

三能级激光器的突变行为

孙懋琮

(山东大学光学系)

提 要

本文描写了有注入外场和可饱和吸收体的三能级单模激光器于阈值附近的行为。定量的计算表明：激光电场方程的非线性，特别是由于外场的注入，使得激光定态具有标准尖点突变流形。最后讨论了尖点突变流形的物理意义，给出了产生光学双稳态的条件。

关键词：激光相变。

一、引 言

Dicke 哈密顿算子^[1]在非平衡边界条件下提供了二能级激光器的模型，它在外场扰动下的突变行为已被研究^[2]。本文从 H. Haken 的半经典激光理论^[3]出发，应用 René Thom 的突变理论^[4]，研究了有可饱和吸收体的三能级激光器的突变行为。

二、理 论 模 型

根据 H. Haken 的半经典激光理论，对于固体激光器和均匀展宽的情形，我们给出关于三能级单模激光器的方程组

$$\frac{d}{dt} b = -\kappa b - i \sum_{\mu} g_{\mu} \rho_{21, \mu}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \rho_{21, \mu} = -\gamma \rho_{21, \mu} + i g_{\mu}^* b (N_2 - N_1)_{\mu}, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} N_{1, \mu} = N_{2, \mu} w_{21} + N_{3, \mu} w_{31} - N_{1, \mu} (w_{12} + w_{13}) - i g_{\mu} b^* \rho_{21, \mu} + i g_{\mu}^* b \rho_{21, \mu}^*, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} N_{2, \mu} = N_{1, \mu} w_{12} + N_{3, \mu} w_{32} - N_{2, \mu} (w_{21} + w_{23}) + i g_{\mu} b^* \rho_{21, \mu} - i g_{\mu}^* b \rho_{21, \mu}^*, \quad (4)$$

$$N_{1, \mu} + N_{2, \mu} + N_{3, \mu} = 1, \quad (5)$$

式中 b 是激光电场的慢变幅变量(无量纲), b^* 是 b 的复共轭量, $\rho_{21, \mu}$ 是原子激光能级间偶极矩的慢变幅变量(无量纲), $N_{j, \mu}$ 是单电子原子 μ 在能级 $j(j=1, 2, 3)$ 的占据数, κ 是光场的衰减常数, γ 是原子偶极矩的衰减常数, g_{μ} 是耦合常数, $w_{jl}(j \neq l, l=1, 2, 3)$ 是原子从能级 j 到能级 l 的非相干跃迁速率。

我们引入两个新的物理条件对方程(1)~(4)加以扩展。第一个物理条件是在激光腔内

置入可饱和吸收体。为了考虑可饱和吸收体的效应,使方程(1)中表示光场损耗的衰减常数 κ 依赖于场强 $|b|^{2[4,5]}$, 即令

$$\kappa(b) = \kappa_0 + \kappa_s(1 + |b|^2/I_s)^{-1}, \quad (6)$$

式中 κ_0 表示由衍射、介质镜透射等引起的损失, κ_s 项则描写了由激光腔内的可饱和吸收体引起的光场损耗, I_s 是可饱和吸收体的饱和强度。第二个物理条件是在激光器中注入经典外场, 它与激光器的原子系统发生相互作用。若记外场为 \mathcal{E} (无量纲幅), 并取旋波近似, 则方程(2)~(4)变为

$$\frac{d}{dt} \rho_{21,\mu} = -\gamma \rho_{21,\mu} + i g_{\mu}^* (b + \mathcal{E}) (N_2 - N_1)_{\mu}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N_{1,\mu} = & N_{2,\mu} w_{21} + N_{3,\mu} w_{31} - N_{1,\mu} (w_{12} + w_{13}) \\ & - i g_{\mu} (b + \mathcal{E})^* \rho_{21,\mu} + i g_{\mu}^* (b + \mathcal{E}) \rho_{21,\mu}^*, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N_{2,\mu} = & N_{1,\mu} w_{12} + N_{3,\mu} w_{32} - N_{2,\mu} (w_{21} + w_{23}) \\ & + i g_{\mu} (b + \mathcal{E})^* \rho_{21,\mu} - i g_{\mu}^* (b + \mathcal{E}) \rho_{21,\mu}^*. \end{aligned} \quad (9)$$

方程组(1)、(5)、(7)~(9)就是有注入外场和可饱和吸收体的三能级单模激光系统的理论模型。

三、非平衡定态流形

方程组(1)、(5)、(7)~(9)是一个非线性的、多变量的耦合微分方程组。在研究由它描写的多元子系的合作效应时, 选择激光电场 b 作为序参量, 选择外场 \mathcal{E} 作为一个控制参数。按照 René Thom 的分类定理, 各种序参量的方程有可能取几种基本突变类型。求解与方程组(1)、(5)、(7)~(9)相应的定态方程组, 结果得到单独对于序参量 b (于阈值附近) 的三次方程

$$-(\kappa_0 + \kappa_s) b + \frac{\kappa_s}{I_s} b^3 + \frac{g^2}{\gamma} \Delta_0 (b + \mathcal{E}) - (\kappa_0 + \kappa_s) \frac{4g^2}{\eta\gamma} (b + \mathcal{E})^3 = 0, \quad (10)$$

