

双散射光合成场动态散斑的统计性质

彭 翔 马世宁*
(天津大学)

提 要

本文研究了在两束高斯光束照明条件下,由旋转散射体产生的双散射光合成的远场动态散斑的统计性质。这种动态散斑的统计性质由它的强度涨落的空-时相关函数描述。文中推导了这个函数的解析表达式,并采用了光子计算及光子相关技术,从实验上证实了这个表达式的正确性。

关键词: 双散射光, 动态散斑, 空-时相关

一、引 言

在相干光照明条件下,从大量散射元发出的光波相互干涉产生的散射光是一种随机过程,并在观察区形成散斑图样。如果散射体介质由深度随机的相位屏构成,则散射光的强度是空间随机分布的。如果散射体处于运动状态,则散斑图也随时间而变化。这种变化的性质依赖于散射体的运动、照明条件及光路结构。

前不久, J. H. Churnside 研究了在一束高斯光照明下,旋转运动的散射体在 Fresnel 区产生的动态散斑的统计性质^[1]。最近, D. Newman 等人又对单高斯光照明情况下,研究了由旋转散射体的运动产生的 Fraunhofer 区的动态散斑,并在探测方面做了研究^[2]。本文作者在 Churnside 和 Newman 等人的工作基础上,在更广义的条件下进一步探讨了动态散斑的统计性质,也就是,用两束高斯光束照射旋转着的散射体时,双散射光合成光场的动态散斑的统计性质。这种动态散斑实质上是由两个统计无关的散射光场相加而构成。本动推导了描述这种动态散斑统计性质的空-时强度相关函数的解析表达式。当两束照明光合成为一束时,我们推出的相关函数与 Newman 推出的结果完全吻合。因此, Newman 得到的结果可以认为是本文结果的一种特例。另外,利用光子计数和光子相关技术,我们也已从实验上证实了理论分析的结果。

二、双散射光合成场动态散斑的振幅空-时相关函数

光路结构如图 1 所示。一个以恒定角速度 Ω 在 $\xi-\eta$ 面旋转的散射体被两束相干高斯光照射。设 $\xi-\eta$ 和 $x-y$ 定义两个平行平面。散射体绕 z 轴转动。两束高斯光束的中心分别在 $(0, R + \frac{s}{2}, 0)$ 和 $(0, R - \frac{s}{2}, 0)$ 上。双光间距为 s 。入射光的振幅为

收稿日期: 1987年11月9日; 收到修改稿日期: 1988年5月12日

* 本文的实验工作由马世宁在英国帝国理工学院完成。

$$U_0(\xi, \eta) = A_0 \exp\{-[\xi^2 + (\eta - R_i)^2]/W^2\} \quad i=1, 2. \quad (1)$$

其中 $R_1 = B + \frac{s}{2}$, $R_2 = B - \frac{s}{2}$, W 是入射在散射体上的光斑半径, A_0 是常数。从散射体透射并紧靠散射体的散射光振幅为

$$U(\xi, \eta, t) = U_0(\xi, \eta) \exp\{j\phi(\xi, \eta, t)\}. \quad (2)$$

这里 $\phi(\xi, \eta, t)$ 是随机相位项。由于散射体处于运动状态, 所以它随时间而变化。在 Fresnel 区, 点 (x, y) 处的复振幅由下式给出

$$U(x, y, t) = K \iint U(\xi, \eta, t) \exp\left\{\frac{j\pi}{\lambda z} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]\right\} dx dy. \quad (3)$$

K 是一个不重要的定标因子, 在下面推导中将它略去。将(2)式代入(3)式并定义

$$f(\xi, \eta; x, y) = U_0(\xi, \eta) \exp\left\{\frac{j\pi}{\lambda z} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]\right\},$$

我们得到
$$U(x, y, t) = \iint f(\xi, \eta; x, y) \exp\{j\phi(\xi, \eta, t)\} d\xi d\eta.$$

