

# 带延时光学双稳装置分岔点处的光放大效应\*

周士谔 封碧波  
(成都电讯工程学院物理系)

## 提 要

调节在倍周期分岔第一个分岔点处的带延时光学双稳装置(OBD),对与系统谐振的光学小信号具有放大作用。本文对此作了理论分析。

关键词: 光学双稳装置, 延时微分系统, 分岔点, 光放大器。

## 一、引 言

延时-微分系统,特别是带延时光学双稳装置中的分岔、混沌现象已被广泛地研究<sup>[1~4]</sup>。文献[5]以 Duffing 方程为例,指出在倍周期分岔系统中,若系统工作点设置在远离混沌区的临界分岔点处,对与分岔后相谐振的输入小信号将具有显著的放大作用。文中采用的线性近似分析,似已不能满足,还应与非线性分析相配合。本文以另一类可能产生倍周期分岔现象的延时-微分系统,特别是更有实用性的带延时混合型光学双稳装置为例,进一步分析了这一现象。分析表明,只有延时时间远大于系统的弛豫时间,并且输入信号足够小,非线性因素不明显的情况下,才有显著的放大效应。在实用上,双稳临界曲线转折部分的中段具有光放大效应,但其线性区域范围不大。利用这一效应,放大讯号峰值,原则上可接近半波电压,因此具有一定的优越性,故可望制作出一种新型的光放大器。

## 二、放大效应的线性分析

带延时混合型光学双稳装置的动力学方程为<sup>[1]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau' dx(t)}{dt} + x(t) &= \frac{G}{2} \{1 - D \cos[\pi(xt - x\tau + x_0)]\}, \\ x &= \frac{V}{V_*}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $\tau, \tau'$  分别为延时与反馈迴路的弛豫时间;  $D$  为调制因子;  $x, x_0, G$  分别为归一化反馈电压、偏压与开环净增益,  $V, V_*$  为反馈与半波电压。为简便起见,使  $D=1, x_0=(-1/2)$ 。设系统工作点设在周期 2 分岔点处,则相应的方程为

收稿日期: 1987年9月15日; 收到修改稿日期: 1987年11月11日

\* 本文部分内容(线性分析部分)已由 '87 国际激光会议录用。

$$x^* = \frac{G}{Z}(1 - \sin \pi x^*) = f(x^*), \tag{2}$$

$$\left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} = \left| -\frac{1}{Z} \pi G \cos \pi x^* \right| = 1, \quad 0 < x^* < \frac{1}{2}, \tag{3}$$

式中  $x^*$  为周期  $Z$  分岔点处的临界电压。在外加小信号  $a \cos \omega t$  的扰动下, 系统在  $x^*$  附近有一小的  $u(t)$  的扰动, 此时系统方程为

$$\frac{\tau' d[x^* + u(t)]}{dt} + [x^* + u(t)] = \frac{G}{Z} \{1 - \sin \pi [x^* + u(t - \tau)]\} + a \cos \omega t. \tag{4}$$

对上式右方第一项作线性处理, 作时间标度变换  $t \rightarrow (t/\tau)$ , 并利用(2)、(3)两式, 得

$$\varepsilon \dot{u}(t) + u(t) + u(t-1) = a \cos \omega t, \tag{5}$$

式中  $\varepsilon = (\tau'/\tau)$ 。利用格林函数, (5)式的解为

$$u(t) = \int_0^t G(t, t') a \cos \omega t' dt', \tag{6}$$

$$G(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{1 + \varepsilon s + \exp(-s)} \right], \tag{7}$$

式中  $L^{-1}$  为拉普拉斯(Laplace)逆变换算子, 设  $\varepsilon \ll 1$ , 将  $s$  依  $\varepsilon$  展开至 2 阶, 可得(7)式中各极点为:  $s_k = s_{0k} + \varepsilon s_{1k} + \varepsilon^2 s_{2k} = s_{0k} - \varepsilon s_{0k} + \varepsilon^2 [(s_{0k}^2/2) + s_{0k}]$ , 其中  $s_{0k} = \pm i(2k+1)\pi$ , ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 解得

$$G(t) = \frac{\exp\{[(1-\varepsilon+\varepsilon^2)s_{0k} + (\varepsilon^2 \cdot s_{0k}^2/2)]t\}}{(1+\varepsilon) + (\varepsilon - \varepsilon^2)s_{0k}} \tag{8}$$

