第8卷 第9期
1988年9月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 8, No. 9
September, 1988

简并双光子激光的光子统计

汪 志 诚
(兰卅大学物理系)

提 要

从原子和场模的密度算符的主方程出发，应用 Haake 和 Lewenstein 所发展的原子变量绝热消除的算符方法，导出了简并双光子激光光场 Wigner 函数的福克-普朗克(Fokker-Planck)方程及其稳态解。利用稳态解的高斯近似，求得了在不同泵浦强度下，光子统计的解析结果和数值结果，并与前人的结果作了比较。

关键词：双光子激光，光子统计，稳态解。

近年来双光子激光的研究引起了人们的兴趣，报道了观察双光子受激发射的实验[1,2]和一些理论分析[3~15]。文献[3, 5, 7, 8, 13]将 Scully-Lamb 的激光量子理论推广到双光子情形，研究了它的稳态光子统计，特别是文献[13]，详细分析了光子统计分布对反转度的依赖关系。

众所周知，激光量子理论被广泛应用的另一种方案是准概率密度方法[16]，文献[4]是应用这一方法研究了双光子激光的光子统计，但其微扰处理仅适用于 $g\gg\gamma_\perp\gg\gamma_/\gg K$ 的情形。本文就优质腔 $\gamma_\perp, \gamma_/\gg K$ 的情形，应用 Haake 和 Lewenstein[17] 所发展的原子变量绝热消除的算符方法，研究了简并双光子激光的光子统计，并将所得结果与文献[13]作了比较*。

在互作用图像中，光场与原子系统的密度算符 $W(t)$ 遵从主方程[16]

$$\dot{W}(t)=(\Lambda_A+\Lambda_F+L_{AF})W(t), \tag{1}$$

式中算符 Λ_A 和 Λ_F 分别描述原子的泵浦，耗散和光场的衰减，它们与单光子情形具有相同的形式[17]，L_{AF} 描述光场与原子系统的相互作用

$$\left.\begin{aligned} L_{AF}W&=-\frac{i}{\hbar}[H_{AF}, W],\\ H_{AF}&=i\hbar(gs_-b^{+2}-g^*s_+b^2)。\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

在 Wigner 表示中将场量表为常数，而将原子变量保留为算符

$$W(\beta, \beta^*, s_z, s_\pm, t)=\frac{1}{\pi^2}\int\exp[-i(\beta u+\beta^* u^*)t_{r_F}\{\exp[i(bu+b^+u^*)]W\}d^2u, \tag{3}$$

再对原子算符求迹，即可得到光场约化密度的 Wigner 分布函数

$$\rho(\beta, \beta^*, t)=T_{r_A}W(\beta, \beta^*, s_z, s_\pm, t)。 \tag{4}$$

仿照文献[17]，可得 ρ 的运动方程

收稿日期：1986年12月8日；收到修改稿日期：1987年10月18日

* 如无特别说明，本文所用符号与文献[17]相同。

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\rho}(u,\ u^*,\ t)=\left(\frac{\partial}{\partial u}D_u+\frac{\partial}{\partial u^*}D_u^*+\frac{\partial^2}{\partial u^2}D_{uu}+\frac{\partial^2}{\partial u^{*2}}D_{uu}^*+\frac{\partial^2}{\partial u\partial u^*}D_{uu^*}\right)\rho(u,\ u^*,\ t),\\&u=\beta\left(\frac{4|g|^2}{r_\perp r_f}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{\beta}{\sqrt{n_s}},\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

