第8卷 第7期
1988年7月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 8, No. 7
July, 1988

非对称光学系统的*ABCD*定律

林 强 陆璇辉 王绍民
(杭州大学物理系)

提 要

用矢量分析的方法简明地推出了一般非对称光学系统的衍射积分公式。在此基础上，借助光束复曲率张量的概念，给出非对称光学系统的张量形式 *ABCD* 定律，最后给出简单的应用例子。

关键词：衍射积分，光线追迹，矩阵光学，*ABCD* 定律。

一、引 言

对一个包含多个光学元件的系统，菲涅耳衍射积分公式不能直接应用。1970 年，Collins 导出了一个用矩阵元表达的复杂光学系统的衍射积分公式[1]，在近轴条件下，把光线光学和波动光学紧密地联系起来。本文借助矢量分析方法，简明地推导出一般非对称光学系统的衍射积分公式。引入复曲率张量的概念，进一步推出了高斯光束通过非对称系统的变换，即 ***ABCD*** 定律，它能方便地处理非对称系统的光束传输和变换问题。

二、非对称光学系统的衍射积分

当光学系统中包含非对称元件，比如柱面透镜，椭球面镜、倾斜了的对称元件以及非对称折射率分布空间等时，描述对称系统的 2×2 阶矩阵就应扩张为 4×4 阶矩阵[2]。其定义为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_2' \\ y_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & d_{11} & d_{12} \\ c_{21} & c_{22} & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}, \tag{1}$$

或可写成矢量形式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{P}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{P}_1 \end{pmatrix}。 \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为位置矢量，$\boldsymbol{P}$ 为方向矢量，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ 均为 2×2 阶矩阵。

在 $\det(B)\neq0$ 时，从(2)式可直接得出

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 \\ \boldsymbol{P}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -B^{-1}A & B^{-1} \\ C-DB^{-1}A & DB^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

收稿日期：1987年6月23日；收到修改稿日期：1987年8月31日

对 $\det(B)=0$ 的情况，实际上表示一种成像关系。在傍轴条件下，从输入面 (x_1, y_1) 到输出面 (x_2, y_2) 的程函可表示为[1]

$$L=L_0+\frac{1}{2}[-n_1(x_1x_1'+y_1y_1')+n_2(x_2x_2'+y_2y_2')]。\tag{4}$$

其中 L_0 为轴上光程，n_1、n_2 分别为入射空间和出射空间的折射率。把(4)式写成矢量式，再利用(3)式，有

$$L=L_0+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\ \boldsymbol{r}_2\end{pmatrix}^T R\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\ \boldsymbol{r}_2\end{pmatrix}=L_0+L_1,\tag{5}$$

其中"T"表示转置，R 为 4×4 阶矩阵：

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} n_1\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & -n_1\boldsymbol{B}^{-1}\\ n_2(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}) & n_2\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}。\tag{6}$$

可以证明[1]，$\boldsymbol{R}$ 具有转置对称性，因此

$$\begin{cases}(n_1\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^T=n_1\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A},\\ (-n_1\boldsymbol{B}^{-1})^T=n_2(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}),\\ (n_2\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1})^T=n_2\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}。\end{cases}\tag{7}$$

从(7)式直接推出

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^T-\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T=\dfrac{n_1}{n_2}E,\\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}^TB=\dfrac{n_1}{n_2}E。\end{cases}\tag{8}$$

其中 E 为 2×2 阶单位矩阵。(8)式实际上对应于对称光学系统的行列式值，亦即拉格朗日不变量。

一般的衍射积分可表示为

$$E_2(\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{A}'\iint E(\boldsymbol{r}_1)\exp(iKL)d\boldsymbol{r}_1。\tag{9}$$

其中 K 为波矢，程函 L 由(5)式给出，振幅 $\boldsymbol{A}'$ 可用能量守恒定律推导如下：

$$\iint|E_2(\boldsymbol{r}_2)|^2d\boldsymbol{r}_2=\iint|E_1(\boldsymbol{r}_1)|^2d\boldsymbol{r}_1。\tag{10}$$

把(9)式代入(10)式，左边为

$$\begin{aligned}&\iint E_2(\boldsymbol{r}_2)E_2^*(\boldsymbol{r}_2)d\boldsymbol{r}_2\\ &=|\boldsymbol{A}'|^2\iiiint E_1(\boldsymbol{r}_1)E_1^*(\boldsymbol{r}_1')d\boldsymbol{r}_1d\boldsymbol{r}_1'\\ &\quad\cdot\iint\exp\{iK[L(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)-L(\boldsymbol{r}_1',\boldsymbol{r}_2)]\}d\boldsymbol{r}_2\\ &=|\boldsymbol{A}'|^2\iiiint E_1(\boldsymbol{r}_1)E_1^*(\boldsymbol{r}_1')d\boldsymbol{r}_1d\boldsymbol{r}_1'\\ &\quad\cdot\exp\left\{i\frac{K}{2}[\boldsymbol{r}_1^Tn_1\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_1'^Tn_1\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_1']\right\}\cdot H(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_1')。\end{aligned}\tag{11}$$