这里已经选取 b 和 \mathcal{E} 均为实量。方程(10)中 Δ_0 表示零场下处于定态反转的原子数目, 它被选择作为另一个控制参数。 η 是引入的一个组合参数, 它表示为

$$\eta = \frac{2[w_{32}(w_{12} + w_{13} + w_{21}) + w_{13}w_{21}]}{2w_{32} + w_{13}}.$$

经过变换可以把方程(10)写成如下的尖点突变流形标准形式:

$$X^3 - AX - B = 0, \quad (11)$$

其中

$$X = b + \left(1 - \frac{1}{Q} \frac{\kappa_s}{I_s}\right) \mathcal{E}, \quad (12)$$

$$A = \frac{1}{Q^2} \left\{ 3 \frac{\kappa_s}{I_s} \left(\frac{\kappa_s}{I_s} - Q\right) \mathcal{E}^2 - Q \frac{g^2}{\gamma} \left[\Delta_0 - \frac{\gamma}{g^2} (\kappa_0 + \kappa_s) \right] \right\}, \quad (13)$$

$$B = \frac{1}{Q^3} \left\{ \frac{\kappa_s}{I_s} \left(\frac{\kappa_s}{I_s} - Q\right) \left(\frac{2\kappa_s}{I_s} - Q\right) \mathcal{E}^3 - Q \frac{\kappa_s}{I_s} \frac{g^2}{\gamma} \left[\Delta_0 - \frac{\gamma}{g^2} (\kappa_0 + \kappa_s) \right] \mathcal{E} \right\}$$

$$-Q^2(x_0+x_s)\mathcal{E}\}, \quad (14)$$

$$Q \equiv \frac{x_s}{I_s} - (x_0+x_s) \frac{4g^2}{\eta\gamma} \circ \quad (15)$$

在此仅考虑 $Q < 0$ 的情况。

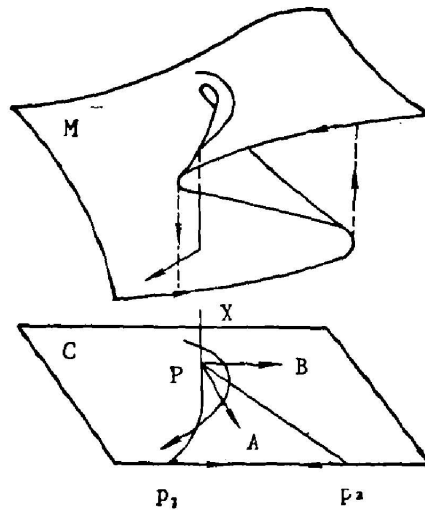


Fig. 1 C: the control parameter plane; M: the cusp catastrophe manifold

方程(11)是由两个控制参数 A 、 B (实际为 \mathcal{E} 、 Δ_0) 和一个状态变量 X (实际为 b) 组成的三维空间中的流形,是激光定态的几何学表示,如图1所示。通过(12)式,激光定态 b 与尖点突变流形 M 上的点一一对应起来。这样一个流形是势函数

$$\frac{1}{4} X^4 - \frac{1}{2} A X^2 - B X, \quad (16)$$

即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} b^4 - \frac{1}{Q} \left(\frac{x_s}{I_s} - Q \right) \mathcal{E} b^3 - \frac{1}{2Q} \left[x_0 + x_s + 2 \left(\frac{x_s}{I_s} - Q \right) \mathcal{E}^2 \right] b^2 \\ & + \frac{1}{2Q} \left[\frac{g^2}{\gamma} \Delta_0 - \left(\frac{x_s}{I_s} - Q \right) \mathcal{E}^2 \right] (b + \mathcal{E})^2 \end{aligned} \quad (17)$$

的极值点的集合。势函数(17)可称为“激光势”,它描写了有注入外场和可饱和吸收体的三能级单模激光器于阈值附近的行为。

四、讨论

这里,分三种情况,讨论上述三能级激光器的激光定态性质。

1. 外场 $\mathcal{E} = 0$ 的情况

从(13)和(14)式可见,在这种情况下, $B = 0$, A 有以下两种可能性:

若 $\Delta_0 < \frac{\gamma}{g^2} (x_0 + x_s)$, 则 $A < 0$ 。此时,控制参数的轨线为平面 C 上 A 的负半轴,状态变量的轨线只有一条,相应的激光定态恒为零,并且是稳定的。

若 $\Delta_0 > \frac{\gamma}{g^2}(\kappa_0 + \kappa_s)$, 则 $A > 0$ 。此时, 控制参数的轨线为平面 O 上 A 的正半轴, 状态变量的轨线有三条, 分别位于流形 M 折叠部分的上、中、下三层上, 其中中层上的轨线是不能到达的(即对应不稳定态)。这表明激光实际上处于两个同时可能的稳定态(皆为有序态)之一上。

