均为  $14.7 \mu\text{m}$ ,谱平面即输出平面  $P_2$  的取样周期是输入平面的 32 倍。变换系统中所用的二维全息透镜是通过上节中描述的方法产生的。即首先从基本方程求得全息透镜的振幅相位分布,通过计算机产生具有如此振幅相位分布的一维全息透镜,然后用光学全息的方法,用两个相同的一维全息透镜合成而产生变换所需的二维全息透镜。

为了使二维光学沃尔什变换的谱便于识别,在实验中采用了一组简单的二维图形作为输入函数。它们是长宽分别为输入平面取样周期  $a$  的整数倍的一些矩形光孔:  $32a \times 32a$ 、 $32a \times 16a$ 、 $32a \times 8a$ 、 $16a \times 16a$ 、 $8a \times 8a$  和  $4a \times 4a$ 。这些简单输入函数的沃尔什变换谱,通过理论计算,很容易知道它们的谱线分布位置。以  $(x, y)$  坐标形式表示各取样点位置,则各输入函数及它们相应的谱线位置列于表 1 中。

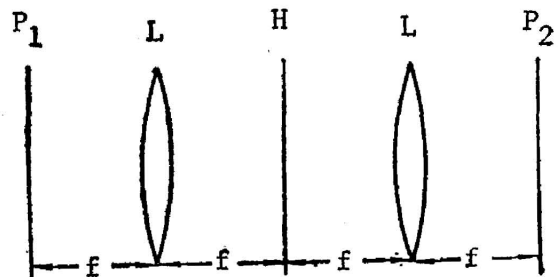


Fig. 2 Scheme of a coherent system for performing an optical transform.

$P_1, P_2$ : input and output plane,  $L$ : Fourier lens,  $H$ : hologram for transforming,  $f$ : focal length

