

无透镜夫琅和费型计算机彩虹全息图

谢敬辉 赵达尊 赵业玲 于美文
(北京理工大学工程光学系)

提 要

本文提出一种新的计算机彩虹全息图,即无透镜夫琅和费型计算机彩虹全息图,介绍了它的基本原理及物体光波的数学描述,并以彩虹全息图的信息量出发,讨论了一般计算机彩虹全息图信息量的冗余度及减少冗余信息量的方法。最后给出了无透镜夫琅和费型计算机彩虹全息图的实验结果。
关键词: 计算机全息图, 计算机彩虹全息图, 信息量, 冗余度。

一、引 言

最早发展的计算机全息三维成像是计算机傅里叶变换全息图和计算机合成全息图^[1~3],但这些系统必须以激光作光源。进入80年代以来,西德Essen大学的Bryngdahl等人在计算机全息三维成像方面作了一系列创造性的工作^[4~6],1984年他首先提出一个计算机彩虹全息图的方案,并作了实验验证^[7]。

Bryngdahl制造的计算机彩虹全息图是综合 x 方向的傅里叶变换和 y 方向的非涅耳变正校这样两种特征的全息图,除再现时要作反傅里叶变换,还要作畸变校正,以保证再现现象在 x 和 y 方向具有相同比例。Bryngdahl采用调整计算机彩虹全息图上不同 y 坐标处的水平抽样频率来校正畸变,但这样作只对固定像距有效,因此实验中只记录了一个平面物体,而视差是靠改变 x 方向载频来人为引入的。综上所述,这种计算机彩虹全息图虽然实现了白光再现,但并不是严格意义上的彩虹全息图。

本文提出一种新的计算机彩虹全息图,我们称为无透镜夫琅和费型计算机彩虹全息图。这一方案考虑到了计算机数据输出的特点,并充分调动了各种手段以减少冗余的信息量,可看成是一种非冗余计算机全息图。

二、计算机彩虹全息图的基本原理

在图1所示的两步法彩虹全息图光路中, H_M 是主全息图, $O(x_0, y_0)$ 是 H_M 再现的实像,狭缝 s 限制了再现实像 y 方向的视差,由 $O(x_0, y_0)$ 与参考波 R 干涉,形成彩虹全息图 H_R 。用计算机模拟上述过程,当要求 H_R 再现实像时,可在 P_1 位置记录,每一像点对应的物体光波是一发散球面波;当要求再现虚像时,可在 P_2 位置记录,于是每个像点对应的物体光波都是一个会聚球面波。但无论哪一种情形,球面波的分布范围都受狭缝 s 在 H_R 平面上投影孔径的限制,这个投影孔径的中心位置对于像点横向位置的信息进行了编码,而投影

孔径的高度 ΔH 对于像点纵向深度的信息进行编码。计算机彩虹全息图所记录的物体光波，就是所有球面波的线性叠加。

用计算机模拟两步法彩虹全息图，除了可实现实像和虚像外，还能灵活地实现正常体视像和赝视像：正像和倒像；三维空间像和轴断层析像，这只需适当地选择输入数据的符号或者改变数据(I/O)的语句格式即可实现。

虽然上述的计算机彩虹全息图设计思想可看作是两步法彩虹全息图的

计算机仿真，但是由于主全息图 H_M 的再现实像 $O(x_0, y_0)$ 可直接用计算机的输入数据代替，因此 H_M 的记录和再现过程可略去，两步过程又简化成了一步过程。

