

# 染料激光瞬态过程中的噪声

朱 士 群

(中国高等科学技术中心凝聚态和辐射物理中心)  
(苏州大学物理系)

## 提 要

本文用首次通过时间的方法来分析染料激光瞬态的统计性质。提出了单模染料激光的理论模型,用白噪声简化泵浦涨落,通过福克-普朗克方程求出首次通过时间分布的平均值、方差和偏斜度的解析解。与实验数据和用蒙特卡罗模拟获得的曲线相比较,解析解的结果与实验测量和数值计算符合得很好。

关键词: 首次通过时间; 泵浦涨落; 量子噪声。

## 一、引 言

对单模染料激光输出的研究<sup>[1~8]</sup>表明,传统激光理论模型<sup>[9]</sup>不能正确地描述染料激光的统计性质。实验数据和传统理论的预期值偏离很大<sup>[1,7,8]</sup>。但它可以用代表光泵浦和染料液体扰动等外部因素的泵浦声来加以解释<sup>[1~8]</sup>。研究中还发现,泵浦噪声的相关时间不为零,而是有限值<sup>[3]</sup>。通常表征分子自发跃迁的量子噪声被略去<sup>[1~8]</sup>。然而,在描述激光瞬态过程的统计性质时,量子噪声是不可忽视的重要因素之一<sup>[6~8]</sup>。当激光远高于阈值状态下工作时,泵浦噪声和量子噪声的强度可相差6~7个数量级<sup>[7,8]</sup>,两者之间的作用不容易区分开来。首次通过时间(FPT)分布的理论分析和实验测量表明<sup>[7,8]</sup>,量子噪声和泵浦噪声的作用可通过FPT测量清楚地区分开来。要正确地描述染料激光的瞬态过程,量子噪声和泵浦噪声都应该包含在激光的理论模型中。

## 二、理论模型和公式推导

可用朗之万方程表示复振幅为  $E = E_1 + iE_2$  的激光场运动方程:

$$\frac{dE}{dt} = a_0 E - A |E|^2 E + p(t) E + q(t), \quad (1)$$

式中  $a_0$  和  $A$  分别是净增益和自饱和系数,  $p(t)$  和  $q(t)$  分别代表泵浦和量子涨落。在激光场  $E$  中自发辐射的作用可表示为加性量子噪声  $q(t)$ , 其平均值为零, 相关函数为

$$\langle q_i(t) q_j(t') \rangle = P \delta_{ij} \delta(t-t'), \quad (i, j=1, 2), \quad (2)$$

式中  $P$  是量子涨落的强度。染料液体和泵浦激光的扰动可用倍增泵浦噪声  $p(t)$  来表示,  $p(t)$  的平均值为零, 并满足

$$\langle p_i(t) p_j(t') \rangle = \frac{P' \gamma}{2} \delta_{ij} \exp[-\gamma |t-t'|], \quad (i, j=1, 2), \quad (3)$$

式中  $P'$  是泵浦涨落的强度,  $\tau = \frac{1}{\gamma}$  是有色噪声的相关时间,  $\delta_{ij}$  是克朗内克符号,  $a_0, A, \gamma, P$  和  $P'$  是实参数, 其余是复变量。

在  $\gamma \rightarrow \infty$  的极限情形下, (3) 式中有色噪声  $p(t)$  可用白噪声来代替。相应的约化概率密度  $a(x, t)$  满足福克-普朗克方程<sup>[6~8]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( a_0 x - Ax^3 + \frac{P}{2x} + \frac{1}{2} P' x \right) Q \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(P + P' x^2) Q], \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $x = |E|$  是光场振幅的模。

