第9卷 第11期
1989年11月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 9, No. 11
November, 1989

反馈调谐 CO_2 激光器的静态与动态行为

陈历学 胡强生 李淳飞 李洁菲
(哈尔滨工业大学应用物理系)

N. B. Abraham
(美国 Bryn Maws 学院物理系)

提 要

建立了反馈调谐 CO_2 激光器的物理数学模型。稳态分析结果表明，只有当反馈系数大于某一临界值之后，才能出现激光器泵浦速率与激光输出之间的光学双稳性。线性稳定性分析的结果表明，系统失稳的必要条件是失谐量的 Debye 弛豫速率(反馈系统的带宽)必须超过布居反转的衰减速率。只有当激光泵浦落在某一范围内时，才出现不稳性。数值分析的结果证明了系统输出倍的周期分岔混沌行为。线性稳定性分析预言的 Hopf 分岔频率与数值分析的结果符合得很好。

关键词: 激光器；光学双稳性；不稳性。

一、引 言

最近几年，激光不稳性的研究受到广泛重视[5]，好几个学者研究过 CO_2 激光器的混沌行为 文献[1]对 CO_2 激光器进行内调制，文献[2]通过调制腔长从而调节激光器的失谐量，使原来自治方程系统变为非自治的，导致激光混沌。文献[3]则通过反馈调 Q 的方式调制腔的损耗，文献[4]曾研究了这一系统的 Hopf 分岔条件。本文讨论了反馈调谐 CO_2 激光器的静态行为和动力学行为，建立了这一系统的物理数学模型。分析结果表明，当反馈系数大于某一临界值之后，才可能出现激光泵浦与激光输出之间的光学双稳性。对动力学方程的线性稳定性分析确定了 Hopf 分岔的范围，通过计算机的数值解，证明了系统输出的周期加倍及混沌行为。

二、物 理 模 型

适当压力的 CO_2 激光器的工作物质，可以近似处理为均匀加宽的二能级原子系统，因而可以用单模激光器的 Maxwell-Bloch 方程描述：

$$\frac{dI}{dt}=-2KI+\frac{2RID}{1+\delta^2}, \tag{1a}$$

$$\frac{dD}{dt}=\gamma_{\parallel}\left[1-D-\frac{ID}{1+\delta^2}\right], \tag{1b}$$

式中 I 和 D 分别是归一化的光强和反转粒子数密度，δ 为腔频与物质共振频率之间的归一

收稿日期：1988年2月8日；收到修改稿日期：1988年10月12日

化失谐量，R 为泵浦速率，K 为腔内光强损耗系数，$\gamma_\perp$ 和 $\gamma_{/\!/}$ 分别为原子的横向和纵向弛豫速率。由方程组(1)描述的 CO_2 激光系统不存在混沌行为，为了实现 CO_2 激光器的混沌行为，必须增加微分方程的数目，或者使系统变为非自治的。

光电反馈调节 CO_2 激光器腔长的不稳系统如图1所示，输出激光的一部分照射到探测器 D 上，被转换后的光电信号经放大器 A 放大后，加到电致伸缩器 PMN 上，反馈调节激光腔的长度 l，从而调节激光腔的失谐量 δ。激光腔长度 l 的动力学变化过程，由下述 Debye 弛豫方程描述：

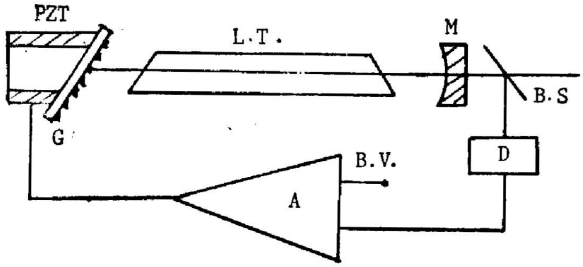

Fig. 1 Experimental setup of a CO_2 Laser with feedback control of the detuning

$$\tau\frac{dl}{dt}+l-l_0=\alpha' I, \tag{2}$$

式中 τ 是反馈调节腔长系统的响应时间，包括光电转换系统 D、电子放大器 A 以及电致伸缩器 PMN 的响应过程。α' 为反馈系统的反馈系数，包括光电转换系数、放大系数以及电致伸缩系数。l_0 是未加反馈时激光谐振腔的长度。