总之，从上面的原理分析看出，这种计算过程比起光学全息图的记录过程具有更大的灵活性。

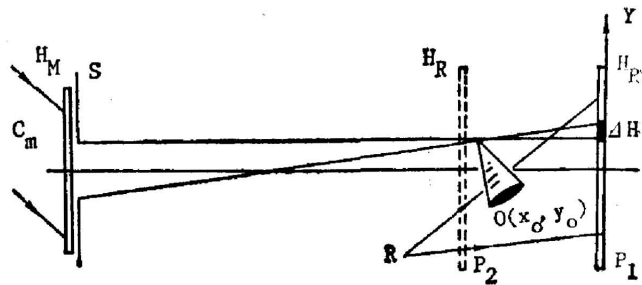


Fig. 1 A mode of CRH

三、物光波的数学描述

取图 2 所示坐标系， H_R 所在平面为 (X, Y, Z) 坐标面，它和光轴交点为 z 坐标原点。物体上某截面坐标为 $z = -z_0$ ；狭缝所在平面的 $z = -z_s$ ，其矩形尺寸为 (a_1, b_1) ；三维物体的深度范围为 (z_{01}, z_{02}) 。按上节的原理分析可知，三维物体在上述某截面上的某点物 $O_i(x_0, y_0, -z_0)$ 对应的物体光波是一有限发散球面波，它在 (X, Y) 平面的分布范围是以 (p, q) 为中心，尺寸为 (a, b) 的矩形投影孔径。取菲涅耳近似之后，位于物平面 $z = -z_0$ 上的第 i 个物体点对 H_R 贡献的复振幅可表示为

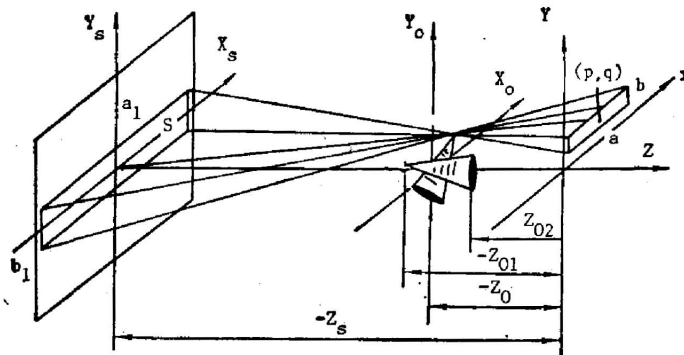


Fig. 2 The coordinate system for calculating object wave

$$\left. \begin{aligned}
 u_i(x, y) &= C_0 O_i(x_0, y_0) \psi[(x-x_0), (y-y_0); D] \text{rect} \left[\frac{(x-p)}{a}, \frac{(y-q)}{b} \right], \\
 \psi(x, y; D) &= \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda} D(x^2 + y^2) \right], \\
 D &= |z_0|^{-1}, \quad C_0 = \frac{1}{i\lambda |z_0|} \exp [ik|z_0|],
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 ψ 为 Vander Lugt 算符, C_0 为常序数。按照几何投影关系有

$$\left. \begin{aligned} a &= \left| \frac{z_0}{z_s - z_0} \right| a_1, & b &= \left| \frac{z_0}{z_s - z_0} \right| b_1, \\ p &= \left| \frac{z_s}{z_s - z_0} \right| x_0, & q &= \left| \frac{z_s}{z_s - z_0} \right| y_0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

于是, 对于物平面 $z = -z_0$ 上的全部物体点来说, 物光波的复振幅可用叠加积分来表示

$$u_0(x, y) = C_0 \iint_{\Sigma_0} O(x_0, y_0) \psi[(x-x_0), (y-y_0); D] \text{rect} \left[\frac{(x-p)}{a}, \frac{(y-q)}{b} \right] dx_0 dy_0. \quad (3)$$

依同样的方法, 与物平面 $z = -z_0$ 相距 Δz 的任意截面上的物体点产生的物光波都可表示为(3)式的形式, 只不过物体点的横向位置不同, 矩形投影孔径的中心坐标 (p, q) 就不同; 而物体截面的纵向坐标 z_0 不同, 则矩形投影孔径的高度 ΔH 也不同。最后通过复数相加, 就可求出整个三维物体 $O(x_0, y_0, z_0)$ 对应的物体光波为

$$u(x, y) = \int_{-z_0}^{-z_0 + \Delta z} C_0 \iint_{\Sigma_0} O(x_0, y_0, z_0) \psi[(x-x_0), (y-y_0); D] \text{rect} \left[\frac{(x-p)}{a}, \frac{(y-q)}{b} \right] dx_0 dy_0 dz_0, \quad (4)$$

(4)式表示的 3D 物体光波的计算过程是复数的相加, 运算中可以按(4)式的积分顺序, 首先对计算机产生的 3D 数据整序, 形成沿 z 方向的一系列切片, 然后逐个切片计算和作复数累加; 也可以直接按计算机 3D 数据的存储顺序, 逐点计算和作复数相加, 这对于某些整序工作量比较大的 3D 数据集来说, 将是十分方便的。

