

高斯光束照射下的近似 Talbot 自成像 效应及其两种新应用

吕洪君 白贵儒

(中国科学技术大学 物理系)

提 要

本文讨论了高斯光束照明下的 Talbot 近似自成像的性质。提出了利用 Talbot 自成像测量高斯光束发散角的简便方法;也提出在满足一定条件下,可得到自成像的超高倍放大率。

关键词: Talbot 效应。

一、引 言

Talbot 效应是用单色光照射粗光栅在适当距离上观察到光栅的自成像的效应。近年来, Talbot 效应已被推广至二维及球面波情况^[1~3], 也被应用于光路调整、光学信息处理、制作可变透光比粗光栅以及测量凹透镜焦距等方面^[4~6]。

本文首先讨论了高斯光束照射下光栅的近似自成像效应, 及它的一些性质, 提出一种测量高斯光束发散角的简便方法。在理论分析球面波照射下的 Talbot 效应放大率公式的基础上, 推导并给出了放大率表达式的另一种形式, 发现在一定的条件下, 其自成像有超高倍放大的性质。

二、高斯光束下的近似自成像

图 1 是讨论高斯光束照射下衍射广义自成像的光路图^[7]。设入射到 (x_1, y) 平面上的基模高斯光束为

$$\begin{aligned}
 u_i &= \exp \left[-\pi \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{b^2} \right) \right] \\
 &\times \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda R} (x_1^2 + y_1^2) \right] \\
 &= \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda} D'_1 (x_1^2 + y_1^2) \right]。
 \end{aligned}$$

其中 $D'_1 = j \frac{\lambda}{b^2} + D_1$, $D_1 = \frac{1}{R}$ 。上式表示, 可以把高束光束等价成一个广义的球面波, 球面波的曲率半径为 $1/D'_1$ 。

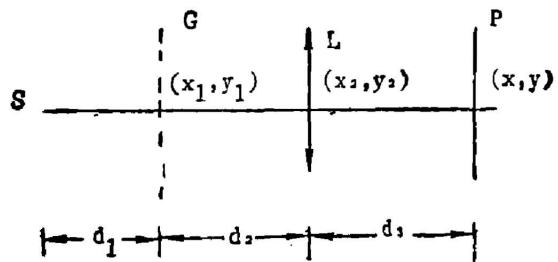


Fig. 1 Diagram of self-imaging
S—light source; G—Ronchi grating; L—lens;
P—observation Screen

令 $F=1/f$ 、 $D_2=1/d_2$ 、 $D_3=1/d_3$ 、 $A=D_2+D_3-F$ 、 $B=D_1+D_2-(D_2^2/A)$ 、 $B'=B+j\frac{\lambda}{b^2}$ 、 $C=D_3-[D_3^2(D_1+D_2)/AB']$ ，其中 f 为透镜的焦距，其它量如图 1 所示。

为了讨论问题简便，假设透镜的通光孔径无限大，物是栅常数为 $d=\frac{1}{D}$ 的 Ronchi 光栅，其口径也为无限大。球面波入射下单透镜的自成像面上的光栅分布 $u(x, y)$ 为^[7]

$$u(x, y) = \frac{D_2 D_3}{AB'} \exp\left[j\frac{\pi C}{\lambda}(x^2+y^2)\right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \exp\left[j2\pi \frac{D_2 D_3}{AB'} n D x\right] \times \exp\left[-j\pi n^2 D^2 \lambda / B'\right] \quad (1)$$

由 D_1 、 B' 与 D_1 、 B 的关系，通过数学运算可得到

$$\exp\left[-j\frac{\pi n^2 D^2 \lambda}{B'}\right] = \exp\left[-j\frac{\pi n^2 D^2 \lambda B}{B^2 - \lambda^2 / b^4}\right] \cdot \exp\left[-\frac{\pi n^2 D^2 \lambda^2 b^2}{b^4 B^2 + \lambda^2}\right] \quad (2)$$

$$\exp\left[j2\pi \frac{D_2 D_3}{AB'} n D x\right] = \exp\left[j\frac{2\pi D_2 D_3 n D x B}{A(B^2 - \lambda^2 / b^4)}\right] \exp\left[\frac{D_2 D_3 j \lambda b^2 n D x}{A(b^4 B^2 + \lambda^2)}\right] \quad (3)$$

把(2)、(3)式代入(1)式有

$$u(x, y) = \frac{D_2 D_3}{AB'} \exp\left[j\frac{\pi C}{\lambda}(x^2+y^2)\right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \exp\left[-\frac{\pi n^2 D^2 \lambda^2 b^2}{b^4 B^2 + \lambda^2}\right] \exp\left[\frac{D_2 D_3 b^2 \lambda n D x}{A(b^4 B^2 + \lambda^2)}\right] \times \exp\left[-j\frac{\pi n^2 D^2 \lambda B}{B^2 - \lambda^2 / b^4}\right] \cdot \exp\left[j\frac{2\pi D_2 D_3 n D x B}{A(B^2 - \lambda^2 / b^4)}\right] \quad (4)$$

令 $B'_n = B_n \exp\left[-\frac{\pi n^2 D^2 \lambda^2 b^2}{b^4 B^2 + \lambda^2}\right] \cdot \exp\left[\frac{D_2 D_3 b^2 \lambda n D x}{A(b^4 B^2 + \lambda^2)}\right]$ ，当

$$\frac{B}{B^2 - \frac{\lambda^2}{b^4}} = 2md^2 \lambda, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

时， $b^2 \gg \lambda$ ，调制因子近似为 1。此时高斯光束的性质可以忽略。像面上得到原光栅较好的自成像。(5)式变成 $\frac{1}{B} = 2md^2 \lambda$ ，放大率 $M' = AB/D_2 D_3$ ，和文献[7]中的结果一致。