由失谐量 δ 的定义，以及腔频 ω_c 与腔长 l 之间的关系，得到：

$$\delta=\frac{\omega_c-\omega_a}{\gamma_\perp}=\left[\frac{2\pi mc}{2l}-\omega_a\right]\Big/\gamma_\perp, \tag{3}$$

式中 ω_a 是原子跃迁频率，m 为纵模数。将上式的 δ-l 关系代入到方程(2)中，得到失谐量 δ 满足的微分方程为：

$$\tau\frac{d\delta}{dt}=\left(\delta+\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}\right)\left\{1-\left(\delta+\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}\right)\left[\left(\delta_0+\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}\right)^{-1}+\alpha I\right]\right\}, \tag{4}$$

式中 $\alpha=\alpha'\gamma_\perp/\pi mc$。方程(1)和(4)就是描述反馈调腔长 CO_2 激光器的一组微分方程。

三、稳 态 行 为

令方程(1)和(4)中的时间微分项为零，我们得到激光系统的稳态方程：

$$D_s=(1+\delta_s^2)/A, \tag{5a}$$

$$I_s=A-(1+\delta_s^2), \tag{5b}$$

$$\left(\delta_s+\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}\right)\left[\left(\delta_0+\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}\right)^{-1}+\alpha I_s\right]=1, \tag{5c}$$

式中 $A=R/K$，为等效泵浦参量。由方程(5b)和(5c)消去 δ_s 之后，得到上述两个 I_s 和 δ_s 的稳态方程：

$$I_s=A-1-\left\{\left[\left(\delta_0+\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}\right)^{-1}+\alpha I\right]^{-1}-\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}\right\}^2。 \tag{6}$$

图2给出了按照方程(6)绘制的 I_s-A 稳态关系图。从图上可以看到，随着反馈系数 α 的增加，反馈作用加强，较为容易实现双稳性输出。当反馈系数 α 较小时，双稳性行为消失，激光器的泵浦 A 与激光输出 I_s 之间呈现单值性，如曲线1所示。

双稳性存在的条件由 $dA/dI_s<0$ 的条件来判断，即 I_s-A 曲线是否存在负斜率不稳定

区[6]。在 $\alpha>0$ 的情况下，由方程(6)可以导出双稳态存在的必要条件为：

$$\left[\left(\delta_0+\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}\right)^{-1}+\alpha I_s\right]^{-1}-\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}=\delta_s>0\quad(\alpha>0)\tag{7}$$

考虑到稳态方程(5c)，上式可以进一步改写为：

$$2\alpha\left(\delta_s+\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}\right)^2\delta_s>1。\tag{8}$$

由方程(5c)知道，δ_s 随着 I_s 的增加而减小，其最大值为 $(\delta_s)_{max}=\delta_0$。根据这一极限条件，由方程(8)可以得到双稳性存在的必要条件为：

$$\alpha>\left[2\delta_0\left(\delta_0+\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}\right)^{-1}\right]=\alpha^{th}。\tag{9}$$

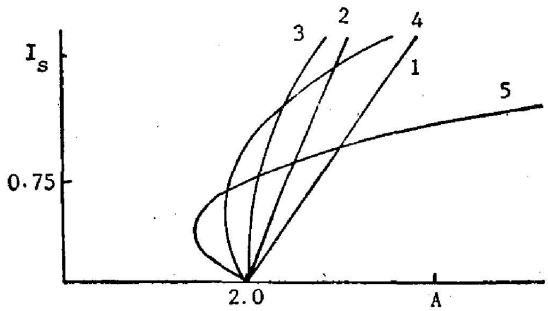

Fig. 2　Sample steady state curves (I_s–A) for different paramater conditions

1. $\alpha=0$　2. $\alpha=9.55\times10^{-13}$, 3. $\alpha=1.91\times10^{-12}$, 4. $\alpha=3.82\times10^{-12}$, 5. $\alpha=7.64\times10^{-12}$ ($\delta_0=1$, $\omega_a/\gamma_\perp=4.4\times10^5$)