如果激光场光从初始值  $x=0$  增长到  $x = \sqrt{I_{\text{ref}}}$ , FPT 分布的平均值、方差和偏斜度可表示为<sup>[7, 8]</sup>:

$$\langle t \rangle = \int_0^{\sqrt{I_{\text{ref}}}} \frac{dx}{V(x)} \int_0^x \frac{d\eta V(\eta)}{D(\eta)}, \quad (5)$$

$$\langle (\Delta t)^2 \rangle = 4 \int_0^{\sqrt{I_{\text{ref}}}} \frac{dx}{V(x)} \int_0^x \frac{d\eta}{V(\eta)} \int_0^\eta \frac{d\xi V(\xi)}{D(\xi)} \int_0^\xi \frac{d\eta V(\eta)}{D(\eta)}, \quad (6)$$

$$\langle (\Delta t)^3 \rangle = 24 \int_0^{\sqrt{I_{\text{ref}}}} \frac{dx}{V(x)} \int_0^x \frac{d\eta}{V(\eta)} \int_0^\eta \frac{d\lambda V(\lambda)}{D(\lambda)} \int_0^\lambda \frac{d\xi}{V(\xi)} \int_0^\xi \frac{d\eta V(\eta)}{D(\eta)} \int_0^\eta \frac{d\eta V(\eta)}{D(\eta)}. \quad (7)$$

式中

$$V(x) = \exp[U(x)], \quad U(x) = \int^x \frac{d\eta F(\eta)}{D(\eta)}, \quad (8)$$

$$\begin{cases} F(x) = a_0 x - Ax^3 + \frac{P}{2x} + \frac{1}{2} P' x, \\ D(x) = \frac{1}{2} (P + P' x^2). \end{cases} \quad (9)$$

在激光场建立的初始阶段, 非线性项和泵浦噪声的作用甚小, 方程(9)可近似为:

$$\begin{cases} F_q(x) = a_0 x + \frac{P}{2x}, \quad (0 \leq x \leq \sqrt{P/P'}), \\ D_q(x) = P/2, \quad (0 \leq x \leq \sqrt{P/P'}). \end{cases} \quad (10)$$

从方程(5)、(6)、(7)得到的渐近解为<sup>[11]</sup>:

$$\langle t \rangle_q = \frac{1}{2a_0} \left[ C + \ln \left( \frac{a_0}{P'} \right) \right], \quad (11)$$

$$\langle (\Delta t)^2 \rangle_q = \frac{1}{(2a_0)^2} \cdot \frac{\pi^2}{6}, \quad (12)$$

$$\langle (\Delta t)^3 \rangle_q = \frac{3}{(2a_0)^3} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} - \frac{\pi^2}{3} \ln 2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^{2k-1} \frac{1}{n2^n} \right) \cong \frac{2.404}{(2a_0)^3}, \quad (13)$$

式中  $C = 0.5772 \dots$  是欧拉常数。以上三式是传统激光模型获得的理论预期值<sup>[8, 11]</sup>。

当激光趋近于稳态时, 量子噪声的作用可忽略不计, (9)式近似为:

$$\begin{cases} F_p(x) = a_0 x - Ax^3 + \frac{P'}{2} x, \quad (\sqrt{P/P'} \leq x \leq \sqrt{I_{\text{ref}}}), \\ D_p(x) = (P'/2) x^2, \quad (\sqrt{P/P'} \leq x \leq \sqrt{I_{\text{ref}}}). \end{cases} \quad (14)$$

考虑到染料激光的稳态是远高于阈值,表征瞬态过程激光涨落的 FPT 的平均值、方差和偏斜度的近似解析解,可表示为<sup>[8]</sup>:

$$\langle t \rangle = \langle t \rangle_q + \langle t \rangle_p = \frac{1}{2a_0} \left[ C + \ln \left( \frac{a_0^2}{PA} \right) + \ln \left( \frac{I_0}{1-I_0} \right) \right], \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta t)^2 \rangle &= \langle (\Delta t)^2 \rangle_q + \langle (\Delta t)^2 \rangle_p \\ &= \frac{1}{(2a_0)^2} \left[ \frac{\pi^2}{6} + \frac{2P'}{a_0} \int_{PA/P'a_0}^{I_0} \frac{dz}{z(a_1 - b_1z + c_1z^2 - d_1z^3)} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta t)^3 \rangle &= \langle (\Delta t)^3 \rangle_q + \langle (\Delta t)^3 \rangle_p \\ &= \frac{1}{(2a_0)^3} \left[ 2.404 + 12 \left( \frac{P'}{a_0} \right)^2 \int_{PA/P'a_0}^{I_0} \frac{dz}{z(a_2 - b_2z + c_2z^2 - d_2z^3 + e_2z^4 - f_2z^5)} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