在 Fresnel 区动态散斑的振幅空-时相关定义为

$$\begin{aligned} \Gamma(\Delta x, \Delta y, \tau) &= \langle U(x, y, t) U^*(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \tau) \rangle \\ &= \iiint f(\xi, \eta; x, y) f^*(\xi', \eta'; x + \Delta x, y + \Delta y) \langle \exp\{j[\phi(\xi, \eta, t) - \phi(\xi', \eta', t + \tau)]\} \rangle d\xi d\eta d\xi' d\eta'. \end{aligned} \quad (4)$$

因为散射体以恒定角速度 Ω 旋转, 所以可通过散射体的位置随时间的变化来定义随机相位的时间依赖性。即

$$\begin{cases} \xi' = \xi'' \cos \Omega\tau - \eta'' \sin \Omega\tau, \\ \eta' = \xi'' \sin \Omega\tau + \eta'' \cos \Omega\tau. \end{cases} \quad (5)$$

上式描述了点相对于坐标系的旋转, 即点 (ξ'', η'') 经时间 τ 旋转到点 (ξ', η') 。现在我们考察随机相位的相关并引入“相关面积”的概念。为简便起见, 令 $\mathbf{x}_1 = (\xi, \eta, t)$, $\mathbf{x}_2 = (\xi', \eta', t + \tau)$ 为两个空-时点, 于是可把(4)式中的随机相位的相关重新写成 $\langle \exp\{j[\phi(\mathbf{x}_1) - \phi(\mathbf{x}_2)]\} \rangle$ 。可以证明^[3]

$$\langle \exp\{j[\phi(\mathbf{x}_1) - \phi(\mathbf{x}_2)]\} \rangle = \exp\left\{-\langle \phi^2 \rangle \left[1 - \frac{\langle \phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2) \rangle}{\langle \phi^2 \rangle}\right]\right\}. \quad (6)$$

假定 $\phi(\mathbf{x})$ 是一个平稳过程, 则 $\langle \phi^2(\mathbf{x}_1) \rangle = \langle \phi^2(\mathbf{x}_2) \rangle \equiv \langle \phi^2 \rangle$ 。不难看出, 随机相位的相关依赖于 $\langle \phi^2 \rangle$ 和 $\frac{\langle \phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2) \rangle}{\langle \phi^2 \rangle}$ 。前者仅与散射体粗糙表面的方差有关, 而后者与散射光的相关函数有关。因为 $\frac{\langle \phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2) \rangle}{\langle \phi^2 \rangle} = \iint \frac{\phi(\mathbf{x}_1)\phi^*(\mathbf{x}_2)}{\langle \phi^2 \rangle} p_*(\phi_1, \phi_2) d\phi_1 d\phi_2$, 其中, 概率密度 $p_*(\phi_1, \phi_2)$ 与归一化函数 $\frac{\phi_1\phi_2^*}{\langle \phi^2 \rangle}$ 均无量纲, 所以这个积分具有面积的量纲。因此定义

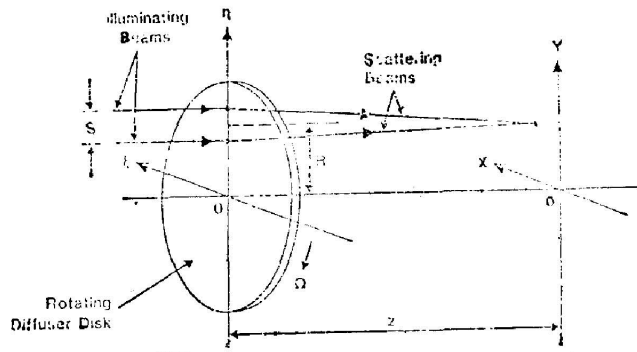


Fig. 1 Optical configuration

$\frac{\langle \phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2) \rangle}{\langle \phi^2 \rangle}$ 为相关面积。当相关面积很小时,可以假定

$$\frac{\langle \phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2) \rangle}{\langle \phi^2 \rangle} = \begin{cases} 1 & \text{在相关面积内,} \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