即只有当反馈系数 α 大于某一临界值 α^{th} 之后才有可能出现光学双稳性。

四、稳定性分析

用 I_1、D_1 和 δ_1 分别表示对应于稳态解 I_s、D_s 和 δ_s 的小扰动，在方程(1)和(4)中，对小扰动项取线性近似，并考虑到稳态方程(5)，我们得到小扰动 I_1、D_1 和 δ_1 满足的微分方程：

$$\frac{dI}{dt}=\frac{2I_sKA}{1+\delta_s^2}D_1-\frac{4KI_s\delta_s}{1+\delta_s^2}\delta_1,\tag{10a}$$

$$\frac{dD_1}{dt}=-\frac{\gamma_{/\!/}}{A}I_1-\frac{A\gamma_{/\!/}}{1+\delta_s^2}D_1-\frac{2(\gamma_{/\!/}/A)}{1+\delta_s^2}I_s\delta_s\delta_1,\tag{10b}$$

$$\frac{d\delta_1}{dt}=-\alpha\tau^{-1}\left(\delta_s+\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}\right)^2I_1-\tau^{-1}\delta_1。\tag{10c}$$

假设上述小扰动方程具有形如 $X_1=X_{10}\exp(\lambda t)$ 的形式解，则由方程(10)容易得到下述本征值方程：

$$\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0,\tag{11a}$$

$$a_1=\tau^{-1}+\frac{A\gamma_{/\!/}}{1+\delta_s^2},\tag{11b}$$

$$a_2=\frac{\gamma_{/\!/}\tau^{-1}A+2K\gamma_{/\!/}I_s}{1+\delta_s^2}-\frac{4K\alpha\tau^{-1}}{1+\delta_s^2}\left(\delta_s+\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}\right)^2I_s\delta_s,\tag{11c}$$

$$a_3=\frac{2K\gamma_{/\!/}\tau^{-1}I_s}{1+\delta_s^2}-\frac{4K\alpha\tau^{-1}\gamma_{/\!/}}{1+\delta_s^2}\left(\delta_s+\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}\right)^2I_s\delta_s。\tag{11d}$$

本征值 λ 满足 $\mathrm{Re}(\lambda)=0$, $\mathrm{Im}(\lambda)\neq0$ 的点，将对应于系统的失稳临界点，即 Hopf 分岔点。这时，本征值 λ 的解为一纯虚数。不失一般性，我们可以假设在 Hopf 分岔点的本征值 $\lambda=ib$，代入到本征值方程(11a)中，我们得到：

$$b^2=a_2=a_3/a_1,\tag{12a}$$

$$a_2>0,\tag{12b}$$

$$a_3/a_1>0。\tag{12c}$$

上面三个方程成立的条件是本征值 λ 为某一纯虚数的条件，因此也就对应于激光器的失稳条件。

由方程(12a)的条件 $a_1a_2=a_3$，我们得到：

$$(a_1-\gamma_{/\!/})4\alpha\tau^{-1}KI_s\delta_s\left(\delta_s+\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}\right)^2=a_1(\gamma_{/\!/}\tau^{-1}A+2K\gamma_{/\!/}I_s)-2K\gamma_{/\!/}\tau^{-1}I_s。\tag{13}$$

由方程(12b)我们得到：

$$(\gamma_{/\!/}\tau^{-1}A+2K\gamma_{/\!/}I_s)>4K\alpha\tau^{-1}I_s\delta_s\left(\delta_s+\frac{\omega_a}{\gamma_\perp}\right)^2。\tag{14}$$

上式两端同乘$(a_1-\gamma_{/\!/})$，再利用 $a_1a_2=a_3$ 的结果，方程(13)则为：

$$2K(\tau^{-1}-\gamma_{/\!/})I_s>\gamma_{/\!/}\tau^{-1}A。\tag{15}$$

显然，上述不等式成立的条件必然包含下述两个条件：

$$\tau^{-1}>\gamma_{/\!/},\qquad (必要条件),\tag{16a}$$

$$I_s>\frac{\gamma_{/\!/}\tau^{-1}}{2K(\tau^{-1}-\gamma_{/\!/})}A,\qquad (重要条件)。\tag{16b}$$

条件方程(16a)是不等式(15)成立的必要条件。这一结果表明，只有当反馈系统的德拜弛豫速率 τ^{-1} 大于原子纵向弛豫速率 $\gamma_{/\!/}$ 的情况下，才可能导致激光器的不稳性。这一结果亦可以理解为由于原子的纵向弛豫过程跟不上反馈系统的弛豫过程，才可能导致激光器的不稳性。这样，原子纵向弛豫过程与反馈系统的 Debye 弛豫过程之间的竞争，将是系统不稳性的一个重要物理起源。