式中  $I_0 = I_{\text{ret}}/I_{\text{ss}}$ ,  $z = x^2/I_{\text{ss}}$ ,  $I_{\text{ss}} = a_0/A$ , 且有

$$\begin{cases} a_1 = 1 - \frac{5}{4} \left( \frac{P'}{a_0} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{P'}{a_0} \right)^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{P'}{a_0} \right)^3, \\ b_1 = 3 - 5 \left( \frac{P'}{a_0} \right) + 2 \left( \frac{P'}{a_0} \right)^2, \\ c_1 = 3 - \frac{15}{4} \left( \frac{P'}{a_0} \right), \quad d_1 = 1, \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} a_2 = 1 - \frac{9}{4} \left( \frac{P'}{a_0} \right) + 2 \left( \frac{P'}{a_0} \right)^2 - \frac{7}{8} \left( \frac{P'}{a_0} \right)^3 + \frac{3}{16} \left( \frac{P'}{a_0} \right)^4 - \frac{1}{64} \left( \frac{P'}{a_0} \right)^5, \\ b_2 = 5 - \frac{31}{2} \left( \frac{P'}{a_0} \right) + \frac{71}{4} \left( \frac{P'}{a_0} \right)^2 - \frac{71}{8} \left( \frac{P'}{a_0} \right)^3 + \frac{13}{8} \left( \frac{P'}{a_0} \right)^4, \\ c_2 = 10 - 33 \left( \frac{P'}{a_0} \right) + \frac{69}{2} \left( \frac{P'}{a_0} \right)^2 - \frac{43}{4} \left( \frac{P'}{a_0} \right)^3, \\ d_2 = 10 - \frac{57}{2} \left( \frac{P'}{a_0} \right) + \frac{75}{4} \left( \frac{P'}{a_0} \right)^2, \\ e_2 = 5 - \frac{35}{4} \left( \frac{P'}{a_0} \right), \quad f_2 = 1. \end{cases} \quad (19)$$

偏度斜为:

$$T_s = \langle (\Delta t)^3 \rangle / \langle (\Delta t)^2 \rangle^{3/2}. \quad (20)$$

如果略去(18)和(19)式中含  $P'/a_0$  的各项, FPT 分布的方差和偏斜度的近似解析解为<sup>[10]</sup>:

$$\langle (\Delta t)^2 \rangle_1 = \frac{1}{(2a_0)^2} \left\{ \frac{\pi^2}{6} + \frac{2P'}{a_0} \left[ \frac{\left( \frac{3}{2} - I_0 \right)}{(1-I_0)^2} + \ln \left( \frac{I_0}{1-I_0} \right) - \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{P'a_0}{PA} \right) \right] \right\}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta t)^3 \rangle_1 &= \frac{1}{(2a_0)^3} \left\{ 2.404 + 12 \left( \frac{P'}{a_0} \right)^2 \left[ \left( \frac{25}{12} - \frac{13}{3} I_0 + \frac{7}{2} I_0^2 - I_0^3 \right) \frac{1}{(1-I_0)^4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln \left( \frac{I_0}{1-I_0} \right) - \frac{25}{12} + \ln \left( \frac{P'a_0}{PA} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