四、消除冗余信息量的技术

众所周知, 计算机全息三维成像系统包含的信息量是高度冗余的, 实现起来常受到计算机数据处理能力和输出设备的限制, 能否最大限度地减少全息图的冗余信息量, 就成了能否最终实现的关键。我们从下述几个方面着手来消除计算机彩虹全息图所包含的冗余信息量。

1. 消除垂直方向视差

人眼的基线在水平方向, 因此对于建立三维体视感有决定意义的乃是水平方向的视差信息, 而提供垂直方向视差的信息量则可认为是冗余的。彩虹全息图正是以这一原理出发, 用一条水平方向的狭缝限制了物体光波在垂直方向的视差, 使每个物点的信息存储在高度为 ΔH 的窄带上。这是减少三维全息图冗余信息量的一条重要措施。

如果用空间带宽积(即空间自由度) S 来表示全息图的信息量, 则可证明普通三维物体的菲涅耳全息图和消除了垂直视差信息的彩虹全息图的信息量分别为

$$S_0 = \frac{4xy}{\lambda^2} \left(\frac{x}{z_0 - |z_{02}|} + \frac{x_0}{z_0} \right) \left(\frac{y}{z_0 - |z_{02}|} + \frac{y_0}{z_0} \right), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{4(z_0 a_1 + z_s x_0)(z_0 b_1 + z_s y_0)}{\lambda^2 (z_0 + z_s)^2} \left[\frac{z_0 a_1}{(z_0 - |z_{02}|)(z_0 + z_s)} + \frac{x_0}{z_0} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{z_0 b_1}{(z_0 - |z_{02}|)(z_0 + z_s)} + \frac{y_0}{z_0} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

式中 (x_0, y_0) 为物体尺寸。 (x, y) 为全息图的尺寸。其余各几何量的意义见图 2。

如果定义信息的冗余度为^[7]

$$R = \log_2(S_0/S_1). \tag{7}$$

则 R 可以用来衡量某种技术减少冗余信息的效率。设上述两种全息图尺寸相同, $x=y=100$ mm, 物体尺寸 $x_0=y_0=20$ mm, $z_{02}=10$ mm, $|z_0|=|z_s|=250$ mm, $\lambda=0.5\mu\text{m}$, 可求出全息图垂直视差信息引起的冗余度 $R=5.58$ 。

2. 应用 Burch 型编码方法

Burch 型编码方法的要点是将普通离轴全息图函数中的零级衍射项用一常数偏置项来代替^[8]。Burch 型计算机彩虹全息图的全息图函数表示为

$$\tau_H(x, y) = 0.5\{1 + |\mu(x, y)| \cos[\Phi_R(x, y) - \Phi_0(x, y)]\}, \tag{8}$$

式中 $\mu(x, y)$ 是物光波的振幅, Φ_R 和 Φ_0 分别是参考波和物光波的位相。Burch 型编码方法实质上消除了各物体点的互调制效应, 因此只要全息图的载频大于或等于物光波的最高空间频率, 再现时各衍射级就能在空间分离, 应用这一方法, 全息图的信息量可减少 4 倍。如果用冗余度来衡量, 则可求出 $R=2$ 。

3. 无透镜夫琅和费计算机彩虹全息图

从计算机彩虹全息图的原理分析可知, 每一个物体点发出的物光波对应一个发散球面波, 球面波的位相弯曲决定了计算机彩虹全息图的最高空间频率, 从而也决定了其包含的信息量。采用无透镜夫琅和费记录光路, 可以大大减少由于球面波位相弯曲产生的冗余信息量。考虑图 3 所示的计算模型, 使参考点光源 $R(0, y_R, z_R)$ 与距全息图最近的物体截面共面, 即使 $z_R=z_{02}$ 于是参考波的非涅耳近似可表示为

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \psi[x, (y-y_R); D_1] \\ &= \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda|z_R|} (y_R^2 - 2yy_R)\right] \\ &\quad \times \psi(x, y; D_1), \end{aligned} \tag{9}$$