对于失稳条件(16b)，这一条件包含 I_s 和 A 两个变量，而 I_s 和 A 之间在这一失稳条件中呈线性关系。但是应当注意到，I_s 和 A 之间还应满足稳态方程(6)。由方程(16)和(6)的联立图解如图3所示。图中的阴影部分给出了失稳区域。失稳区域与系统参量密切相关。例如，反馈系统的 Debye 弛豫时间 τ 改变时，失稳条件明显变化。当 $\tau^{-1}\gg\gamma_{/\!/}$ 时，失稳条件(16b)极易满足，在很小的激光光强下，就可以导致不稳性；当 $\tau^{-1}\sim\gamma_{/\!/}$ 时，则需要十分强的光强才可以导致不稳性。

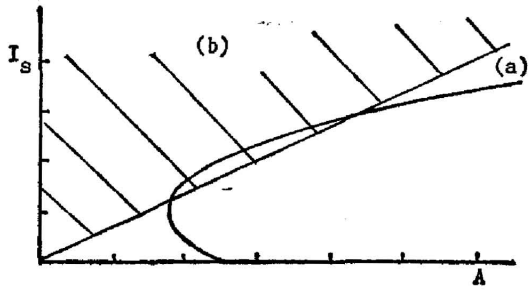

Fig. 3 Example of graphical solution for stability

(a) solution of Eq.(6); (b) solution of Eq. (16b)

由方程(12a)的 $b^2=a_2$，再利用方程(13)消去 $I_s\delta_s$ 项之后，得到 Hopf 分岔频率的表达式为：

$$\omega_p^2=b^2=\frac{\gamma_{/\!/}\tau^{-1}A+2K\gamma_{/\!/}I_s}{1+\delta_s^2}-\frac{1}{1+\delta_s^2}\frac{1}{1-\gamma_{/\!/}/a_1}\times\left\{(\gamma_{/\!/}\tau^{-1}A+2K\gamma_{/\!/}I_s)-\frac{2K\gamma_{/\!/}\tau^{-1}I_s}{a_1}\right\}。\tag{17}$$

在 $\tau^{-1}\gg\gamma_{/\!/}$ 的情况下，近似关系 $a_1\cong\tau^{-1}$，$1-\frac{\gamma_{/\!/}}{a_1}\cong1$ 是成立的，Hopf 分岔频率可以写作：

$$\omega_p^2=\frac{2K\gamma_{/\!/}I_s}{1+\delta_s^2}。\tag{18}$$

上述结果表明，Hopf 分岔频率 ω_p 与光强衰减系数 K，纵向弛豫速率 $\gamma_{/\!/}$ 直接有关，且随着

光强 I_s 的增加而增加。Debye 弛豫时间 τ 和反馈系数 α 对分岔频率 ω_p 的影响甚微。用 δ_0 近似 δ_s，令 $\delta_0=1$，Hopf 分岔频率 ω_p 为：

$$\omega_p \sim \sqrt{K\gamma_l I_s}。\tag{19}$$

五、数 值 解

为了考察反馈调谐 CO_2 激光器激光输出的动力学行为，我们给出了动力学方程(1)和(4)的数值解，数值计算的程序是四阶龙格-库打法。选择的各种参量分别为 $\tau^{-1}=7.8\gamma_l$，$\alpha=2.024\times10^{-13}$，$\gamma_l=2.5\times10^3\,\mathrm{sec}^{p-1}$，基本上是弱反馈的情形，选择不同的 I_s 和 A，将得到不同的自脉动输出，如图 4 所示。

图 4(a)给出了一个周期脉冲波形，对应的静态参量分别为 $I_0=3.23$，$A=5.10$。从图上可以看到，脉冲的峰值大约为 $I_{max}\cong29.4$，脉冲的周期 T_0 大约为 $T_0\cong2.4\times10^{-5}$sec，对应的频率为 $f_0=41.7$ kHz。

图 4(b) 给出了一个周期加倍的脉冲波形，对应的稳态参量分别为 $I_s=3.279$，$A=5.15$。从图上可以看到，脉冲的主高峰值约为 30.9，次高峰值约为 29.4，周期 $T_2\cong4.7\times10^{-5}$sec，略小于图 4(a) 给出的周期脉冲波形周期 T_0 的两倍。

