第8卷 第8期
1988年8月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 8, No. 8
August, 1988

多光子光学双稳性的复振幅解析分析

马爱群 陈历学 李淳飞
(哈尔滨工业大学应用物理系)

提 要

本文应用线性化稳定性分析的方法，对用半经典的麦克斯韦-布赫(Maxwell-Bloch)方程描述的多光子光学双稳性进行了复振幅分析。分析的结果表明：在对极化量进行绝热消除后，多光子光学双稳性特性曲线上合作支和单原子支不存在失稳问题，同时说明由软模不稳定性引起的多光子光学双稳性的混沌态不存在，并指出稳定性的第三个条件是双稳性存在的条件。

关键词：多光子，光学双稳性，分析。

一、引 言

激光和光学双稳性的不稳定性和混沌态是量子光学领域中的一个重要课题。应用耗散结构理论和协同作用理论[1]研究光学不稳定性已经取得了一系列成果。Mc Call[2]、Benza[3]、Bonifacio[4]、Ikeda[5]等人都证明了光学双稳性特性曲线上的单原子支存在失稳现象，在适当的条件下还会导致混沌输出。

本文应用线性化稳定性分析的方法，探讨了采用半经典的麦克斯韦-布赫方程描述的多光子光学双稳性的输出不稳定性问题。

二、半经典理论

假定一个光学腔充满了由 N 个二能级原子组成的介质，这些原子与共振的腔场模发生相互作用*。原子和场的衰变通过库的相互作用来表示。在电偶极和旋波近似条件下，其哈密顿量为[6]：

$$\left.\begin{aligned}
&H=\sum_{j=1}^{5}H_j,\\
&H_1=\hbar\omega_0 a^+a+\frac{1}{2}n\hbar\omega_0\sum_{\mu=1}^{N}\sigma_\mu^z,\\
&H_2=i\hbar\sum_{\mu=1}^{N}[g\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_\mu)a^+)^n\sigma^- - g\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_\mu)a^n\sigma_\mu^+],\\
&H_3=\sum_{\mu=1}^{N}(\sigma_\mu^+\Gamma_A+\sigma_\mu^-\Gamma_A^+),\\
&H_4=a^+\Gamma_F+a\Gamma_F^+,\\
&H_5=i\hbar[a^+\varepsilon\exp(-i\omega_0 t)-a\varepsilon^*\exp(i\omega_0 t)],
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

收稿日期：1987年4月10日；收到修改稿日期：1987年11月9日

* 这里忽略了它们的空间变化。

式中 a、a^+ 是场模的玻色算符；$\sigma_\mu^\pm$ 和 σ_μ^z 是第 μ 个原子的泡利算符，ω_0 是腔的共振频率，$n\omega_0$ 和原子的共振频率相等。相干驱动场也具有频率 ω_0，其模是 s，Γ_A，Γ_A^+ 为诸原子的库，用来表述相干泵浦和辐射的衰减；Γ_F，Γ_F^+ 是描述腔模衰变的库，g 是场和诸原子之间耦合的 n 光子矩阵元。在纯吸收的情况下，系统能被腔模算符 a，全部原子的极化

$$J^+=\sum_{\mu=1}^{N}\sigma_\mu^+\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_\mu),$$

全部原子的反转 $J^z=\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{N}\sigma_\mu^z$ 来描述。采用半经典近似，即令 $\alpha=\langle a\rangle$，$\alpha^*=\langle a^+\rangle$，$\nu^*=\langle J^-\rangle$，$\nu=\langle J^+\rangle$ 和 $D=\langle J^z\rangle$。在零涨落的极限下，假定所有的相关函数能够被分解成因式相乘时，n 个光子跃迁过程能够用如下的麦克斯韦-布赫方程来描述：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\nu}&=-\gamma_\perp\nu+2g\alpha^nD,\\ \dot{D}&=-\gamma_/(D-D_0)-g[(\alpha^*)^n\nu+\alpha^n\nu^*],\\ \dot{\alpha}&=-K(\alpha-E)+ng\nu(\alpha^*)^{n-1},\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式中 $\gamma_\perp$ 和 $\gamma_/$ 分别为原子极化和反转的衰变速率，K 是腔模的衰变速率，$E=(s/K)$ 正比于驱动场的模，D_0 为(由不同场发生任何作用的)诸原子的相干泵浦所决定的反转。当 $E\neq 0$ 时，$D_0<0$ 时，(2)式描述 n 光子光学双稳性。$D_0=(N/2)$ 时，表示全部反转。