其中 $H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1')=\iint\exp\left\{i\frac{K}{2}(\boldsymbol{r}_1,-\boldsymbol{\xi}_1')^T(-2n_1\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{r}_2\right\}d\boldsymbol{r}_2$。作坐标变换 $\boldsymbol{r}_2'=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{r}_2$，$d\boldsymbol{r}_2=|\boldsymbol{B}|d\boldsymbol{r}_2'$

$$H(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_1')=\iint \exp\{iKn_1(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_1')^T\boldsymbol{r}_2'\}\,|\boldsymbol{B}|\,d\boldsymbol{r}_2'=(2\pi)^2K^{-2}n_1^{-2}|\boldsymbol{B}|\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1')$$

代入(11)式，有

$$\iint |E(\boldsymbol{r}_2)|^2 d\boldsymbol{r}_2=|\boldsymbol{A}'|^2K^{-2}n_1^{-2}|\boldsymbol{B}|(2\pi)^2\iint |E_1(\boldsymbol{r}_1)|^2 d\boldsymbol{r}_1$$

由(10)式，有 $|\boldsymbol{A}'|^2\left(\frac{2\pi}{Kn_1}\right)^2|\boldsymbol{B}|=1$，故 $\boldsymbol{A}'=K^1\frac{K}{2\pi}n_1|\boldsymbol{B}|^{-\frac{1}{2}}$。其中 K' 可以是单位模的复数，对比基尔霍夫衍射积分公式，取 $K'=-i$，故一般非对称光学系统的衍射积分公式为

$$E_2(\boldsymbol{r}_2)=-i\frac{K}{2\pi}n_1|\boldsymbol{B}|^{-\frac{1}{2}}\exp(iKL_0)\iint E_1(\boldsymbol{r}_1)\exp(iKL_1)d\boldsymbol{r}_1, \tag{12}$$

其中 L_1 由(5)给出。

三、高斯光束复曲率的变换

对一个非对称波面(像散波面)，不能仅用一个复曲率标量表示，而需引入一个复曲率张量

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix} q_{11}^{-1} & q_{12}^{-1} \\ q_{21}^{-1} & q_{22}^{-1}\end{pmatrix}。 \tag{13}$$

当 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 的非对角元素不存在时，它表示一像散光束，而有交叉项存在时，表示像散波面旋转了一个角度。为书写简单，下面推导 $\boldsymbol{ABCD}$ 定律时设 $n_1=n_2=1$($n_1\neq n_2$ 的结果一样)。基模高斯光束(单位振幅)可表示为

$$E_1(\boldsymbol{r}_1)=\exp\left\{\frac{iK}{2}\boldsymbol{r}_1^TQ_1^{-1}\boldsymbol{r}_1\right\} \tag{14}$$

代入(12)式，

$$E_2(\boldsymbol{r}_2)=-i\frac{K}{2\pi}|\boldsymbol{B}|^{-\frac{1}{2}}\exp(iKL_0)\cdot\iint\exp\left\{\frac{Ki}{2}\boldsymbol{r}_1^T\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{r}_1\right\}\exp(iKL_1)d\boldsymbol{r}_1$$

积分号内的指数部分为

$$\begin{aligned}&\frac{iK}{2}(\boldsymbol{r}_1^T\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{r}_1-2L_1)\\&=\frac{iK}{2}\{|(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_1-(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{r}_2|^2\\&\quad+\boldsymbol{r}_2^T[\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1T}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}]\boldsymbol{r}_2\}\end{aligned} \tag{15}$$

与(14)式对比，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_2^{-1}&=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1T}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\\&=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}-(\boldsymbol{B}^{-1})^T(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{-1}\\&=[\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1^{-1})-\boldsymbol{B}^{-1T}](\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{-1}\\&=(\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1T}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}_1^{-1})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{-1}\\&=(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}_1^{-1})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{-1}\end{aligned} \tag{16}$$

推导(16)式的最后一步用了(7)式 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1T}$。(16)式就是非对称光学系统的张量 $\boldsymbol{ABCD}$ 定律。(15)式中出现矩阵的开方，其含义可以从矩阵相乘的逆运算来理解，虽然运

算比较繁，好在最后公式中只用到其行列式的值。

把(15)式代入 $E(\boldsymbol{r}_2)$，有

$$E_2(\boldsymbol{r}_2)=-i\frac{K}{2\pi}|\boldsymbol{B}|^{-\frac{1}{2}}\exp(iKL_0)\exp\left(\frac{iK}{2}\boldsymbol{r}_2^T\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{r}_2\right)$$
$$\times\iint\exp\left\{\frac{iK}{2}|(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_1-(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{r}_2|^2\right\}d\boldsymbol{r}_1。$$

