

非相干光实现的二维复数 离散傅里叶变换

张 莉 刘立人

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

本文给出了用非相干光束来实现二维复数离散傅里叶变换的方法。建立了一个多成像光学系统。此系统充分利用了光的平行处理特性,二维数据可同时处理。光学上的复数表示可采用二种编码方法来实现。我们选取了 $N=6$ 二维输入数据来验证上述方法,实验所获得的结果与计算机模拟相一致。

关键词: 离散傅里叶变换, 编码, 光学多成像。

一、前 言

离散傅里叶变换是信号处理中的一个重要工具。通常情况下是用数字计算机来实现。由此得到的结果是比较精确的。但计算速度慢,虽然快速傅里叶变换算法可以将其速度提高 $(N/\log_2 N)$ 倍,但当取样值 N 很大时,所需时间仍很长。而且,当它用作处理二维信号时,就不能同时处理,而是将其转化成一维信号串行处理。因而数字计算机不能满足实时处理的要求。由于光学系统中本身固有的并行处理能力,以及光作为信息载体可以克服以上缺点。因此用光学方法实现离散傅里叶变换引起了广泛注意。用光学处理又可分为相干处理和非相干处理两种。相干噪声,以及输入形式(相干光空间调制器)限制了相干光学系统的使用。因此,人们把大量工作集中于非相干光学系统。1974年 Bocker^[1]使用一非相干电子光学模拟方法实现了一维离散傅里叶变换,他把一个复数用四个实数值表示。但能实现全平行处理。1978年, Goodman等^[2]用三个实数值表示一个复数,建立了全并行非相干光学系统,实现了一维离散傅里叶变换。1988年, Huang等^[3]使用多通道非相干光学相关器也实现了一维六点复数离散傅里叶变换。然而,在光信息处理中一般输入为二维图像,二维离散傅里叶变换更具有实用性。本文报道用非相干光学多成像系统来实现的二维离散傅里叶变换。

二、数 学 方 法

由于非相干光学系统一般只能对非负输入数值响应。因此,首先要解决光学上的复数运算。本文采用以下的方法,将任一复数分解成三个分量即:(如图1)

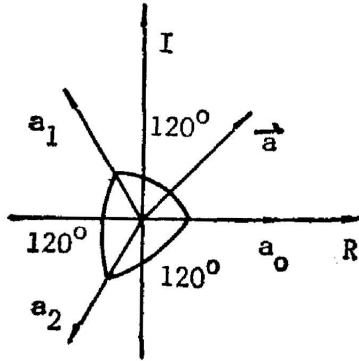
$$a = a^0 e^{i0} + a^1 e^{i\frac{2\pi}{3}} + a^2 e^{i\frac{4\pi}{3}}, \tag{1}$$

式中 a^0, a^1, a^2 分别为非负实数。根据这种分解法,得运算法则为

(1) 两个复数的相加为其对应分量相加,即 $c = a + b$ 可以写为

$$c^0 = a^0 + b^0, c^1 = a^1 + b^1, c^2 = a^2 + b^2. \tag{2}$$

(2) 二个复数相乘可表示为一个 3×3 矩阵与一个三维矢量相乘,即 $d = a \times b$ 则可写成如下形式



$$\begin{aligned} d^0 + d^1 e^{i\frac{2\pi}{3}} + d^2 e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ = (a^0 + a^1 e^{i\frac{2\pi}{3}} + a^2 e^{i\frac{4\pi}{3}}) \times (b^0 + b^1 e^{i\frac{2\pi}{3}} + b^2 e^{i\frac{4\pi}{3}}) \end{aligned}$$

化简可得

$$\begin{vmatrix} d^0 \\ d^1 \\ d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^0 & a^2 & a^1 \\ a^1 & a^0 & a^2 \\ a^2 & a^1 & a^0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Fig. 1 Decomposition of a complex into its three components

所以,复数运算的数学表达式,就转化成实数运算。二维离散傅里叶变换式

$$F(k, l) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot H_{mnkl}, \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots, N-1) \tag{4}$$