由此可知,在相关面积内,即 $\frac{\langle \phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2) \rangle}{\langle \phi^2 \rangle} = 1$ 时,随机相位的相关等于 1;在相关面积外,即当 $\frac{\langle \phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2) \rangle}{\langle \phi^2 \rangle} = 0$ 时,随机相位的相关(6)式等于 $\exp\{-\langle \phi^2 \rangle\}$ 。进一步假定粗糙表面的方差很大(对大多数工程问题都属于这种情况),则 $\langle \phi^2 \rangle \gg 1$ 。于是得到:

$$\langle \exp\{j[\phi(\xi, \eta, t) - \phi(\xi', \eta', t + \tau)]\} \rangle = \delta(\xi - \xi')\delta(\eta - \eta'). \quad (7)$$

将(5)式和(7)式代入(4)式得到

$$\begin{aligned} \Gamma(\Delta x, \Delta y, \tau) = & \iiint \delta(\xi - \xi')\delta(\eta - \eta') \\ & \times f(\xi, \eta; x, y)f^*(\xi'' \cos \Omega\tau - \eta'' \sin \Omega\tau, \xi'' \sin \Omega\tau \\ & + \eta'' \cos \Omega\tau; x + \Delta x, y + \Delta y) d\xi d\eta d\xi'' d\eta''. \end{aligned} \quad (8)$$

注意,在做变量代换时,很容易证明(5)式的 Jacobi 行列式等于 1,故有 $d\xi' d\eta' = d\xi'' d\eta''$ 。由 δ -函数的筛选性质,(8)式可简化成:

$$\begin{aligned} \Gamma(\Delta x, \Delta y, \tau) = & \iint f(\xi'', \eta''; x, y)f^*(\xi'' \cos \theta - \eta'' \sin \theta, \xi'' \sin \theta \\ & + \eta'' \cos \theta; x + \Delta x, y + \Delta y) d\xi'' d\eta''. \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\theta = \Omega\tau$,

由 $f(\xi, \eta; x, y)$ 的定义并利用远场近似条件,可以得到

$$\begin{aligned} f(\xi'', \eta''; x, y) = & C_1 U_0(\xi, \eta) \exp\left\{-j2\pi\left[\xi'' \frac{x}{\lambda z} + \eta'' \frac{y}{\lambda z}\right]\right\} \\ & \times f^*(\xi'' \cos \theta - \eta'' \sin \theta, \xi'' \sin \theta + \eta'' \cos \theta; x + \Delta x, y + \Delta y) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} = & C_2 U^*(\xi'' \cos \theta - \eta'' \sin \theta, \xi'' \sin \theta + \eta'' \cos \theta) \\ & \times \exp\left\{j2\pi\left[\xi'' \frac{\cos \theta(x + \Delta x) + \sin \theta(y + \Delta y)}{\lambda z} \right. \right. \\ & \left. \left. + \eta'' \frac{\cos \theta(y + \Delta y) - \sin \theta(x + \Delta x)}{\lambda z}\right]\right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中, C_1 和 C_2 都是可以提出积分号的二次相位因子,它们对最后的结果并不重要,我们在下面的推导中将它们略去。把(10)式和(11)式代入(9)式得

$$\begin{aligned} \Gamma(\Delta x, \Delta x, \tau) = & \iint U_0(\xi'', \eta'') U_0^*(\xi'' \cos \theta - \eta'' \sin \theta, \xi'' \sin \theta + \eta'' \cos \theta) \\ & \times \exp\left\{-j2\pi\left[\xi'' \frac{x - \cos \theta(x + \Delta x) - \sin \theta(y + \Delta y)}{\lambda z} \right. \right. \\ & \left. \left. + \eta'' \frac{y - \cos \theta(y + \Delta y) + \sin \theta(x + \Delta x)}{\lambda z}\right]\right\} d\xi'' d\eta'', \end{aligned} \quad (12)$$

由(1)式可知:

$$\begin{aligned} U_0(\xi'', \eta'') = & A_0 \exp\{-[\xi'^2 + (\eta'' - R_i)^2]/W^2\} \quad i=1, 2, \\ U_0^*(\xi'' \cos \theta - \eta'' \sin \theta, \xi'' \sin \theta + \eta'' \cos \theta) \\ = & A_0 \exp\{-[(\xi'' \cos \theta - \eta'' \sin \theta)^2 + (\xi'' \sin \theta + \eta'' \cos \theta - R_i)^2]/W^2\} \quad i=1, 2, \end{aligned}$$