### 三、理论和实验的比较

两组实验数据<sup>[7,8]</sup>用来和理论值相比较。A组和B组中的实验数据,是激光分别工作

在高于阈值 6% 和 20% 的条件下测得的。用蒙特卡罗模拟法, 获得和实验数据相吻合的理论曲线, 并确定  $a_0$ ,  $A$ ,  $P$ ,  $P'$  和  $\gamma$  等参量的数值<sup>[7, 8]</sup>。A 组:  $a_0 = 0.7 \times 10^6 \text{ sec}^{-1}$ ,  $A = 0.114 \times 10^6 \text{ sec}^{-1}$ ,  $P = 0.004 \text{ sec}^{-1}$ ,  $P' = 10^4 \text{ sec}^{-1}$ ,  $\gamma = 2 \times 10^6 \text{ sec}^{-1}$ ; B 组:  $a_0 = 2.16 \times 10^6 \text{ sec}^{-1}$ ,  $A = 2.64 \times 10^6 \text{ sec}^{-1}$ ,  $P = 0.0043 \text{ sec}^{-1}$ ,  $P' = 3 \times 10^6 \text{ sec}^{-1}$ ,  $\gamma = 2.4 \times 10^6 \text{ sec}^{-1}$ 。

作为 FPT 分布平均值的函数  $I_0$ , 绘制在图 1 中。FPT 分布的方差和偏斜度作为  $I_0$  的函数, 分别绘制在图 2 和图 3 中。

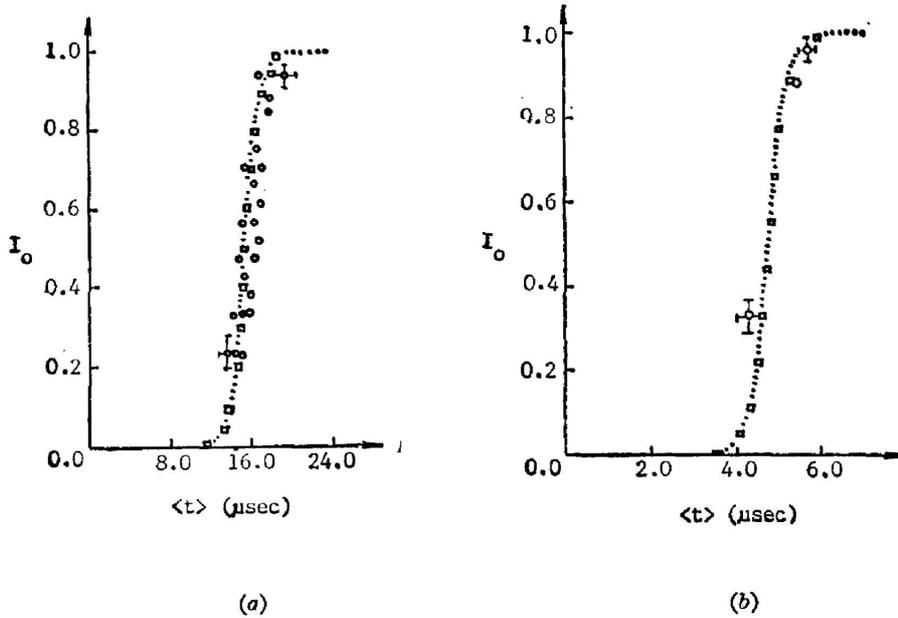


Fig. 1 Mean of the FPT distributions

(a) Set A, with the laser 6% above threshold; (b) Set B, with the laser 20% above threshold.  $\circ$ : experimental measurements;  $\square$ : numerical simulations;  $\cdots$ : eq. (15)