三、数学模型和平衡态解

对极化量 ν 进行绝热消除，即令 $\dot{\nu}=0$，那么(2)式简化成

$$\left.\begin{aligned}\nu&=2g\alpha^nD/\gamma_\perp,\\ \dot{D}&=-\gamma_/(D-D_0)-4g^2\alpha^n(\alpha^*)^nD/\gamma_\perp,\\ \dot{\alpha}&=-K(\alpha-E)+2g\alpha^n(\alpha^*)^{n-1}D/\gamma_\perp,\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

令 $x+iy=(4g^2/\gamma_\perp\gamma_/)^{\frac{1}{2n}}\alpha$，$a+ib=(4g^2/\gamma_\perp\gamma_/)^{\frac{1}{2n}}E$，$z=D$，则(3)式变为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-Kx+Ka+\frac{2^{[(2-n)/n]}g^{(2/n)}\gamma_/^{[(n-1)/n]}}{\gamma_\perp^{(1/n)}}(x^2+y^2)^{n-1}xz,\\ \dot{y}&=-Ky+Kb+\frac{2^{[(2-n)/n]}g^{(2/n)}\gamma_/^{[(n-1)/n]}}{\gamma_\perp^{(1/n)}}(x^2+y^2)^{n-1}yz,\\ \dot{z}&=-\gamma_/(z-D_0)-\gamma_/(x^2+y^2)^nz,\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

(4)式就是分析 n 光子光学双稳性的不稳定性的数学模型，它是一个非线性方程组。(4)式中的 x 和 y 为描述输出光场(电场)的变量，a 和 b 为描述输入光场(电场)的变量。

当输入变量 a 和 b 一定时，令 $\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$，可得到平衡态解的方程组为

$$\left.\begin{aligned}-Kx_s+Ka+\eta(x_s^2+y_s^2)^{n-2}x_sz_s=0,\\ -Ky_s+Kb+\eta(x_s^2+y_s^2)^{n-1}y_sz_s=0,\\ -\gamma_/(z_s-D_0)-\gamma_/(x_s^2+y_s^2)^nz_s=0,\\ \eta=2^{[(2-n)/n]}g^{(2/n)}\gamma_/^{[(n-1)/n]}/\gamma_\perp^{(1/n)}。\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

由(5)式得到平衡态下的态方程为

$$\left.\begin{aligned} &K^2|E_s|^2=|\alpha_s|^2\left(K-\eta\frac{D_0|\alpha_s|^{2(n-1)}}{1+|\alpha_s|^{2n}}\right)^2,\\ &|E_s|^2=a^2+b^2,\ |\alpha_s|^2=x_s^2+y_s^2。\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

$|E_s|^2$、$|\alpha_s|^2$ 分别为平衡态下输入光强和输出光强的标度量。

四、平衡态解的软模稳定性分析

令
$$x(t)=x_s+\hat{x}(t),\ y(t)=y_s+\hat{y}(t),\ z(t)=z_s+\hat{z}(t),$$
代入(4)式，取一级近似，即保留 $\hat{x}(t)$, $\hat{y}(t)$, $\hat{z}(t)$ 的线性项，有

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\hat{x}}(t)=a_{11}\hat{x}(t)+a_{12}\hat{y}(t)+a_{13}\hat{z}(t),\\ &\dot{\hat{y}}(t)=a_{21}\hat{x}(t)+a_{22}\hat{y}(t)+a_{23}\hat{z}(t),\\ &\dot{\hat{z}}(t)=a_{31}\hat{x}(t)+a_{32}\hat{y}(t)+a_{33}\hat{z}(t),\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