(9) 式已设 $R_0=1$; 且有 $D_1=(1/|z_R|)=(1/|z_{02}|)$ 。由 (4) 式, 物光波可以表示为

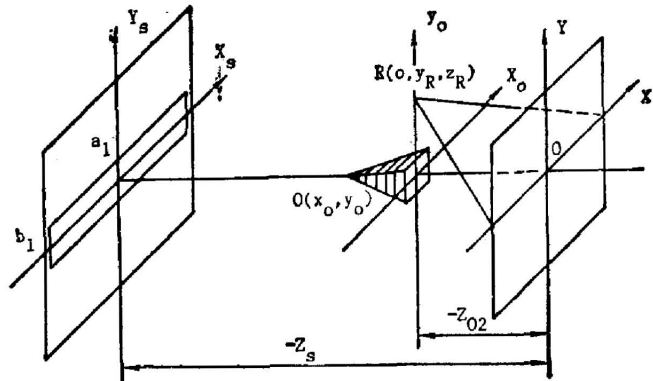


Fig. 3 Geometry of LLFCRH

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &= \int_{-z_s}^{-z_0} O_0 \psi(x, y; D) \iint_{\Sigma} O(x_0, y_0, z_0) \psi(x_0, y_0, D) \\ &\quad \times \text{rect}\left[\frac{(x-p)}{a}, \frac{(y-q)}{b}\right] \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda|z_0|} (xx_0 + yy_0)\right] dx_0 dy_0 dz_0, \end{aligned} \tag{10}$$

当采用 Burch 法编码时, 可将物光波和参考波代入 (8) 式计算。在 (8) 式表示的全息图函数中, 物光波和参考波是以 $(R^*\mu + R\mu^*)$ 的形式相互调制, 结果, 与 (x, y) 有关的二次位相因子 $\psi(x, y; D_1)$ 和 $\psi(x, y; D)$ 可合并为一个新的剩余二次位相因子。

$$\begin{aligned} \psi^*(x, y; D)\psi(x, y; D) &= \psi^*(x, y, D_1 - D) \\ &= \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda} \left| \frac{4z}{z_0 z_R} \right| (x^2 + y^2)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

对于与参考光源共面的物体截面, $z_0=z_R$ 或 $4z=0$ 剩余二次位相因子等于 1; 而对于其它与

参考光源不共面的物体截面,由于 $|\Delta z| \ll |z_0 z_R|$. 因此,二次位相因子的空间频带很窄,这就最大限度地减少了全息图的冗余信息。

为了便于计算,我们将此剩余二次位相因子放在物光波中,于是无透镜夫琅和费计算机彩虹全息图的物光波和参考波分别表示为

$$u(x, y) = \int_{-z_0}^{-z_1} C_0 \psi^*(x, y; D_1 - D) \iint_{x_0} O(x_0, y_0, z_0) \text{reot} \left[\frac{(x-p)}{a}, \frac{(y-q)}{b} \right] \times \psi(x_0, y_0; D) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda |z_0|} (xx_0 + yy_0) \right] dx_0 dy_0 dz_0, \tag{12}$$

$$R(x, y) = \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda |z_R|} (y_R^2 - 2yy_R) \right]. \tag{13}$$

在无透镜夫琅和费计算机彩虹全息图中,剩余二次位相因子 $\psi^*(x, y; D_1 - D)$ 的空间频率可由(11)式求出: $\xi_1 = |\Delta z / z_0 z_R| (x/\lambda)$, 当 $\max(D_1 - D)$ 取最小值或者 $|z_R| = |2z_{01}z_{02} / (z_{01} + z_{02})|$ 时, $\psi^*(x, y; D)$ 的带宽最小。令 $z_0 = z_{02}$, 则最高空间频率 $\xi_{1M} = |\Delta z (z_{01} + z_{02}) / 2z_{01}z_{02}| \times (x_M/\lambda)$ 而在平行光作参考光的普通计算机彩虹全息图,二次位相因子 $\psi(x, y; D)$ 的最高空间频率为 $\xi_{0M} = (x_M/\lambda |z_{02}|)$ 于是 x 方向信息量的冗余度

$$R = \log_2 \left(\frac{S_0}{S_1} \right) = \log_2 \left(\frac{\xi_{0M}}{\xi_{1M}} \right) = \log \left[\left| \frac{2z_{01}z_{02}}{\Delta z (z_{01} + z_{02})} \right| \right]. \tag{14}$$