可看出系统具有一系列的特征频率:  $\omega_k = (1 - \varepsilon + \varepsilon^2) \cdot (2k+1)\pi$ , ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 以及与各  $\omega_k$  相应的阻尼项  $-\gamma_k = (\varepsilon^2 s_{0k}^2/2) = -(\varepsilon^2/2) [(2k+1)\pi]^2$ 。以基模  $\omega_0 = (1 - \varepsilon + \varepsilon^2)\pi$  为例, 在(1)式左方第一项弛豫项影响下, 其周期比无  $\tau'$  时的周期  $Z$  的振荡周期略长一个微量。 $\gamma_k$  意味着对于参数固定在分岔点处的系统状态, 在  $\delta$  力作用下, 对稳态的暂时偏离最终仍将回复至稳态; 也可看出, 各次高阶模  $\omega_k$  与基模相比,  $\gamma_k$  以  $(2k+1)^2$  的倍数很快地增长。在外力  $a \cos \omega t$  作用下, 系统将作多模振荡, 由于各高次模阻尼因子大得多, 在  $\omega \approx \omega_0$  时, 可将各高次模略去。将(8)式代入(6)式, 得基模共振频率为  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  (略去暂态), 积出共振时的响应如下

$$\left. \begin{aligned} u_0(t) &= A_0 \cdot a \cos(\omega t + \varphi_0), \\ \varphi_0 &\approx \arctan [(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot \varepsilon \pi) / (\omega_0 + \varepsilon \pi \gamma)], \\ A_0 &\approx \{ [1 + 0.5\pi^2 \varepsilon^2 (1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^2)]^2 + \varepsilon^2 \pi^2 \}^{1/2} / [0.5\varepsilon^2 \pi^2 (1 + \varepsilon) (1 + \varepsilon^2 \pi^2)]. \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

上述特性用作光信号放大器有很多优点。放大器的响应频率可由延时时间方便地调节; 放大器的动态范围较大(由第三段分析可知, 输出峰值可接近半波电压值, 当输出进一步增长后, 因非线性效应, 系统将无放大作用); 有足够的放大倍数, 例如  $\varepsilon=0.1$  时, 可算得  $A_0 \approx 17.67$ , 当  $\varepsilon$  进一步降低时, 放大倍数  $A_0$  将近似地以比例于  $(1/\varepsilon^2)$  迅速地增长, 只要弛豫时间足够小, 可得到相当大的  $A_0$ 。由于高次模的阻尼很大, 频率响应也较好。

### 三、放大效应的非线性分析

由于有放大效应, 即使输入信号很小,  $u(t)$  也有足够的幅值, 故必须考虑高次展开项。

将(4)式右方第一项展至三次,并取时间标度变换得

$$\varepsilon \dot{u}(t) + u(t) + u(t-1) = c [u(t-1)]^2 + (\pi^2/6) [u(t-1)]^3 + a \cos \omega t, \quad (10)$$

式中  $c = (\pi/2) \sqrt{[(G\pi)^2/2] - 1}$ 。上式右方第一项、第二项为非线性项,可看成在原有线性系统的基础上附加的反馈输入。将高次项中的基模与高阶模分离开来,令(9)式中  $u(t)$  经延时后的幅角为  $\psi = \omega(t-1) + \varphi_0$ , 则  $[u(t-1)]^2 = (A_0 a)^2 [(1/2) + (1/2)\cos 2\psi]$ ;  $[u(t-1)]^3 = (A_0 a)^3 [(3/4)\cos \psi + (1/4)\cos 3\psi]$ 。当  $\varepsilon \ll 1$  时,由上知  $\varphi_0 \approx 0$ ,高次项中基模的延时部分相当于产生  $\omega$  角的相移,在谐振时  $\omega \approx \pi$ ,应为负反馈。故知高次项的影响将削弱放大倍数\*。反馈中的常数部分使振动中心有一小的偏移,类似于倍周期分岔图中上、下两支曲线不相对称。延时部分经时移算符  $\exp[-(d/dt)]$  展开后得  $u$  的各高阶导数,故(11)式有类似于非线性受迫振子的行为,可用类似方法进行处理。取基模近似,有非线性项时,将(9)式改写为