式中 H_{mnkl} 为离散傅里叶变换核,且 $H_{mnkl} = \exp[-i(2\pi/N)(mk + nl)]$ 。上式可以写成

$$\begin{vmatrix} F^0(k, l) \\ F^1(k, l) \\ F^2(k, l) \end{vmatrix} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \begin{vmatrix} H^0_{mnkl} & H^2_{mnkl} & H^1_{mnkl} \\ H^1_{mnkl} & H^0_{mnkl} & H^2_{mnkl} \\ H^2_{mnkl} & H^1_{mnkl} & H^0_{mnkl} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f^0(m, n) \\ f^1(m, n) \\ f^2(m, n) \end{vmatrix}, \tag{5}$$

式中 $H^i_{mnkl}, F^i(k, l), f^i(m, n), (i=0, 1, 2)$ 分别为其复数值的三个分量值。因而,二维离散傅里叶变换式可用光学方法来实现它。

三、光学方法实现的二维离散傅里叶变换

从上面的方程式(5)中可以看出,要实现二维的复数离散傅里叶变换,也就是要在光学系统中实现矩阵 $f(m, n)$ 与四维变量 H_{mnkl} 相乘。这可用以下非相干多成像光学系统来实现。如图 2 所示。

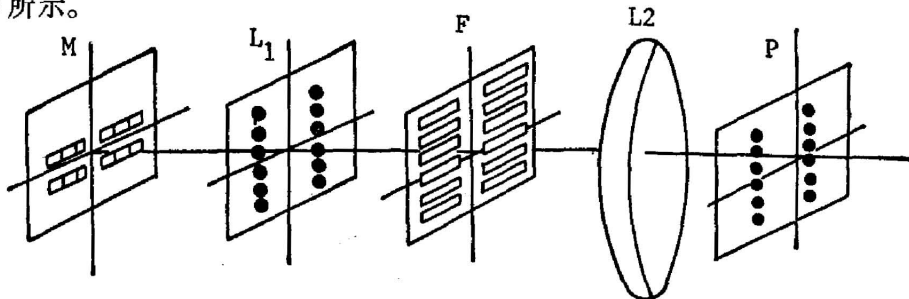


Fig. 2 Incoherent multi-imaging system

M—Input Mask, L1—Lens Array or Pinhole Array, F—Kernel Mask of DFT
L2—A Large Aperture Lens, P—Output Plane

输入二维函数用 $N \times N$ 个单元构成的模板 M 表示, 由 $3N \times N$ 个透镜或针孔阵列 L_1 成像于傅里叶变换核模板 F 上, 它是由 $3N \times N$ 个亚模板组成, 而每个亚模板上包含有 $N \times N$ 个单元。系统结构的安排使输入函数成像于傅里叶变换核模板上的每个亚模板上, 从而实现(5)式中矩阵元素的相乘运算。透镜 L_2 在 P 面上对 L_1 成像, 这将从核模板后发射出来的光会聚在输出平面 P 上, 完成(5)式中的相加运算。最后, 输出平面上就形成了一 $N \times N$ 个单元组成的输出二维图形(图示为 $N \times N = 2 \times 2$ 的情况)。

首先讨论用三个实数光学编码一个复数的方法, 根据上面所述, 任一复数 a 可用三个实分量 a^0, a^1, a^2 表示, 因此输入的 $N \times N$ 个单元中, 每个单元是由三个元素组成的, 如图 3(a) 所示。这时, 输出的 $N \times N$ 个单元的排列则如图 3(b) 所示, 每个单元由三个元素组成, 其光强值构成一个输出复数值, 而编码孔径的形状取决于透镜 L_2 对透镜或针孔阵列 L_1 成像的形状。