令 $|z_{01}| = 200 \text{ mm}$, $|z_{02}| = 180 \text{ mm}$, 求出 $R = 4.17$ 。

五、实 验

我们设计了一个目标是两个距离为 $\Delta z = 5 \text{ mm}$ 的字符(如图 4 所示), 首先应用二维抽样定理, 确定计算机彩虹全息图的抽样间隔。我们依据初始参数求出抽样间隔 $\Delta x \leq 22.5 \mu\text{m}$, $\Delta y \leq 20 \mu\text{m}$ 。然后按(12)式和(13)式计算物光波和参考光波的复振幅, 最后代入(8)式计算全息图函数。计算中虽然不作快速傅里叶变换, 但因每个物点的信息只分布在很小的狭缝投影孔径上, 计算量并不大。我们实验中的物体由 1000 个点组成, 全息图上作 400×300 抽样, 用速度较低的 M160 型计算机计算, 虽然要作 1.2×10^8 次叠代, 但运行时间仅 26 分钟。

无透镜夫琅和费计算机彩虹全息图是在中国科学院微电子中心的 GCA3600F 型图形

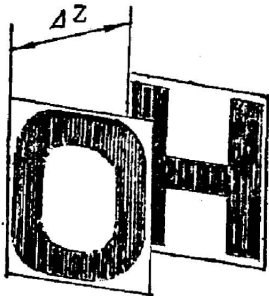


Fig. 4 The scheme of object to be recorded

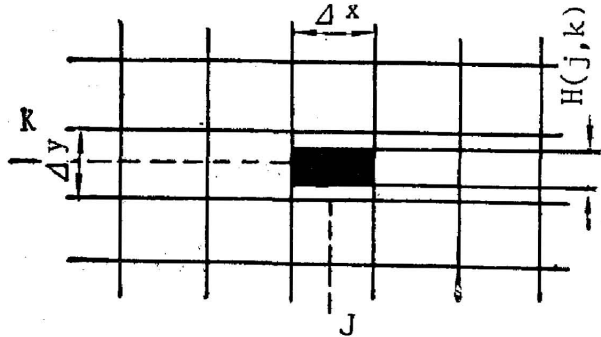


Fig. 5 Coding scheme for Burch CRH

发生器上进行记录 and 处理的。图 5 是 Burch 型计算机彩虹全息图编码方法示意图。为了增强彩虹效应,我们使衍射孔径的宽度 w 等于抽样单元的宽度,而让高度 $H(j, k)$ 正比于全息图函数。各参数可表示为

$$w = \Delta x, \quad H(j, k) = \tau_H(j, k) \Delta y. \quad (15)$$

为了检验无透镜夫琅和费型计算机彩虹全息图的平移不变性,在精缩阶段,我们特作了 5×8 次分步重复拷贝,拼接成一块 $50 \times 50 \text{ mm}$ 的计算机彩虹全息图。图 6 是 Burch 型无透镜夫琅和费型计算机彩虹全息图局部放大照片。图 7 是再现光路,其中 S_0 是白光光源,由 L_0 、 F 、 L_1 产生一个会聚球面波,沿参考光的共轭方向照明, L_1 后面的可变光阑 P 用来控制照明光束口径。在 S_0 的共轭像面 I 处,可以接收到清晰的再现实像。图 8 是再现实像照片。其中图 (a) 和图 (b) 是在不同像距拍摄的,图 (c) 是倾斜 15° 拍摄的。由于设计时取载频等于临界值,所以再现像的 ± 1 级十分靠近,并且像的焦深相当大。比较几幅照片,可看出字符“O”和“H”的间隔略有变化,从中可得到 3D 空间像的印象。