式中 n_s 是饱和光子数。(5)式具有 Fokker-Planck 方程的形式，D_u 和 D_u^* 是漂移系数，D_{uu}、D_{uu^*} 和 D_{uu}^* 是扩散系数，其表式为

$$\left.\begin{aligned}D_u=u\Bigg\{&K-\frac{2N\sigma_0\left(\frac{|g|^2r_f}{r_\perp}\right)^{\frac{1}{2}}|u|^2}{1+|u|^4}\\&+\frac{4N\sigma_0\left(\frac{|g|^2r_f}{r_\perp}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{K}{r_\perp}|u|^2}{(1+|u|^4)^2}\left[\left(1+\frac{2r_\perp}{r_f}\right)|u|^4-1\right]\\&+\frac{4|g|^2r_f}{r_\perp^2}\frac{N\sigma_0^2|u|^4}{(1+|u|^4)^4}\left[(1-3|u|^4)+2N(1-|u|^4)\right)\\&+\frac{N|g|^2}{r_\perp}\frac{1}{(1+|u|^4)^4}[(1+|u|^4)^2(-2+3|u|^4+|u|^8\\&+4\sigma_0^2|u|^4(3-|u|^4)-16N\sigma_0^2|u|^8]\Bigg\},\\D_{uu}=-&\frac{N|g|^2}{r_\perp}\frac{|u|^4u^2}{(1+|u|^4)^3}\left[(1+|u|^4)^2+4\sigma_0^2\left(1+\frac{r_f}{r_\perp}\right)\right],\\D_{uu^*}=K&\left(\frac{4|g|^2}{r_\perp r_f}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2g^2N}{r_\perp}\frac{|u|^2}{(1+|u|^4)^3}\\&\times\left[(2+|u|^4)(1+|u|^4)^2-4\sigma_0|u|^4\left(1+\frac{r_f}{r_\perp}\right)\right]。\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

将上述方程转到极坐标，容易验明，在 $\sigma_0\leqslant(1/2)$ 和 $r_f\leqslant 2r_\perp$ 这个物理上合理的范围内，方程的扩散矩阵是恒正的。方程(5)的稳态解为

$$\rho(z)=\frac{C}{F(z)}\exp\left[-2\int_0^z\frac{G(z')}{F(z')}dz',\right.\tag{7}$$

$$G(z)=\left(1-\frac{2\sigma_0}{\sigma_{0C}}\frac{z}{1+z^2}\right)\left\{1+\frac{4\sigma_0}{\sigma_{0C}}\frac{K}{r_\perp}\frac{z}{(1+z^2)^3}\left[\left(1+\frac{2r_\perp}{r_f}\right)z^2-1\right]\right\},\tag{8}$$

$$F(z)=\frac{1}{n_s}\left\{1+\frac{N}{n_s}\frac{r_f}{K}\frac{z}{(1+z^2)^3}\left[(1+z^2)-4\sigma_0^2z^2\left(1+\frac{r_f}{r_\perp}\right)\right]\right\},\tag{9}$$

$$N\sigma_{0C}=\left(\frac{K^2r_\perp}{|g|^2r_f}\right)^{1/2},\tag{10}$$

式中 $z=|u|^2$，C 是规一化常规。使分布函数 $\rho(z)$ 具有极大的 $\bar{z}$ 值，由 $(d\rho/dz)=0$ 定出

$$\frac{d\rho}{dz}=-\frac{C}{F(z)}\exp\left[-2\int_0^z\frac{G(z')}{F(z')}dz'\right]\cdot[2G(z)+F'(z)]=0。\tag{11}$$

详细分析表明，$F'(z)$ 远小于 $G(z)$。我们可以在(11)式中忽略 $F'(z)$，而由 $G(z)=0$ 求 $\bar{z}$，并将(7)式指数前的缓变函数 $[1/F(z)]$ 用 $[1/F(\bar{z})]$ 代替，而拼入规一化常数之中。容易看出 $G(z)=0$ 等价于

$$z^2-2(\sigma_0/\sigma_{0C})z+1=0。\tag{12}$$

(12)式仅当 $\sigma_0>\sigma_{0C}$ 时有正实解。这就是说，σ_{0C} 是 σ_0 的临界值。当 $\sigma_0\geqslant\sigma_{0C}$ 时，(12)式的

解为

$$\bar{z}=\frac{\sigma_0}{\sigma_{0C}}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{\sigma_{0C}}{\sigma_0}\right)^2}\right]。\tag{13}$$