经过一些繁琐的代数运算, 得到

$$\begin{aligned} & U_0(\xi'', \eta'') U_0^*(\xi'' \cos \theta - \eta'' \sin \theta, \xi'' \sin \theta + \eta'' \cos \theta) \\ &= A_0^2 \exp \left\{ -\frac{R_i^2}{W^2} (1 - \cos \theta) \right\} \exp \left\{ -2 \left[\left(\xi'' - \frac{R_i \sin \theta}{2} \right)^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\eta'' - \frac{R_i (1 + \cos \theta)}{2} \right)^2 \right] / W^2 \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

以下推导略去常数 A_0^2 。将(13)式代入(12)式求积分, 并注意利用 Fourier 变换性质

$$f\left(\frac{x \pm x_0}{b}\right) \xrightarrow{\text{F. T.}} |b| F(bf_x) \exp(\pm j2\pi x_0 f_x), \quad \exp[-\pi(x^2 + y^2)] \xrightarrow{\text{F. T.}} \exp[-\pi(f_x^2 + f_y^2)]$$

及小角度近似:

$$\sin \theta \sim \theta, \quad \cos \theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

我们得到

$$\begin{aligned} \Gamma(\Delta x, \Delta y, \tau) &= \exp \left\{ -\frac{jkR_i x}{2z} \theta \right\} \exp \left\{ -\frac{R_i^2 \theta^2}{2W^2} \right\} \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2r^2} [\Delta x + \theta y_0]^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2r^2} [\Delta y - \theta x_0]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $y_0 = y + \Delta y$, $x_0 = x + \Delta x$, $r = \frac{\lambda z}{\pi W}$, $\theta = \Omega \tau$, $R_1 = R + \frac{s}{2}$, $R_2 = R - \frac{s}{2}$ 。(14) 式就是双散射光远场动态散斑的振幅空-时相关函数。

三、双散射光合成场动态散斑的强度空-时相关函数

当两个统计无关的散射光场相加时, 有: $V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^2 V_i(\mathbf{x})$ 。其中, $\mathbf{x} = (x, y, t)$ 是一个空-时点矢量。定义合成场的强度相关为:

$$C_I(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle I(\mathbf{x}_1) I(\mathbf{x}_2) \rangle = \langle V(\mathbf{x}_1) V^*(\mathbf{x}_1) V(\mathbf{x}_2) V^*(\mathbf{x}_2) \rangle. \quad (15)$$

两束散射光在远场相加, 则有

$$V(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}) + V_2(\mathbf{x})$$

即

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}_1) &= V_1(\mathbf{x}_1) + V_2(\mathbf{x}_1), & V(\mathbf{x}_2) &= V_1(\mathbf{x}_2) + V_2(\mathbf{x}_2), \\ V^*(\mathbf{x}_1) &= V_1^*(\mathbf{x}_1) + V_2^*(\mathbf{x}_1), & V^*(\mathbf{x}_2) &= V_1^*(\mathbf{x}_2) + V_2^*(\mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

代入到(15)式中, 有

$$\begin{aligned} C_I(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \langle [V_1(\mathbf{x}_1) + V_2(\mathbf{x}_1)] [V_1^*(\mathbf{x}_1) + V_2^*(\mathbf{x}_1)] [V_1(\mathbf{x}_2) \\ & \quad + V_2(\mathbf{x}_2)] [V_1^*(\mathbf{x}_2) + V_2^*(\mathbf{x}_2)] \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

在统计无关的假设下, 并利用累积矩定理^[4]:

$$\langle z_1^* z_2^* z_3 z_4 \rangle = \langle z_1^* z_3 \rangle \langle z_2^* z_4 \rangle + \langle z_1^* z_4 \rangle \langle z_2^* z_3 \rangle$$