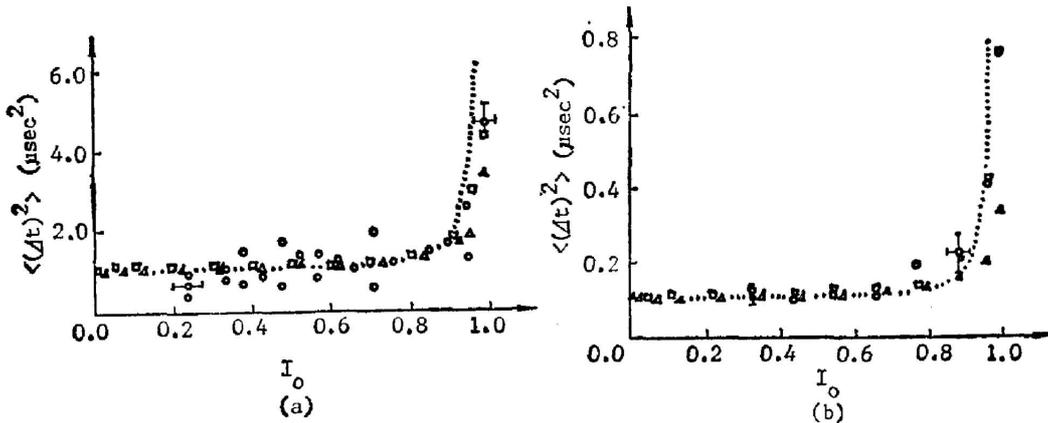


Fig. 2 Variance of the FPT distributions

(a) Set A, with the laser 6% above threshold; (b) Set B, with the laser 20% above threshold.  $\circ$ : experimental measurements;  $\square$ : numerical simulations;  $\triangle$ : eq. (16);  $\cdots$ : eq. (21);  $- \cdot -$ : eq. (12)

图 1(a)和(b)给出了 FPT 平均值的实验数据、数值模拟和从 (15) 式得到的理论预期值。从图 1 可见, (15) 式的理论预期值和数值模拟、实验数据符合得很好。事实上, 倍增泵浦噪声, 在决定 FPT 分布的平均值时作用极小, 不超过 1%。数值模拟也揭示了这一点。在模拟计算 FPT 分布的平均值时, 在图 1 所示的尺度上, 是无法区分有没有泵浦噪声的<sup>[8]</sup>。

图 2(a)和(b)中 FPT 分布的方差, 显示了有趣的特点。虽然图 2(a)中的实验数据离散程度大些, 而(b)中测量的数据少些, 但 FPT 分布的方差都随  $I_0$  趋近于 1 而迅速增加。根据 (12) 式, FPT 分布的方差是个常数<sup>[11]</sup>。这就清楚地说明, 只有包括倍增泵浦噪声和非线性项的激光模型, 才能获得与实测相一致的结果。从 (16) 和 (21) 式得到的 FPT 分布方差的曲线, 在整个范围内与实验数据和数值模拟基本上符合得很好, 而且是目前渐近解析解中最好的结果<sup>[4, 5, 8]</sup>。

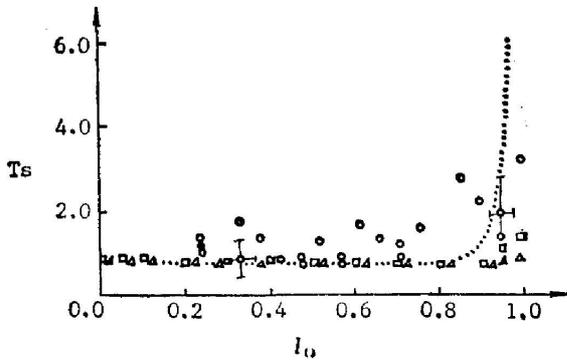


Fig. 3 Coefficient of skewness of the FPT distributions

(Set A, with the laser 6% above threshold.)  
 ○: experimental measurements; □: numerical simulations; △: eqs. (16), (17) and (20); .....: eqs. (21), (22) and (20); - - - : eqs. (12), (13) and (20)

图 3 给出了 A 组 FPT 分布的偏斜度。虽然实验数据离散较大, 但这些数据仍然表明, 偏斜度几乎保持常数, 直到  $I_0$  趋近于 1 时才增加。从传统的激光理论导出的 (12), (13) 和 (20) 式表明, 偏斜度为常数 1.14。在大部分范围内, 常数 1.14 与实验数据较好地相符。从 (16), (17), (20) 式和 (21), (22), (20) 式得到的曲线, 随  $I_0$  趋近于 1 而增加, 在大部分范围内和数值模拟的曲线相一致, 但低于实验数据。