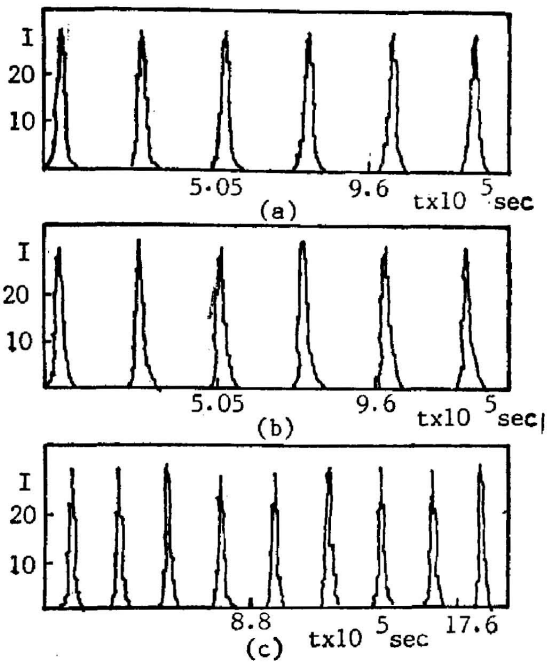

Fig. 4　Time clependence waveforms with a Larger feedback bandwidth $\tau^{-1}=7.8\gamma_l$.
(a) $A=5.10$, (b) $A=5.15$, (c) $A=5.25$
($\alpha=2.024\times10^{-13}$, $\delta_0=1.0$)

图 4(c)给出了一个混沌波的脉冲波形，对应的稳态参量分别为 $I_s=3.39$，$A=5.27$。从图上可以看到，脉冲峰值大小不等，脉冲的时间间隔亦互不相同。从数据上看，脉冲宽度略大于图 4(a)的周期波脉冲的宽度，脉冲间隔略小于图 4(a) 的周期波脉冲间隔。

六、结果与讨论

本文研究了反馈调谐 CO_2 激光器的动力学行为，分析结果同样可用于其它具有这类反馈系统的 B 类单模激光器，如红宝石、YAG、半导体激光器等。

反馈线路常常用于高稳定激光系统，如激光器的频率稳定系统或强度稳定系统。本文对这类激光系统的动力学过程的研究表明，只有当反馈系统的 Debye 弛豫速率小于布居反转的衰减速率($\tau^{-1}<\gamma_l$)时，才可以消除系统的动力学不稳性，从而实现激光系统输出光强或激光频率的稳定。

本文的结果还表明，适当控制系统参量，可以实现连续泵浦下的脉冲激光输出，且重复

频率较高，这对于要求高重复频率脉冲的科学及工程应用场合具有特殊的意义。

动力学的数值解只是部分地反映了反馈调谐 CO_2 激光器的动力学行为，关于这一混沌模型的实验工作正在进行中。

参 考 文 献

[1] F. T. Arecchi *in Instabilities and Chaos in Quantum Optics*, F. T. Arecchi and R. Harrison, eds., (Springer-Verlag, Heidelberg, 1987), **9**.

[2] J. R. Tredicce *et al.*; *Phys. Rev. A*, 1986, **34**, No. 3 (Sep), 2073～2081.

[3] T. Midavaine *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **55**, No. 19 (Nov), 1989～1992.

[4] 陈历学等;《光学学报》, 1988, **8**, No. 2 (Feb), 132～139。

[5] N. B. Abraham *et al.*; *Appl. Phys. B*, 1982, **28**, No. 2/3 (Jun/Jul), 169.

[6] 李淳飞, 陈历学;《光学学报》, 1984, **4**, No. 10 (Oct), 907～913。

Stability and dynamical behavior of a CO_2 laser with feedback control of the detuning

CHEN LIXUE, HU QIANGSHENG, LI CHUNFEI AND LI JIEFEI

(*Department of Applied Physics, Harbin Institute of Technology*)

N. B. ABRAHAM

(*Department of Physics, Bryn Mawr College, USA*)

(Received 8 February 1988; revised 12 October 1988)

Abstract

The physical and mathematical models of CO_2 laser with feedback control of detuning has been set up. The analysis of steady state shows that the optical bistability between the pump rate and the output intensity of the laser will appear when the feedback coefficient exceeds the critical value. Results of linearized stability analysis indicate that the necessary condition of the dynamical instability is that the Debye-relaxation rate of the detuning (bandwith of the feedback circuit) must exceed the decay rate of the population inversion. The instability appears only when the laser pump falls into a proper region. The behaviours of the period-doubling bifurcation and chaos have been proved by the result of numerical calculation. Th frequency of the Hopf bifurcation predicated by the stability analysis is consistent with that given by the numerical calculation.

Key words: laser; optical bistability; instability.