(10)式给出的临界反转度和(13)式给出的稳态解，与半经典理论的结果[10]符合。

仿照在激光理论中广泛应用的方法，将(7)式指数上的函数在 $\bar{z}$ 附近展开准至二级，即得稳态光场分布的近似表达式

$$\left.\begin{aligned}&p(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,q_s}\exp\left[-\frac{(z-\bar{z})^2}{q_s^2}\right],\\&q_s^2=\frac{\frac{1}{n_s}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{\sigma_{0C}}{\sigma_0}\right)^2}\right]\left[\left(1+\frac{1}{\sigma_0}\right)-\left(1+\frac{r_{/\!/}}{r_\perp}\right)\left(\frac{\sigma_{0C}^2}{\sigma_0}\right)\right]}{\left(\frac{\sigma_{0C}}{\sigma_0}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\sigma_{0C}}{\sigma_0}\right)^2}}。\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

由(14)式可以求得平均光子数 $\langle n\rangle$ 和光子数涨落 $(\Delta n)^2=\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2$。

$$\langle n\rangle=n_s\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{0C}}\right)\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{\sigma_{0C}}{\sigma_0}\right)^2}\right],\tag{15}$$

$$\frac{(\Delta n)^2}{\langle n\rangle}=\frac{1+(1/\sigma_0)}{2\sqrt{1-(\sigma_{0C}/\sigma_0)^2}}\left\{1-\frac{[1+(r_{/\!/}/r_\perp)]\sigma_{0C}^2}{1+\sigma_0}\right\},\tag{16}$$

Table 1 Scaled mean photon number $\frac{1}{n_s}\langle n\rangle$ vs inversion ratio $\frac{\sigma_0}{\sigma_{0C}}$

σ_0/σ_{0C}	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	10.0	20.0
$\frac{1}{n_s}\langle n\rangle$	1	1.863	2.380	2.849	3.297	3.732	19.95	39.97
σ_0/σ_{0C}	30.0	40.0	50.0	100.0	200.0	300.0	400.0	500.0
$\frac{1}{n_s}\langle n\rangle$	99.98	79.99	99.99	200.0	400.0	600.0	800.0	1000

Table 2 $\frac{(\Delta n)^2}{\langle n\rangle}$ vs inversion ratio, (*a*) $\sigma_{0C}=10^{-2}$, (*b*) $\sigma_{0C}=10^{-3}$

(*a*)

σ_0/σ_{0C}	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	10.0	20.0
$(\Delta n)^2/\langle n\rangle$	—	76.21	51.71	40.65	33.99	29.43	5.526	3.003
σ_0/σ_{0C}	30.0	40.0	50.0					
$(\Delta n)^2/\langle n\rangle$	2.168	1.750	1.500					

(*b*)

σ_0/σ_{0C}	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	10.0	20.0
$(\Delta n)^2/\langle n\rangle$	—	754.2	510.8	400.8	334.6	289.2	51.75	25.77
σ_0/σ_{0C}	30.0	40.0	50.0	100.0	200.0	400.0	500.0	
$(\Delta n)^2/\langle n\rangle$	17.18	13.00	10.50	5.500	3.000	1.750	1.500	

(15)式与文献[13]的结果是一致的。它指出标度化平均光子数($\langle n\rangle/n_s$)仅依赖于反转比(σ_0/σ_{0C}),表1给出它的数值结果。由于在双光子激光中,激活原子与光场的耦合正比于光场强度(在单光子激光中则正比于光场强度的平方根),标度化平均光子数随反转比的增加而迅速增加,(16)式表明,$[(\Delta n)^2/\langle n\rangle]$除依赖于反转比外,还依赖于临界反转比$\sigma_{0C}$(它取决于激光系统的特性)。表2给出在$\sigma_{0C}=10^{-2}$和$\sigma_{0C}=10^{-3}$时,$[(\Delta n)^2/\langle n\rangle]$对反转比的依赖关系。可以看出,双光子激光的$[(\Delta n)^2/\langle n\rangle]$大于单光子激光的$[(\Delta n)^2/\langle n\rangle]$值。特别是在低泵浦下,双光子激光器的噪声是相当大的。在高泵浦极限下,$[(\Delta n)^2/\langle n\rangle]=1.5$,仍大于单光子激光的$[(\Delta n)^2/\langle n\rangle]=1$。这是由于双光子受激发射具有较大的自发发射噪声之故。在文献[13]中,与(16)式相应的结果为

$$\frac{(\Delta n)^2}{\langle n\rangle}=\frac{1+(1/\sigma_0)}{2\sqrt{1-(\sigma_{0C}/\sigma_0)^2}},\tag{17}$$