从图 2 和图 3 可以看出, 当  $I_0$  趋近于 1 时, 由 (16)~(20) 式得到的理论预期曲线偏低。这个偏差主要是用倍增白噪声代替倍增有色噪声的近似结果所致。

#### 四、讨 论

理论分析和实验测量<sup>[7, 8]</sup>表明, 量子噪声和泵浦噪声都应该包括在染料激光的理论中。本文提出的简化激光模型是成功的, 从它导出的解析结果和实验数据、数值模拟符合得很好。

染料激光瞬态的统计分析还表明, 激光的瞬态过程可分为两个不同的区域。这两个区域的边界可由  $x_0^2 = |E_0|^2 = P/P'$  确定。当  $x < x_0$  时, 激光场处于振荡的初始阶段, 量子噪声对激光场的建立起着重要的促进作用, 泵浦噪声和非线性项可略去。染料激光模型简化为传统的激光模型, 可用线性朗之万方程来描述<sup>[11]</sup>。当  $x > x_0$  时, 激光场向稳态趋近, 泵浦涨落起主导作用, 量子噪声可忽略不计。这一近似得到的激光模型, 曾被用来计算单模稳态染料激光的强度相关函数<sup>[21]</sup>。

如果能把有色泵浦噪声引入本文提出的激光模型中, 则理论结果会得到进一步的改善。这方面的研究工作在分析稳态的归一化激光强度的方差时, 已取得了一定的进展<sup>[6]</sup>。

## 参 考 文 献

- [1] Y. Kaminishi *et al.*, *Phys. Rev. A*, 1981, **24**, No. 1 (Jul), 370~378.
- [2] R. Graham *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **48**, No. 20 (17 May), 1396~1399.
- [3] S. N. Dixit and P. S. Sahni; *Phys. Rev. Lett.*, 1983, **50**, No. 17 (25 Apr), 1273~1276.
- [4] F. de Pasquale *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **56**, No. 23 (9 Jun), 2473~2476.
- [5] R. F. Fox; *Phys. Rev. A*, 1986, **34**, No. 4 (Oct), 3405~3408.
- [6] R. F. Fox and R. Roy, *Phys. Rev. A*, 1987, **35**, No. 4 (15 Feb), 1838~1842.
- [7] R. Roy, A. W. Yu, and S. Zhu; *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **55**, No. 25 (16 Dec), 2794~2797.
- [8] S. Zhu, A. W. Yu, and R. Roy; *Phys. Rev. A*, 1986, **34**, No. 5 (Nov), 4333~4347.
- [9] [美]萨晋,斯考莱,兰姆,《激光物理学》, (科学出版社,北京,1982), 394~410.
- [10] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik; *Tables of Integrals, Series and Products*, (Academic, New York 1980), 60.
- [11] F. Haake, J. W. Hans, and R. J. Glauber; *Phys. Rev. A*, 1981, **23**, No. 6 (Jun), 3255~3271.

## Noise in dye laser transients

ZHU SHIQUN

(Center of Condensed Matter and Radiation Physics, CCAST (World Laboratory))

(Department of Physics, Suzhou University)

(Received 9 September 1988; revised 1 June 1989)

## Abstract

Statistical properties of dye laser transients are analyzed by first-passage-time technique. Both pump and quantum fluctuations effect the establishment of steady states in a dye laser. These two kinds of noise play different roles in laser transients. Meanwhile it is difficult to discern them since the pump fluctuations are six orders of magnitude larger than the quantum noise. In this paper a model of single mode dye laser with pump fluctuations simplified by white noise is presented and the analytic results of the mean, variance and skewness of first-passage-time distributions are obtained through a Fokker-Planck equation. Compared with experimental measurements and curves from Monte Carlo simulations, excellent agreement is obtained.

**Key words:** first-passage-time; pump fluctuations; quantum noise.