三、应 用

在激光高斯光束照射下的 Talbot 自成像中，自成像公式和理想球面波照射下的公式是有差别的。考虑到 $\lambda \sim 10^{-7}$ m、 $b \sim 10^{-2}$ m、 $P=d_1+d_2 \sim 10^{-1}$ m、 $R \sim 1$ m、 $\lambda^2, b^2 \sim 10^{-6}$ m⁻¹、 $B^2 \sim 10^{-2}$ m⁻¹。这样 $B^2 \gg \frac{\lambda^2}{b^2}$ 。自成像公式(5)可由 $\frac{RP}{R \pm P} = 2md^2 \lambda$ ，

$$u(x, y) = \frac{D_2 D_3}{AB'} \exp\left[j\frac{\pi C}{\lambda}(x^2+y^2)\right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} B'_n \exp\left[j2\pi \left[\frac{D_2 D_3 B}{A(B^2 - \lambda^2 / b^4)}\right] n D x\right] \quad (6)$$

(6)式就是高斯光束照射下光栅自成像表达式，(5)式是自成像的 Talbot 距离， $M' = A(B^2 + \lambda^2 / b^4) / D_2 D_3 B$ 是自成像的放大率。

把(6)式与文献[7]中的表达式相比，形式是一样的。但此时的 B'_n 和 B_n 是有差别， B'_n 和 B_n 的相差因子 $\exp\left[-\frac{\pi n^2 D^2 \lambda^2 b^2}{b^4 B^2 + \lambda^2}\right] \exp\left[\frac{D_2 D_3 b^2 \lambda n D x}{A(b^4 B^2 + \lambda^2)}\right]$ 。这个因子是由高斯光束的参量 b 带来的。当 b 越大，这个差别越大，此因子调制光栅光谱的每一分量。实验中已发现，当人为地增大 b 时，像面上得到一个畸变的像光栅。但在通常条件取代。这样就有 $R = 2mPd^2 /$

$\lambda\left(\frac{2md^2}{\lambda} - P\right)$ 。通过测量 p 值可求出高斯光束的曲率半径。在对准球面高斯光束进行曲率半径测量时,改变激光到光栅的距离,分别测出不同 R_1 和 R_2 , 由 R 和 b 的关系^[8], 对应 R_1 和 R_2 有 b_1 和 b_2

$$b_1 = \left[\frac{(R_2 - z_{12})z_{12}R_1^2\lambda^2}{(R_1 + z_{12} - R_2)(R_1 + z_{12})} \right]^{1/4}, \quad b_2 = \left| \frac{\lambda z_{12}}{b_1} \left[1 + \left(\frac{b_1^2}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{1}{z_{12}} + \frac{1}{R_1} \right)^2 \right]^{1/2} \right|。$$

式中 z_{12} 是不同球面之间的距离,也即是激光到光栅的距离的两次改变量。高斯光束的发散角为

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{b_2 - b_1}{z_{12}}, \quad (7)$$

单色球面波照射相距 R 的栅常数为 d 的光栅,在光栅后面

$$P = \frac{M}{m} d^2 / \lambda, \quad (8)$$

距离处,将会出现强度分布周期为 $d' = \frac{M}{m} d$, 亮纹宽度 $a' = Ma$ 的非涅耳像,其中 $M = 1 + P/R$, m 为非涅耳像序数, M 为放大倍数。

对于光栅常数为 d , 透光宽度为 a 的光栅,非涅耳像序数 m 最大值小于 d/a 。

根据自成像公式

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{P} = \frac{\lambda}{2md^2}。 \quad (9)$$

联立(9)与 M 的定义式,经过运算求得

$$M = R / \left(R - \frac{2md^2}{\lambda} \right)。 \quad (10)$$

由(10)式可以看出当 $R \rightarrow \frac{2md^2}{\lambda}$ 时, M 无限大。可以实现无透镜的超高倍放大。

如果使用 $m > 1$ 的自成像,则放大的像透光比发生变化。实验时选用了 $d = 10 \mu\text{m}$, $\frac{d}{a} = 10$ 的光栅,放大倍数达到 $10^3 \sim 10^4$ 时,成像效果还相当好。使用制备效果不好的光栅观察时,可观察到线条不均匀等缺陷,利用此原理也可检验光栅的质量。

参 考 文 献

- [1] J. T. Winthrop, C. R. Worthington; *J. O. S. A.*, 1965, **55**, No. 4(Apr), 373.
- [2] D. Joyeux, Y. Cohen-Sabban; *Appl. Opt.*, 1982, **21**, No. 3(Feb), 625.
- [3] 白贵儒等;《光学学报》,1984, **4**, No. 5 (May), 582.
- [4] 明海等;《激光》,1981, **8**, No. 1 (Jan), 35.
- [5] D. E. Silve; *Appl. Opt.*, 1971, **10**, No. 8 (Aug), 1980.
- [6] 白贵儒等;《量子电子学》,1985, **2**, No. 1 (Jan), 60.
- [7] 廖江红等;《光学学报》,1985, **5**, No. 4 (Apr), 331.
- [8] J. D. 加斯基尔;《线性系统·傅里叶变换·光学》,(人民教育出版社,1983), 419.

**Approximate Talbot self-imaging effect for Gaussian beams
and two new applications of Talbot effect**

LU HONGJUN AND BAI GUIRU

(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

(Received 13 April 1987)

Abstract

The present paper has discussed some characters of approximate Talbot self-imaging phenomena for incident spherical Gaussian beams. Upon using Talbot self-imaging a convenient way for measuring divergence angle of Gaussian beams and ultra-high amplification of the self-imaging in some condition are also proposed.

Key words: Talbot effect.