可以求得(16)式的结果为

$$\begin{aligned} C_I(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= 4 \langle I \rangle^2 + |\langle V_1^*(\mathbf{x}_1) V_1(\mathbf{x}_2) \rangle|^2 + |\langle V_2^*(\mathbf{x}_1) V_2(\mathbf{x}_2) \rangle|^2 \\ & \quad + \langle V_2^*(\mathbf{x}_1) V_2(\mathbf{x}_2) \rangle \langle V_1^*(\mathbf{x}_2) V_1(\mathbf{x}_1) \rangle \\ & \quad + \langle V_1^*(\mathbf{x}_1) V_1(\mathbf{x}_2) \rangle \langle V_2^*(\mathbf{x}_2) V_2(\mathbf{x}_1) \rangle, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\langle I \rangle = \langle I_1(\mathbf{x}_1) \rangle = \langle I_1(\mathbf{x}_2) \rangle = \langle I_2(\mathbf{x}_1) \rangle = \langle I_2(\mathbf{x}_2) \rangle$ 。

定义归一化强度相关函数

$$C_{II} = \frac{C_I - |C_{V_1}|^2 - |C_{V_2}|^2}{4\langle I \rangle^2} - 1,$$

其中 $|C_{V_1}|^2 = |\langle V_1^*(\mathbf{x}_1)V_1(\mathbf{x}_2) \rangle|^2$, $|C_{V_2}|^2 = |\langle V_2^*(\mathbf{x}_1)V_2(\mathbf{x}_2) \rangle|^2$ 。

我们得到:

$$C_{II}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{\langle V_2^*(\mathbf{x}_1)V_2(\mathbf{x}_2) \rangle \langle V_1^*(\mathbf{x}_2)V_1(\mathbf{x}_1) \rangle + \langle V_1^*(\mathbf{x}_1)V_1(\mathbf{x}_2) \rangle \langle V_2^*(\mathbf{x}_2)V_2(\mathbf{x}_1) \rangle}{4\langle I \rangle^2}. \quad (18)$$

上式中, $4\langle I \rangle^2$ 是一个不重要的常数因子, 在后面的分析中将它略去。令

$$\mathbf{x}_1 = (x, y, t), \quad \mathbf{x}_2 = (x + \Delta x, y + \Delta y, t + \tau)$$

并用(14)式和(18)式, 最后得到

$$C_{II}(\Delta x, \Delta y, \tau) = \exp\left\{-\frac{(R_1^2 + R_2^2)\theta^2}{2W^2}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{r^2}[\Delta x + \theta y_0]^2\right\} \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{r^2}[\Delta y - \theta x_0]^2\right\} \cos\left(\frac{k s x}{2z} \theta\right), \quad (19)$$

其中: $\theta = \Omega\tau$ 。(19)式就是双散射光合成场动态散斑的光强空-时相关函数的解析表达式。当两束高斯照射光束合为一束时, (19)式中的 $R_1 = R_2 = R$, $s = 0$ 。此时(19)式变成

$$C_{II}(\Delta x, \Delta y, \tau) = \exp\left\{-\frac{R^2\theta^2}{W^2}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{r^2}[\Delta x + \theta y_0]^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{r^2}[\Delta y - \theta x_0]^2\right\},$$

这正是 Newman 推导出的结果^[2]。故此, Newman 所得到的结果只是本文结果的一种特例。

四、讨论及实验结果

1. 合成场动态散斑的空间相关

在(19)式中令 $\tau = 0$ 就可以获得合成场动态散斑的强度空间相关函数, 即

$$C_{II}(\Delta x, \Delta y, 0) = \exp\left\{-\frac{1}{r^2}[\Delta x^2 + \Delta y^2]\right\}. \quad (20)$$

它描述了双散射光合成场动态散斑的空间统计特性。此结果与 Churnside 推出的单照明光下的结果一致^[2]。对这个相关函数我们不做进一步讨论。

2. 合成场动态散斑的时间相关

在(19)式中令 $\Delta x = \Delta y = 0$, 则可以得到合成场动态散斑强度涨落的时间相关函数

$$C_{II}(0, 0, \tau) = \exp\left\{-\frac{(R_1^2 + R_2^2)}{2W^2} \Omega^2 \tau^2\right\} \exp\left\{-\frac{\Omega^2 \tau^2}{r^2} (x^2 + y^2)\right\} \cos\left(\frac{k s x}{2z} \Omega \tau\right) \\ = \exp\left\{-\left[\frac{R_1^2 + R_2^2}{2W^2} + \frac{x^2 + y^2}{r^2}\right] \Omega^2 \tau^2\right\} \cos\left(\frac{k s x}{2z} \Omega \tau\right). \quad (21)$$