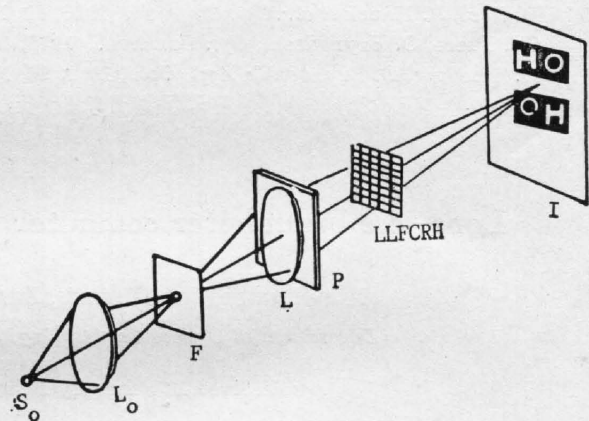
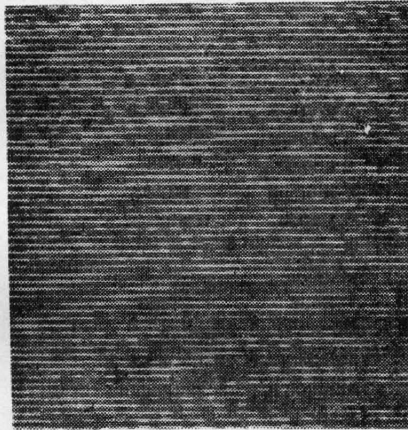
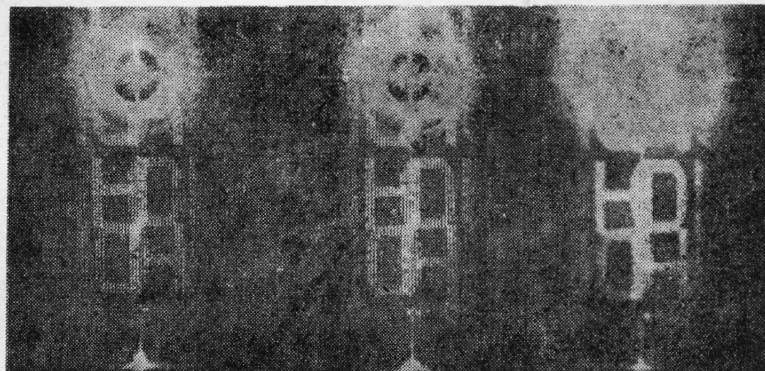


Fig. 6 Portion of an enlarged LLFCRH photo Fig. 7 Reconstruction geometry of LLFCRH



(a) (b) (c)
Fig. 8 Reconstructed real images of LLFCRH

实验发现,当改变 P 的大小,无论是用全息图的一个组元还是 5×8 个组元再现,实像的清晰度丝毫不减,只是亮度发生相应变化。这说明,再现像的强度具有很好的平移不变性,这为进一步制造合成无透镜夫琅和费型计算机彩虹全息图提供了技术保证。

六、结 论

本文提出的无透镜夫琅和费计算机彩虹全息图是按计算机仿真原理制造的彩虹全息图,它用有限投影孔径内的球面波来编码不同坐标 (x_0, y_0, z_0) 的物体点信息,并调动了多种可能的手段来消除计算机彩虹全息图的冗余信息,大大减少了计算和制造的工作量。在此基础上,如果进一步改进物体光波的数学模型,并利用无透镜夫琅和费计算机彩虹全息图特有的再现像强度平移不变性,将能合成出具有实用意义的计算机彩虹全息图。

参 考 文 献

- [1] B. R. Brown, A. W. Lohmann; *IBM J. Res. & Develop.*, 1969, **13**, No. 2 (Mar), 160~168.
- [2] T. S. Huang; *Proc. IEEE*, 1971, **59**, No. 9 (Sep), 1335~1346.
- [3] T. Yatagai; *Appl. Opt.*, 1976, **15**, No. 11 (Nov), 2722~2729.
- [4] Ch. Frere, D. Leseberg *et al.*; *J. O. S. A.*, 1986, **3**, No. 5 (May), 726~730.
- [5] D. Just, R. Hauck *et al.*; *Opt. Commun.*, 1986, **60**, No. 6 (Dec), 359~363.
- [6] Ch. Frere, O. Bryngdashl; *Opt. Commun.*, 1986, **60**, No. 6 (Dec), 369~372.
- [7] D. Leseberg, O. Bryngdahl; *Appl. Opt.*, 1984, **23**, No. 4 (Jul), 2441~2446.
- [8] 虞祖良, 金国藩;《计算机制全息图》, (清华大学出版社, 北京, 1984), 48~50.

Lens-less Fraunhofer computer generated rainbow hologram

XIE JINGHUI, ZHAO DAZUN, ZHAO YELING AND YU MEIWEN
(Department of Optical Engineering, Beijing Institute of Technology)

(Received 13 February 1989; revised 24 April 1989)

Abstract

A new type of computer generated rainbow hologram (CRH), called Lens-less Fraunhofer Computer Generated Rainbow Hologram (LLFORH), is proposed in this paper. The principle of LLFORH and the math mode of object wave are analyzed. Based on the information of holograms, the information of ordinary CRH, the redundancy of information and the related techniques for reducing the redundant information are discussed. The experimental results are shown.

Key words: computer generated hologram (CGH); computer generated rainbow hologram (CRH); Information; redundancy.