较本文得到的结果要大些。这是由于文献[13]所根据的Scully-Lamb理论应用了单原子近似,略去了原子-原子相关的缘故[18]。但这样差异的数值是很小的。Lugiato曾指出,在单光子激光中,由于原子-原子相关所导致的$(\Delta n)^2$的减少在高泵浦下可能引起微弱的反聚束效应。这一效应在双光子激光中不会出现。

参 考 文 献

[1] B. Nikolaus, D. Z. Zhang *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **47**, No. 3 (Jul), 171~173.
[2] J. Y. Gao, W. W. Edison *et al.*; *J. O. S. A.* (*B*), 1984, **1**, No. 4 (Aug), 606~608.
[3] K. J. McNeil, D. F. Walls; *J. Phys.* (*A*), 1975, **8**, No. 1 (Jan),104~110.
[4] K. J. McNeil, D. F. Walls; *J. Phys.* (*A*), 1975, **8**, No. 1 (Jan), 111~119.
[5] R. Görtz, D. F. Walls; *Z. Phys.* (*B*), 1976, **25**, No. 4 (Dec), 423~427.
[6] H. P. Yuen; *Phys. Rev.* (*A*), 1976, **13**, No. 6 (Jun), 2226~2243.
[7] N. Nayak, B. K. Mohanty; *Phys. Rev.* (*A*), 1979, **19**, No. 3 (Mar), 1204~1210.
[8] M. S. Zubairy; *Phys. Lett.* (*A*), 1980, **80**, No. 4 (Dec), 225~228.
[9] L. Sczaniecki; *Opt. Acta*, 1980, **27**, No. 2 (Feb), 251~261; *ibid*, 1982, **29**, No. 1 (Jan), 69~85.
[10] M. Reid, K. J. McNeil *et al.*; *Phys. Rev.* (*A*), 1981, **24**, No. 4 (Oct), 2029~2043.
[11] L. A. Lugiato, G. Strini; *Opt. Commun.*, 1982, **41**, No. 5 (May), 374~378.
[12] M. Reid, D. F. Walls; *Phys. Rev.* (*A*), 1983, **28**, No. 1 (Jul), 332~343.
[13] U. Herzog; *Opt. Acta.*, 1983, **30**, No. 5 (May), 639~652.
[14] Z. C. Wang, H. Haken; *Z. Phys.* (*B*), 1984, **55**, No. 4 (Jun), 361~370; **56**, No. 1 (Jul), 77~82.
[15] L. Sczaniecki, E. Szczepaniak; *Opt. Acta*, 1985, **32**, Nos. 9/10 (Sep~Oct), 1259~1271.
[16] H. Haken; «*Laser Theory*», (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo. 1984), 51~71.
[17] F. Haake, M. Lewenstein; *Phys. Rev.*(*A*), 1983, **27**, No. 2 (Feb), 1013~1021.
[18] L. A. Lugiato, F. Casagrande *et al.*; *Phys. Rev.*(*A*), 1982, **26**, No. 6 (Dec), 3438~3458.

Photon statistics of degenerate two-photon laser

WANG ZHICHENG
(*Physics Department, Lanzhou University*)

(Received 8 December 1986; revised 18 October 1987)

Abstract

Starting from the master equation for density operator of the atoms and the field mode and applying the operator method of adiabatic elimination of the atomic variables developed by Haake and Lewenstein, we derived the Fokker-Planck Equation for Wigner function of the lightfield and its steady-state solution. With a Gaussian approximation to the solution, analytical and numerical results on the photon statistics for various pumping strengths are obtained. Comparisons with previous works are made.

Key words: two-photon laser; photon statistics: steady-state solution.