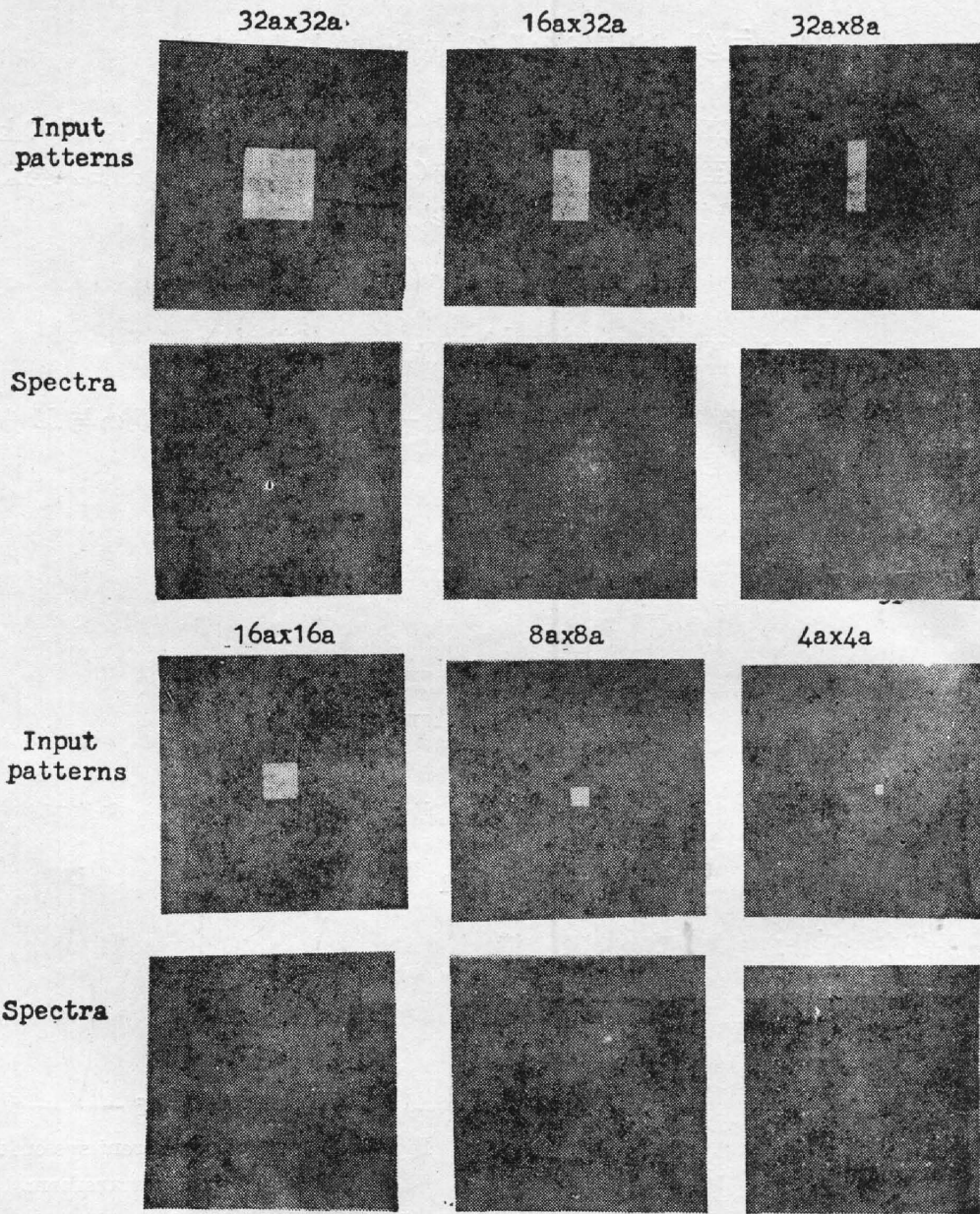


Fig. 3 Walsh-Hadamard transform spectra of some specific patterns

实验系统需要仔细地调节,使得二维全息透镜的中心精确地处于变换系统的光轴位置。然后把载有输入函数的输入片放置于输入平面。二维的沃尔什变换谱将分布在输出平面的一级衍射区域。由于制作二维全息透镜时选择了合适的参考角  $\alpha$ , 所以保证了一级衍射区不受其它衍射光的干扰。实验结果以照片形式显示于图 3 中, 它表明各输入函数的沃尔什变换谱同理论计算的结果(表 1)是完全一致的。

Table 1 Walsh-Spectra positions of some specific input function

Input function	Walsh-spectra position ( $x, y$ )							
$32a \times 32a$	1, 1							
$32a \times 16a$	1, 1 17, 1							
$32a \times 8a$	1, 1 9, 1 17, 1 25, 1							
$16a \times 16a$	1, 1    1, 7 17, 1    17, 17							
$8a \times 8a$	1, 1    1, 9    1, 17    1, 25 9, 1    9, 9    9, 17    9, 25 17, 1    17, 9    17, 17    17, 25 25, 1    25, 9    25, 17    25, 25							
$4a \times 4a$	1, 1    1, 5    1, 9    1, 13    1, 17    1, 21    1, 25    1, 29 5, 1    5, 5    5, 9    5, 13    5, 17    5, 21    5, 25    5, 29 9, 1    9, 5    9, 9    9, 13    9, 17    9, 21    9, 25    9, 29 13, 1    13, 5    13, 9    13, 13    13, 17    13, 21    13, 25    13, 29 17, 1    17, 5    17, 9    17, 13    17, 17    17, 21    17, 25    17, 29 21, 1    21, 5    21, 9    21, 13    21, 17    21, 21    21, 25    21, 29 25, 1    25, 5    25, 9    25, 13    25, 17    25, 21    25, 25    25, 29 29, 1    29, 5    29, 9    29, 13    29, 17    29, 21    29, 25    29, 29							

## 五、结 论

由两块傅里叶透镜和一块全息透镜组成的相干光学系统, 可以进行二维高序的光学普遍变换。在实验中实现了二维 32 序的光学沃尔什-哈特曼变换, 实验变换谱同理论计算结果一致。

在使用光学全息方法合成二维全息透镜过程中, 控制好全息干板的暴光与处理, 以获得尽可能大的线性动态范围是十分重要的。否则将引入较大的非线性失真误差。

## 参 考 文 献

- [1] 霍裕平, 杨国桢, 顾本源; 《物理学报》, 1975, **24**, No. 6 (Nov), 438~449; 1976, **25**, No. 1 (Jan), 31~46.
- [2] 霍裕平; 《物理学报》, 1978, **27**, No. 5 (Sep), 487~495.
- [3] 杨国桢; 《物理学报》, 1981, **30**, No. 10 (Oct), 1340~1350.
- [4] Benyuan Gu, et al.; *Appl. Opt.*, 1986, **25**, No. 18 (15 Sep), 3197~3206.
- [5] 陈岩松, 王玉堂, 李秀英; 《物理学报》, 1980, **29**, No. 10 (Oct), 1307~1314.
- [6] 郑师海, 杨国桢等; 《物理学报》, 1986, **35**, No. 4 (Apr), 529~534.
- [7] 郑师海, 董碧珍, 王玉堂, 陈岩松; 《光学学报》, 1987, **7**, No. 3 (Mar), 236~241.
- [8] 陈岩松, 郑师海, 李德华; 《物理学报》, 1988, **37**, No. 2 (Feb), 261~268.
- [9] Yan-Song Chen et al.; *Appl. Opt.*, 1988, **27**, No. 12 (15 June), 2608~2611.
- [10] 陈岩松, 郑师海, 王玉堂, 董碧珍; 《物理学报》, 1986, **35**, No. 10 (Oct), 1390~1394.

## 2-Dimensional optical Walsh-Hadamard transform

CHEN YANSONG

*(Institute of Physics, Academia Sinica, Beijing)*

(Received 29 February 1988; revised 14 September 1988)

### Abstract

Based on the equations of the optical transform, phase errors of the holographic lens used in a transform caused by space-transverse-modulation is analysed, and a method of computer generated hologram combined with optical holography is proposed to generate a 2-dimensional (2-D) holographic lens suitable for 2-D transform. The 2-D Walsh-Hadamard transform in 32-sequence is optically realized. The experimental results are in agreement with the theoretical calculations.

**Key words:** optical transform.