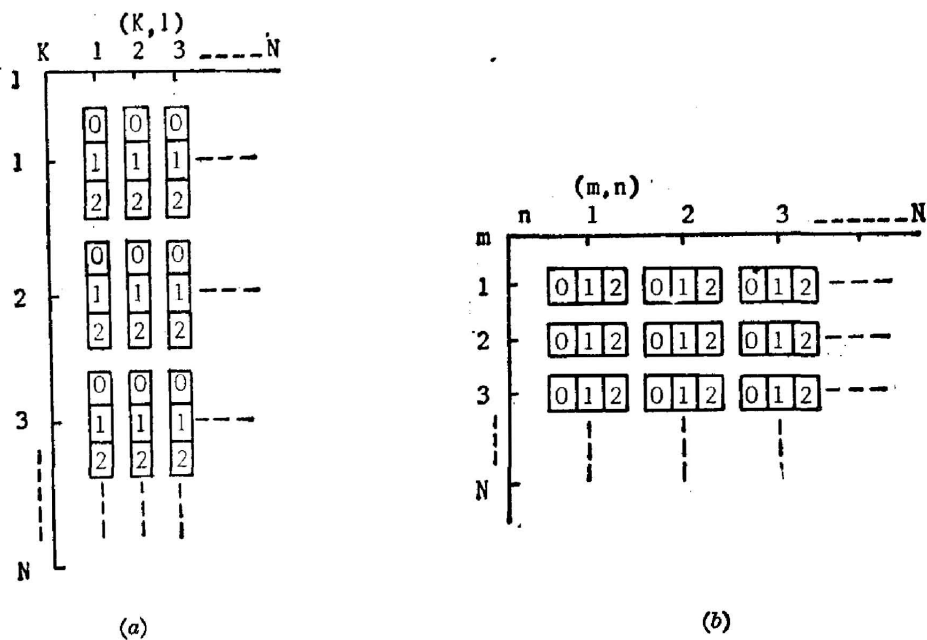


Fig. 3

(a) Arrangement of Input Mask; (b) Arrangement of output Mask

每个元素值的光学表示可采用以下两种方法:

1. 用光强的大小表示各元素的值

如图 4(a) 三个圆孔的直径相同, 但每个圆孔内发光强度则不相同。分别表示不同的元素值。

若输入函数采用此法编码, 则可用 $3N \times N$ 个发光二极管阵列来实现。但此时傅里叶变换中每个元素的大小只能用圆孔的面积来表示(如图 4(b))。这样, 光强通过不同面积的圆孔时, 就得到了调制, 输出的不同光强值分别表示两个数相乘的结果。如图 4(c) 所示。