显然

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}=-K+\eta(x_s^2+y_s^2)^{n-1}z_s+2\eta(n-1)(x_s^2+y_s^2)^{n-2}x_s^2z_s,\\ &a_{12}=2\eta(n-1)x_s^2+y_s^2)^{n-2}x_sy_sz_s,\\ &a_{13}=\eta(x_s^2+y_s^2)^{n-1}x_s,\\ &a_{21}=2\eta(n-1)(x_s^2+y_s^2)^{n-2}x_sy_sz_s,\\ &a_{22}=-K+\eta(x_s^2+y_s^2)^{n-2}z_s+2\eta(n-1)(x_s^2+y_s^2)^{n-2}y_s^2z_s,\\ &a_{23}=\eta(x_s^2+y_s^2)^{n-1}y_s,\\ &a_{31}=-2n\gamma_f(x_s^2+y_s^2)^{n-1}x_sz_s,\\ &a_{32}=-2n\gamma_f(x_s^2+y_s^2)^{n-1}y_sz_s,\\ &a_{33}=-\gamma_f[1+(x_s^2+y_s^2)^n],\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

设线性方程组(7)式的特征根为 λ，那么由(7)式便得到如下特征方程

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0,\tag{9}$$

整理后(9)式变为

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^3+T\lambda^2+\delta\lambda+L=0,\\ &T=2K-2n\eta(x_s^2+y_s^2)z_s+\gamma_f+\gamma_f(x_s^2+y_s^2)^n,\\ &\delta=[-K+\eta(x_s^2+y_s^2)^{n-1}z_s]^2+[-K+\eta(x_s^2+y_s^2)^{n-1}z_s][2\eta(n-1)(x_s^2+y_s^2)^{n-1}z_s]\\ &\quad+2K\gamma_f+2K\gamma_f(x_s^2+y_s^2)^n-2n\eta\gamma_f(x_s^2+y_s^2)^{n-1}z_s,\\ &L=-[-K+\eta(x_s^2+y_s^2)^{n-1}z_s]\{[-K+\eta(x_s^2+y_s^2)^{n-1}z_s][-\gamma_f-\gamma_f(x_s^2+y_s^2)^n]\\ &\quad+2(n-1)\eta(x_s^2+y_s^2)^{n-1}z_s(-\gamma_f)+2\eta\gamma_f(x_s^2+y_s^2)^{2n-1}z_s\}。\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

平衡态 $[x_s, y_s, z_s]$ 的软模稳定性的 Routh-Harwitz 判据为[7]

$$T>0,\ \delta>0,\ L>0,\ (T\delta-L)>0,\tag{11}$$

1. 由于 $D_0<0$ 时，(2)式描述多光子光学双稳性，那么此时 $z_s<0$;

2. 由于 T, δ, L 都只通过 $(x_s^2+y_s^2)$ 与平衡态值发生关系，即 T、δ 和 L 中只包含 $(x_s^2+y_s^2)$ 而不出现 x_s, y_s 项，平衡态 $[x_s, y_s, z_s]$ 的稳定性取决于 $(x_s^2+y_s^2)$;

3. 分析(10)式不难知 T, δ, $(T\delta-L)$ 均大于 0, 始终为正量, 因此多光子光学双稳性系统稳定的第一, 第二和第四个条件始终得到满足。

4. 由(6)式可得

$$\frac{d|E_s|}{d|\alpha_s|}=\frac{|\alpha_s|}{|E_s|}\left[K-\frac{\eta D_0|\alpha_s|^{2(n-1)}}{1+|\alpha_s|^{2n}}\right]\left[K-\frac{\eta D_0|\alpha_s|^{2(n-1)}}{1+|\alpha_s|^{2n}}\right]$$
$$+\frac{\eta D_0[2|\alpha_s|^{2(2n-1)}-2(n-1)|\alpha_s|^{2(n-1)}]}{[1+|\alpha_s|^{2n}]^2}。\tag{12}$$

进一步分析(12)式并和(10)式相比较有

$$\frac{d|E_s|}{d|\alpha_s|}=\frac{|\alpha_s|}{|E_s|}\frac{1}{K^2}\frac{1}{1+|\alpha_s|^{2n}}\frac{1}{\gamma_f}L,\tag{13}$$