作坐标变换　　$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_1-(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1'$

则 $E_2(\boldsymbol{r}_2)$ 的积分为

$$E_2(\boldsymbol{r}_2)=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1^{-1}|^{-\frac{1}{2}}\exp(iKL_0)\exp\left(\frac{iK}{2}\boldsymbol{r}_2^T\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{r}_2\right)。\tag{17}$$

(17)式是基模高斯光束通过非对称光学系统的一般变换式。

如前所述，$\det(B)=0$ 时(12)式不能适用，但是(16)、(17)式仍然是有效的。$\det(\boldsymbol{B})=0$ 实际上是表示一种成像关系[3]，一般只在一个方向成像，可以是坐标轴方向，也可以是任意取向。只有当 $\boldsymbol{B}$ 的矩阵元全为零时才成完善像。

张量形式的 ***ABCD*** 定律可以方便地处理非球面系统或斜入射的球面系统对光束的变换问题，特别当 x、y 两个方向不能分开时，(16)式是必须的。当复曲率张量 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 中的虚部不存在时，(16)式表示像散光束的曲率变换关系。下面举球面折射的像散作为例子，说明(16)式的应用。

四、折射球面的像散曲面

以入射角 $\boldsymbol{Q}$ 入射到一折射球面上(半径为 $\boldsymbol{R}$)的变换矩阵为[4]

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\left(\dfrac{n_r^2-\sin^2\boldsymbol{Q}}{n_r\cos\boldsymbol{Q}}\right)^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\dfrac{\cos\boldsymbol{Q}-(n_r^2-\sin^2\boldsymbol{Q})^{\frac{1}{2}}}{\boldsymbol{R}\cos\boldsymbol{Q}(n_r^2-\sin^2\boldsymbol{Q})^{\frac{1}{2}}} & 0\\ 0 & \dfrac{\cos\boldsymbol{Q}-(n_r^2-\sin^2\boldsymbol{Q})^{\frac{1}{2}}}{\boldsymbol{R}n_r}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\dfrac{\cos\boldsymbol{Q}}{(n_r^2-\sin^2\boldsymbol{Q})^{\frac{1}{2}}} & 0\\ 0 & 1/nr\end{pmatrix}。$$

其中 $n_r=n_2/n_1$。在(16)式中令 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}\to0$(物在无穷远)，则

$$\boldsymbol{Q}_2^{-1}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}c_{11}/a_{11} & 0\\ 0 & c_{22}/a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{R_T} & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{R_S}\end{pmatrix}。$$

子午焦面曲率

$$\frac{1}{R_T}=-\frac{n_r}{R}\frac{\cos Q-(n_r^2-\sin^2 Q)^{\frac{1}{2}}}{n_r^2-\sin^2 Q}, \tag{18}$$

弧矢焦面曲率

$$\frac{1}{R_S}=-\frac{\cos Q-(n_r^2-\sin^2 Q)^{\frac{1}{2}}}{Rn_r}, \tag{19}$$

珀兹伐面曲率

$$\frac{1}{R_p}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_T}+\frac{1}{R_S}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\cos Q-(n_r^2-\sin^2 Q)^{\frac{1}{2}}}{n_r R}\cdot\frac{2n_r^2-\sin^2 Q}{n_r^2-\sin^2 Q}。 \tag{20}$$

故单个折射面必定存在像散与场曲，像散面并非球面，当 $Q\rightarrow 0$ 时(正入射)，子午焦面与弧矢焦面趋于同一球面，即高斯焦面。

参 考 文 献

[1] S. A. Collins, Jr; *J. O. S. A.*, 1970, **60**, No. 9 (Sep), 1168.
[2] A. E. Attard; *Appl. Opt.*, 1984, **23**, No. 16 (Aug), 2706.
[3] G. A. Slettemoen; *J. O. S. A.*, 1983, **73**, No. 7 (Jul), 950.
[4] J. Turunen; *Appl. Opt.*, 1986, **25**, No. 17 (Sep), 2908.

ABCD law for nonsymmetric optical systems

LIN QIANG, LU XUANHUI AND WANG SHAOMIN
(*Department of Physics, Hangzhou University*)

(Received 23 June 1987; revised 31 August 1987)

Abstract

Diffraction integral formula for general nonsymmetric optical systems is clearly derived by means of vector analysis. Based on the concept of tonsor complex curvature of radious, the *ABCD* law for nonsymmetric optical systems is presented. Also, an applying example is illustrated.

Key words: diffraction integral; ray tracing; matrix optics; ***ABCD*** **law.**