于是, 令 $\mathcal{E} = 0$ 和 $\Delta = 0$, 便得到有可饱和吸收体的三能级激光器在阈值处的反转原子数目, 即

$$\Delta_c = \frac{\gamma}{g^2}(\kappa_0 + \kappa_s). \quad (18)$$

随着泵浦增强, 使 Δ_0 从小于 Δ_c 到大于 Δ_c , 控制参数的轨线经过尖点 $A = B = 0$ 。在尖点处($\Delta_0 = \Delta_c$), 原来稳定的激光定态 $b = 0$ 失去稳定性, 同时出现了分叉现象, 使激光处于两个同时可能的新的稳定态之一上, 如图 2 所示。这种分叉现象与二级相变类似。

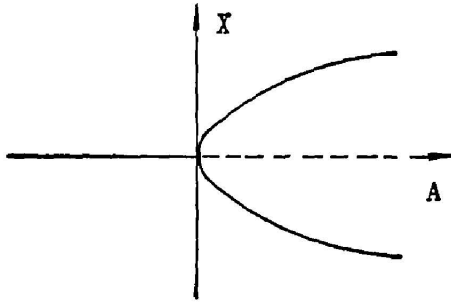


Fig. 2 The bifurcation of the three-level laser in the presence of an applied field and a saturable absorber

2. 外场 $\mathcal{E} \neq 0$ 的情况

这时控制参数的轨线可位于整个平面 O 上。

图 1 中平面 O 上的折叠线 pp_1, pp_2 满足方程 $-4A^3 + 27B^2 = 0$ 。在折叠线 pp_1, pp_2 围成的尖点形区域, 同时对应着激光系统的三个定态。在折叠线 pp_1, pp_2 上, 同时对应着激光系统的二个定态。在尖点形区域以外, 仅对应着激光系统的一个定态。

当改变控制参数使其轨线通过一条折叠线进入尖点形区域时, 没有激光相变现象发生。但若控制参数的轨线继续延伸到达并穿出另一条折叠线时, 突变现象发生了, 激光系统将从一个有序态跳到另一个有序态。激光与二级相变的类似消失了, 代之的是与一级相变的类似, 滞后现象也随之出现了。图 1 中用箭头标志的路线清楚地显示出激光定态的突变及其延迟性。

在外场扰动下突变的出现, 表明有可饱和吸收体的三能级单模激光器是结构不稳定的。

3. Δ_0 为小于 Δ_c 的某一确定值的情况

当外场 \mathcal{E} 从零开始逐渐增加时, 控制参数的轨线将从 A 的负半轴上的一点出发并在平面 O 上延伸。求出控制参数的轨线通过尖点的条件是 $\Omega = 1$, 这里

$$\Omega = \frac{\left(\frac{\kappa_s}{I_s} + Q\right) \frac{g^2}{\gamma} \Delta_0}{\left(\frac{\kappa_s}{I_s} - 2Q\right)(\kappa_0 + \kappa_s)}. \quad (19)$$

若 $\Omega > 1$, 控制参数的轨线不进入尖点形区域, 故没有突变现象发生。但若 $\Omega < 1$, 控制参数的轨线将进入尖点形区域。当轨线继续延伸并穿出尖点形区域时, 按照延迟约定, 激光系统的状态将会有不连续的变化。在 $\Omega > 1$ 和 $\Omega < 1$ 两种条件下, 激光系统的行为有如此大的差异, 这正表明了激光系统具有发散性。

因此, 当保持 $\Delta_0 < \Delta_c$ 并将一相干外场注入腔内含有可饱和吸收体的三能级单模激光器时, 产生光学双稳态的条件是

$$\Omega < 1. \quad (20)$$

这时透射光强($\propto (b + \mathcal{E})^2$)可以不连续地随入射光强($\propto \mathcal{E}^2$)而变化, 而且跃变后的透射光强将位于一个新的稳定的定态上。

作者感谢陈继述教授对本文的指导。

参 考 文 献

- [1] R. H. Dicke; *Phys. Rev.*, 1954, **93**, No. 1 (Jan), 99.
- [2] T. Poston, I. N. Stewart; *«Catastrophe Theory and its Applications»*, (Pitman, London, 1978), 360, 172.
- [3] H. Haken; *«Handbuch der Physik»*, Bd, XXV/2C, (Springer-Verlag, Berlin, 1970), 173.
- [4] J. F. Scott, M. Sargent III *et al.*; *Opt. Commun.*, 1975, **15**, No. 1 (Sep), 13.
- [5] H. Haken; *«Synergetics—An Introduction»*, (Springer-Verlag, Berlin, 1977), 233.

On catastrophe behavior of the three-level laser

SUN MAOZONG

(Department of Optics, Shandong University, Jinan)

(Received 18 November 1987; revised 19 January 1988)

Abstract

The behavior of the three-level single-mode laser in the presence of an applied field and a saturable absorber is revealed near the lasing threshold. It is shown by quantitatively calculating that nonlinearity of laser field and introduction of applied field cause the correspondence of steady states of the laser with the canonical cusp catastrophe manifold. In this paper the physical meaning of the cusp catastrophe manifold is explained in more detail. The quantitative condition for optical bistability generation is given.

Key words: laser-phase transition.