2. 用距形面积的大小表示各元素的值

如图 5(a)。矩形横边边长为定值 d , 竖边边长大小则正比于要表示的实数值。

若输入函数采用此种方法编码, 则傅里叶变换核模板的编码则采用图 5(b) 所示的编

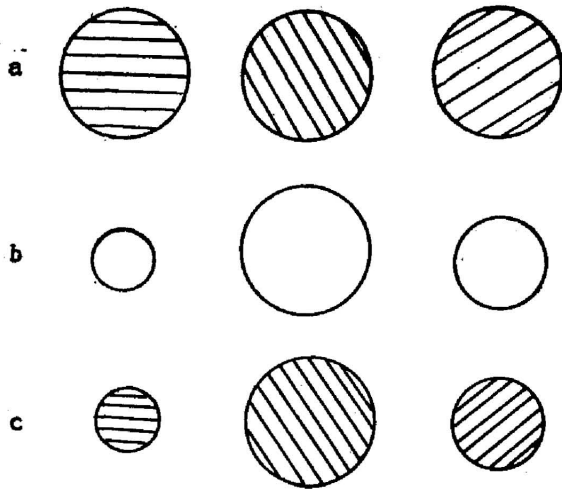


Fig. 4

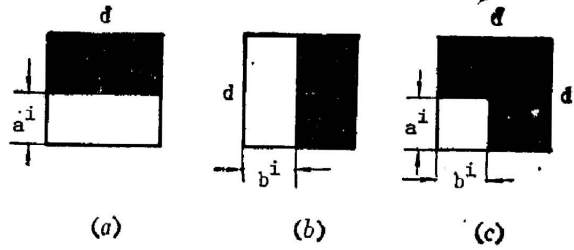


Fig. 5

码。即矩形竖边长为定值 d ，横边边长的大小正比于要表示的元素值。这样，两数相乘结果图形如图 5(c) 所示。

其次，把四维变量的变换核 H_{mnkl} 考虑安排成二维模板。 H_{mnkl} 共有 $m \times n \times k \times l$ 个数据，将其分成 $k \times l$ 组。如图 6(a) 所示。每个 (k, l) 组内有三块亚模板组成 (如图 6(b))，每个亚模板内有排列形式与输入形式相同的 $N \times N$ 个单元。但每个单元内，三个元素的排列序号则不同于输入函数形式。此序号排列如图 6(b) 中每块亚模板上所标的序号。

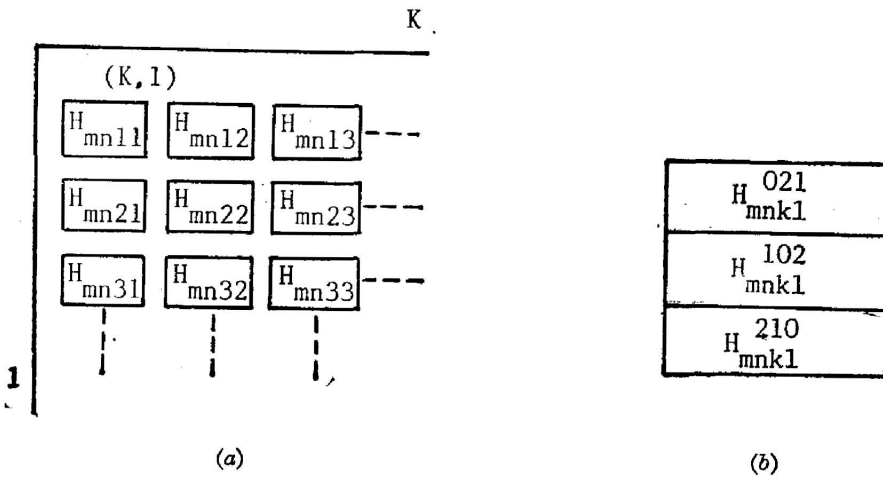


Fig. 6

(a) Arrangement of DFT Kernel Mask; (b) Arrangement of DFT Kernel Sub-mask

三、实 验

实验装置如图 2 所示的光学系统。实验中我们选取 $N=6$ 值。使得傅里叶变换核 H_{mnkl} 的值只有 0 或 1 值。因此变换核模板为一个二值模板。实现它是比较方便的。在这种情况下，输入函数不必考虑孔径形状，只进行光强编码即可，图 7 为 $N=6$ 的变换核模板

形状。为了便于观看傅里叶变换的正负频谱,这里 m, n 的取值分别为 $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ 。其他设计安排如前所述。图 7 中,每个正方形孔的边长为 0.667mm ,此时,输入为一个 6×18 圆孔阵列,圆孔直径为 0.8mm ,孔间距为 1.2mm ,针孔板 L_1 为 18×6 阵列横向孔间距为 2.55mm ,纵向孔间距为 $3 \times 2.55\text{mm}$ 。

我们选取了两个特殊的输入函数来验证上述系统实现傅里叶变换的能力。图 8(a) 为输入 $f(m, n) = 1$ 的编码函数图形的示意图。它的傅里叶变换谱应该为 δ 函数。即只在零级谱上的值不为零,其他均为零。图 8(b) 为实验获得的傅里叶变换谱。图中第 4 行第 10~12 点代表零级谱。在编码轴 0° 方向上的值(第 10 点)不为零,而沿 $120^\circ, 240^\circ$ 方向的值都为零(第 11、12 点)。因此零级谱的值为一实数值。其他各级谱沿三个方