$$u_0(t) = \alpha(t) \cos \omega t + \beta(t) \sin \omega t, \quad (11)$$

式中  $\alpha$ 、 $\beta$  为缓变量<sup>[9]</sup>。将(11)式代入作  $t \rightarrow (t/\tau)$  变换后的(4)式,选取式右展式中的基模部分,利用(2)、(3)两式结果,为使等式成立,  $\cos \omega t$  与  $\sin \omega t$  前的系数均应为零,得  $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$  展至 5 次后满足的方程组为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= -\frac{1}{\varepsilon} \alpha(t) - \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{\pi^2}{8} \gamma_d^2 + \frac{\pi^4}{192} \gamma_d^4 \right) \cos \omega \alpha_d - \omega \beta(t) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{\pi^2}{8} \gamma_d^2 + \frac{\pi^4}{192} \gamma_d^4 \right) \sin \omega \beta_d + \frac{a}{\varepsilon}, \\ \dot{\beta}(t) &= \omega \alpha(t) - \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{\pi^2}{8} \gamma_d^2 + \frac{\pi^4}{192} \gamma_d^4 \right) \sin \omega \alpha_d - \frac{1}{\varepsilon} \beta(t) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{\pi^2}{8} \gamma_d^2 + \frac{\pi^4}{192} \gamma_d^4 \right) \cos \omega \beta_d. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ;  $\gamma_d = \gamma(t-1)$ ,  $\alpha_d = \alpha(t-1)$ ,  $\beta_d = \beta(t-1)$ , 为相应的延时幅值,稳态时  $\dot{\alpha}(t) = \dot{\beta}(t) = 0$ , 且  $\alpha(t) = \alpha(t-1) = \alpha, \dots$ 。稳态解可由与上式相应的非线性方程组解得。用牛顿法在计算机上可以很快地把结果解出来。图 1~图 4 为用高分辨率作图法在计算机上解算出来的各类曲线。图 1 为输入幅值  $a=0.01$  时,不同  $\varepsilon$  的  $\omega \sim \gamma$  谐振曲线。可看出谐振频率随  $\varepsilon$  的减小向高端移动,与线性分析时得出的结论类似。在  $\varepsilon=0.1$  时,得峰值处放大倍数为  $A_0 \approx 14.85$ , 比由(9)式算得的  $A_0 \approx 17.67$  要小。另外,由(9)式算得的  $A_0$  随  $\varepsilon$  的减小应按平方关系迅速地增长。但由图 1 看出,  $\varepsilon$  由 0.1 减小至 0.05 时,其输出仅从 14.85 增至 18.60,这是由于负反馈作用的结果。图 2 描绘出  $\varepsilon=0.1$ ,  $a=0.01$  时输出、输入间的相移  $\varphi$  随  $\omega$  的变化情况。在谐振点处,  $\varphi=0$ , 偏离谐振点后,  $\varphi$  迅速从正负两方向增长。反馈部分因延时项引起的接近  $\omega=\pi$  的附加相移,使在谐振点处的放大减小,而在谐振点两旁则负反馈量相应减小,使谐振曲线变得更为平坦。图 3 为三种不同输入时的  $\omega \sim \gamma$  曲线,可看出当  $a=0.25$  时,由于输出  $\gamma$  的增长,非线性效应更加突出,曲线更趋平坦。同时,谐振点处的放大倍数也相应急剧地减少为  $A_0=2.28$ 。图 4 为  $A_0$  随输入信号增长而变小的关系曲线,曲线有如指数下降,并向  $A_0=1$  趋近(当  $a$  接近于 1 即半波电压值时。若  $a$  不大,  $\varepsilon$  很小,  $A_0$  很大时,当输出幅值接近  $\gamma=1$  时,也会出现增涨控制现象)。作

\* 高次项中的各高阶模通过放大器后将很快地被衰减掉,可略去不计。

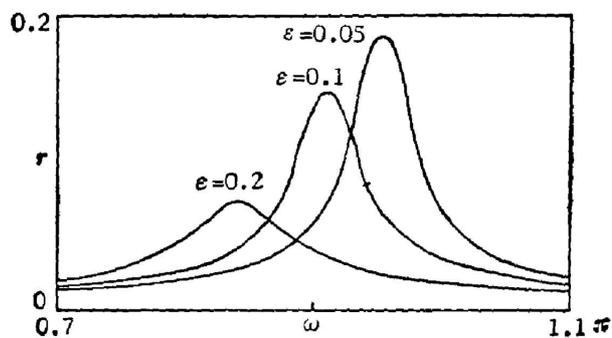


Fig. 1  $\omega \sim r$  curves with different  $\varepsilon$ 's.  $a=0.01$

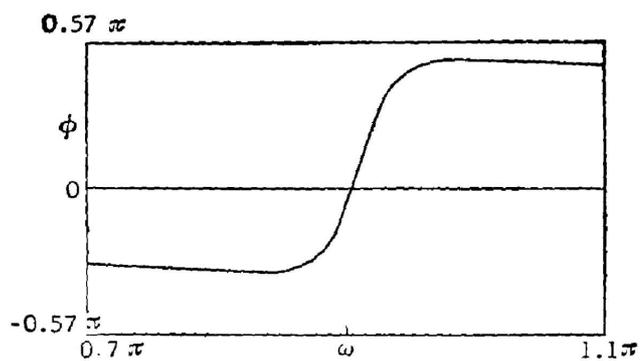


Fig. 2 Phase difference between input and output signals versus  $\omega$ .  $a=0.01$ ,  $\varepsilon=0.1$