上式描述了合成场动态散斑的时间统计特性。它由一个高斯函数的包络和一个余弦调制因子构成。

3. 实验结果

如图 2 所示, 用两束 0.5 mW 的 He-Ne 高斯光束照射运动散射体。两束光在散射体所

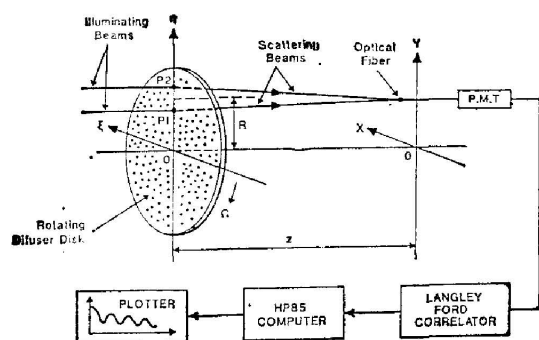


Fig. 2 Experimental setup

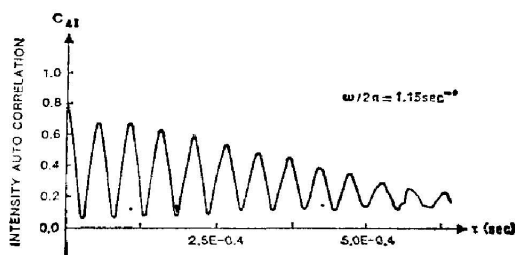


Fig. 3 Experimental curve of intensity auto correlation

在平面上的中心位置分别位于 $(0, R + \frac{s}{2}, 0)$ 和 $(0, R - \frac{s}{2}, 0)$ 。激光波长为 633 nm。散射体由一块毛玻璃来模拟;它以 $\frac{\omega}{2\pi} = 1.15 \text{ sec}^{-1}$ 的频率绕 z 轴转动。双散射光在远场合产生动态散斑场。远场的相关测量用标准的光子计数相关仪 (LANGLEY FORD CORRELATOR)。探测器用一根直径为 $50 \mu\text{m}$ 的光纤与一个光电倍增管 (P. M. T.) 耦合组成。信号经前置放大器/鉴频器和光子计数后被送入相关仪和计算机 (HP 85) 中进行分析, 估计出相关函数。此相关仪具有 128 个通道的分辨率, 每一通道相应于一个时间增量 τ 。在实验里, 典型的时间增量为 $\tau = 10 \sim 200 \mu\text{sec}$ 。最后的实验结果用绘图仪画出实验曲线。图 3 给出了合成场动态散斑的强度时间相关函数的实验曲线。由图 3 可清楚地看出, 在高斯函数包络下的余弦调制效应。这个实验结果证实了我们推导的合成场动态散斑空-时相关函数解析表达式的正确性。

本文作者感谢与 J. C. Dainty 教授有益的讨论以及 Blackett 实验室提供的实验仪器。

参 考 文 献

- [1] J. H. Churnside; *J. O. S. A.*, 1982, **72**, No. 11 (Nov), 1464~1469.
- [2] D. Newman; A. A. D. Canas *et al.*; *Appl. Opt.*, 1985, **24**, No. 23 (Dec), 4210~4220.
- [3] T. Yoshimura, *J. O. S. A.*, 1986, **3**, No. 7 (Jul), 1032~1053.
- [4] B. Saleh; 《光电子统计学》, (科学出版社, 北京, 1985), 25.
- [5] S. N. Ma, Q. Lin; *Appl. Opt.*, 1986, **25**, No. 1 (Jan), 22~25.

Statistical properties of synthetically dynamic speckle via dual scattered light

PENG XIANG AND MA SHINING

(*Tianjin University*)

(Received 9 November 1987; revised 12 May 1988)

Abstract

Statistical properties of dynamic speckle with dual diffusing light combination from a rotating diffuser have been investigated under the condition of two Gaussian beams illumination. These properties are described by a specific space-time intensity correlation function. We have derived the analytical expression of this function and have confirmed this theoretical result with an experiment by using photon counting and photon correlation techniques.

Key words: dual diffusing light; dynamic speckle; space-time correlation.