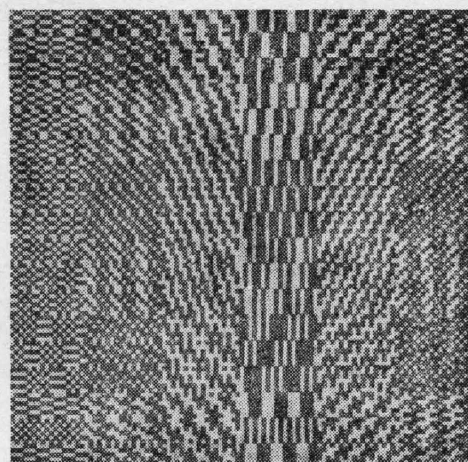


Fig. 7 The Kernel Mask of $N=6$ DFT

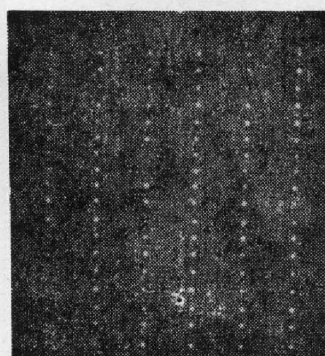
向上的值大小都相等,其等效值为零。这就是 δ 函数。图 8(c) 为其计算机模拟值。图 9(a) 是输入为 δ 函数的编码图形的示意。其傅里叶变换谱应为 1 函数。图 9(b) 为其实验结果,

```

1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0
1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0
1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0
1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0
1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0
1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0

```

(a)



(b)

```

18 18 18 18 18 18
18 18 18 18 18 18
18 18 18 18 18 18
18 12 18 12 18 12
18 12 18 12 18 12
18 12 18 12 18 12
18 18 18 18 18 18
18 18 18 18 18 18
18 18 18 18 18 18
18 12 18 36 18 12
18 12 18 0 18 12
18 12 18 0 18 12
18 18 18 18 18 18
18 18 18 18 18 18
18 18 18 18 18 18
18 12 18 12 18 12
18 12 18 12 18 12
18 12 18 12 18 12

```

(c)

Fig. 8

(a) Encoding Pattern of the Input 1 Function; (b) The Experimental Result of 1 Function;
(c) The Computer Simulant Result of 1 Function

可以看出各点在编码实轴上(0° 方向上)的值不为零,且都相等。而沿 120°, 240° 方向上的分量值都为零。图 9(c)为计算机模拟结果。图 10 为输入函数为 0 时,即三个分量值都为 1 时,其傅里叶变换频谱应该也是零函数。可以看出,沿 0°, 120°, 240° 方向上的分量值的大小都相等。这是个零函数。上述实验证明了实验结果与理论值是一致的。