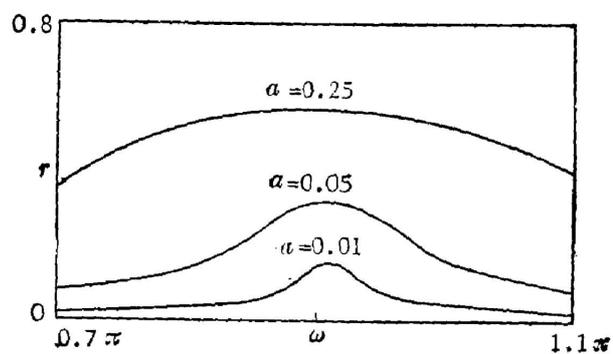


Fig. 3  $\omega \sim r$  curves with different input signals.  $\varepsilon=0.1$

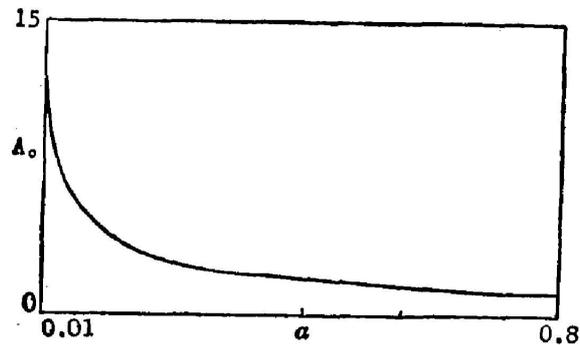


Fig. 4 Amplification  $A_0$  versus amplitude  $a$  of input signal at resonant frequency.  $\varepsilon=0.1$

为光路放大器来说,以上结果与电路中带负反馈的调谐放大器相当类似。

也可以用计算机对(4)式直接求解。利用(2)、(3)两式,将解得的临界点值  $G^*=0.749502565$ ,  $x^*=0.176970251$  代入,令  $a=0.01$ ,  $\varepsilon=0.1$ ,可解得谐振频率为  $\omega=0.887\pi$ ,与线性分析中解得  $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\approx(1-\varepsilon+\varepsilon^2)\pi=0.901\pi$  十分接近。放大倍数  $A_0=13.26$ ,比高次展开时所得  $A_0=14.85$  要小些,当然前者更为精确。但在谐振点两旁因阻尼很小,暂态过程很难消除,部分区域还有  $\alpha$ 、 $\beta$  的恒振动过程,应配合数字滤波法才能解出类似曲线来。

#### 四、结 论

延时-微分系统在强迫力作用下具有十分丰富的内容,在理论与实验上还有许多值得探讨的问题。除去以上讨论的内容外,反馈部分的直流分量等效于系统的附加偏压。偏压也是控制参量,在强信号作用下,系统有可能被触发到其它周期态直至混沌区。在实践上,上述具有基模与各阶高次模本征频率的系统应比一般二阶非线性常微分方程所描写的更切合实际。因为实际系统各部分对强迫力的响应总有一定的延迟效应,系统的本征频率也总包含着谐波成分。实用上,只要反馈回路的弛豫时间足够小,并尽量减少光路与电路的随机涨落(涨落会模糊分岔点的边界,使调节困难),这种光放大器可能具有一定的应用前景。

研究生孙云卿作了部分计算机运算工作,成都电讯学院科研处与研究生部对本文课题进行了资助,在此表示感谢。

#### 参 考 文 献

- [1] F. A. Hopf et al.; *Phys. Rev. A.*, 1982, **25**, No. 4 (Apr), 2172~2182.
- [2] 李淳飞等;《光学学报》,1985, **5**, No. 2 (Feb), 128~134.
- [3] 赵 勇等;《物理学报》,1986, **35**, No. 9 (Sep), 1115~1125.
- [4] 张洪钧等;《物理学报》,1984, **33**, No. 7 (Jul), 1024~1030.
- [5] K. Wiesenfeld, et al.; *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **55**, No. 1 (Jul), 13~16.
- [6] D. W. Jordan et al.; *«Nonlinear Ordinary Differential Equations»* (J. Crank, Oxford Univ. Press, Oxford, 1977), 104~106.

---

## Optical amplification effect in an OBD with delayed feedback at bifurcation points

ZHOU SHIE FENG BING

*(Department of Physics, Chengdu Institute of Radio Engineering)*

*(Received 15 September 1987; revised 11 November 1987)*

### Abstract

Optical bistable devices (OBD) with delayed feedback adjusted just before the onset of the first period-doubling bifurcation may amplify a low-amplitude optical signal with a resonant frequency. Theoretical analysis are given.

**Key words:** optical bistable device (OBD), delay differential system, bifurcation point, optical amplifier.