这说明 L 和 $(d|E_s|/d|\alpha_s|)$ 同号。因而只有多光子光学双稳性特性曲线上正斜率部分所对应的平衡态点 $[x_s, y_s, z_s]$ 使得 $L>0$, 即特性曲线上合作支和单原子支所对应的平衡态点使得(11)式得到满足; 特性曲线上负斜率部分对应的平衡态点, 使得 $L<0$, 即(11)式不被满足。

综合四点可知, 多光子光学双稳性特性曲线上除负斜率部分对应的平衡态点不稳定外, 合作支和单原子支上的各点对应的平衡态点都是稳定的, 即合作支和单原子支不存在失稳问题。

五、稳定性的第三个条件是双稳条件

上节说明了稳定性的第三个条件是 $L>0$, 而(13)式即 $(d|E_s|/d|\alpha_s|)$ 和 L 同号。对于多光子光学双稳性的态(6)式的分析表明, 如存在光学双稳性, 那么 $(d|E_s|/d|\alpha_s|)<0$; 在此条件下, 输出功率有三个值, 其中两个值是稳定值, 一个值是不稳定值, 即有双稳现象出现。对多光子光学双稳性光功率特性曲线的分析表明, 光功率特性曲线的斜率由正变负后, 这样就导致在输入功率一定范围内对应于同一个输入功率值, 输出功率值有三个解, 其中两个是稳态解(斜率为正的解), 一个是不稳定解(斜率为负的解)。由于稳态方程的连续性, 要产生两个稳态解, 第三个不稳定解是必须存在的。因此双稳现象从本质上说是描述多光子光学双稳性的麦克斯韦-布赫方程不稳定性的一种反映。只有存在不稳定的平衡态点, 才能存在光学双稳性。由于稳定性的第三个条件与双稳的产生直接相关。所以稳定性的第三个条件是双稳条件。

六、结　论

1. 用半经典的麦克斯韦-布赫方程描述的多光子光学双稳性, 在对原子极化量进行绝热消除之后, 进行线性化的复振幅分析, 有多光子光学双稳性特性曲线上单原子支不存在失稳的结论。

2. 不能用线性稳定性分析方法研究由半经典的麦克斯韦-布赫方程所描述的由软模不稳定性而引起的多光子光学双稳性的不稳定输出条件和机制。

3. 多光子光学双稳性的本质是描述它的半经典的麦克斯韦-布赫方程不稳定的一种反

映，稳定性的第三个条件是双稳条件。

参 考 文 献

[1] H. Haken; «Synergetics», (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1977).
[2] S. L. McCall; *Appl. Phys. Lett*, 1978, **32**, No. 5 (Mar), 284.
[3] V. Benza, L. A. Lugiato and P. Meystre, *Opt. Comm*, 1980, **33**, No. 1 (Apr), 113.
[4] R. Bonifacio, M. Groachi and L. A. Lugiato, *Opt. Comm*, 1979, **30**, No. 1 (Jul), 129.
[5] K. Ikeda, *Opt. Comm*, 1979, **30**, No. 2 (Aug), 257.
[6] Margaret Reid, Kenneth J. McNeil and Daniel F. Walls, *Phys. Rev.* (*A*), 1981, **24**, No. 4 (Oct), 2029.
[7] L. Sczaniecki, E. Szczepaniak, *Optica Acta*, 1985, **32**, No. 9/10 (Oct), 1259.

Theoretical analysis of complex amplitude of vibration for multi-photon optical bistability

MA AIQUN, CHEN LIXUE AND LI CHUNFEI

(*Department of Physics, Harbin Institute of Technology*)

(Received 10 April 1987; revised 9 November 1987)

Abstract

In this paper, the theory of linear stability analysis is used in analyzing the complex amplitude of vibration of multi-photon optical bistability which was described by semiclassical Maxwell-Bloch equations. The results of analysis show that after the adiabatic elimination being acted to atomic polarization there is no instability on cooperation branch and one single branch of multi-photon optical bistability characteristic, showing that there is no chaos of multi-photon optical bistability which was caused by the instability of the soft mode at the same time. It has been indicated that the third condition of stability is related to bistable characteristic of multi-photon optical bistability.

Key words: multi-photon; optical bistability; analysis