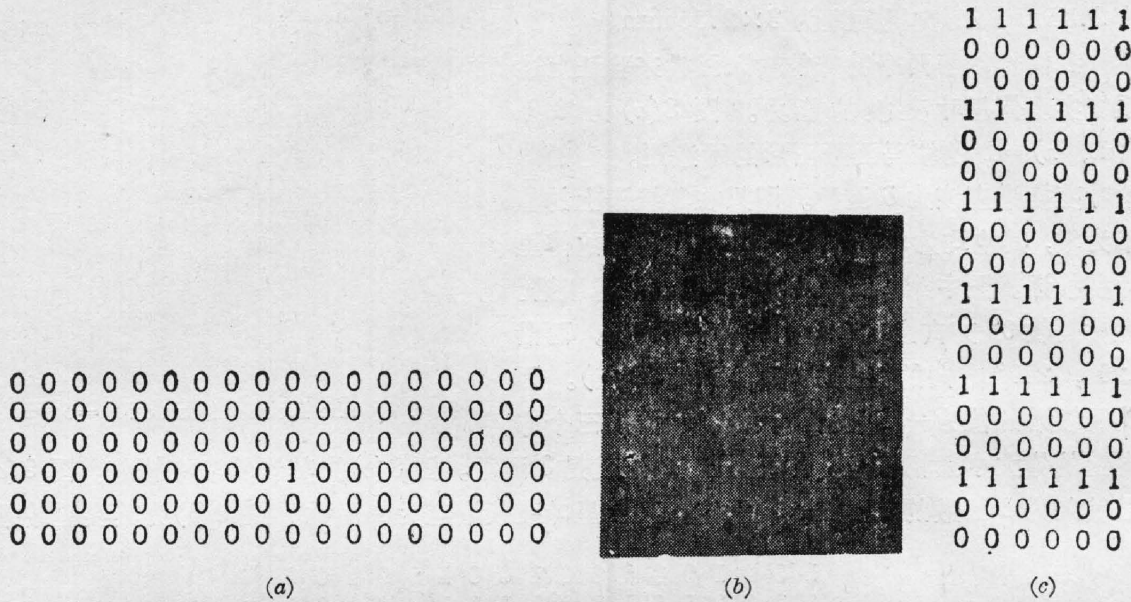


Fig. 9

(a) Encoding Pattern of the Input δ Function; (b) The Experimental Result of δ Function
(c) The computer Simulant Result of δ Function

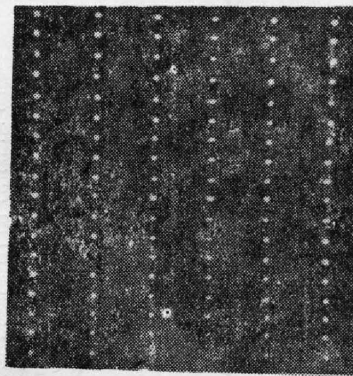


Fig. 10 The Experimental Result of Zero Function

四、误差分析

实验中误差来源主要有以下几个方面:

(1) 光源发光强度的不稳定以及输入模板的非均匀照明; (2) 模板透过率以及模板位置的调整; (3) 针孔成像使得中心处与边缘处放大倍数不同; (4) 针孔衍射; (5) 会聚透镜的像差以及通光口径的不足。其中大多数因素在理论上是可以消除的。因此本实验中误差极限主要取决于针孔成像与针孔衍射产生的误差。针孔成像引起的误差也可以尽量减小。增大输

入模板与针孔板的距离,而针孔板后面的变换核模板则应尽量靠近。取输入模板与针孔板之间的距离为 30 cm 时,可得针孔成像在边缘处引起的最大误差为 0.03%,而其衍射误差大约为其 10 倍左右^[4]。

五、结 束 语

从以上理论与实验相一致,作者认为用非相干多成像光学系统可以实现二维复数离散傅里叶变换,上述系统的优点是完全利用了光平行处理的特性,结构简便,输入,输出形式较灵活。实现离散傅里叶变换所需时间完全取决于光通过整个系统所需的时间,因而速度极快。若系统中的模板阵列被空间光调制器所代替,则整个系统可满足实时处理的要求。

参 考 文 献

- [1] R. P. Bocker; *Appl. Opt.*, 1974, **13**, No. 7 (Jul), 1670~1676.
- [2] J. W. Goodman *et al.*; *Opt. Lett.*, 1978, **2**, No. 1 (Jan), 1~3.
- [3] H. X. Huang *et al.*; *Opt. Commun.*, 1988, **68**, No. 6 (Nov), 408~411.
- [4] W. Sohneider *et al.*; *Opt. Acta*, 1975, **22**, No. 11 (Nov), 879~889.

Incoherent optical implementation of 2-D complex discrete Fourier transform

ZHANG LI AND LIU LIREN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 19 April 1989; revised 12 June 1989)

Abstract

A method is given in this paper using incoherent light to realize 2-D complex discrete Fourier transform (DFT). A multi-imaging system is set up, which fully uses the inherent property of optical parallel processing, and 2-D input data can be processed simultaneously. A complex can be optically expressed by two encoding methods. 2-D input data of $N=6$ is chosen to verify the method. The experimental results accord with the simulat results of computer.

Key words: DFT; encoding; multi-imaging