第8卷 第7期
1987年7月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 8, No. 7
July, 1988

简并参量下转换光场的统计性质

孙 万 钧
(哈尔滨工业大学物理系)

提 要

通过经典泵浦场的简并参量下转换过程的薛定谔方程的解，讨论了简并参量下转换光场的统计性质。
关键词 简并参量下转换；压缩态；光子分布函数。

一、引 言

光学参量过程中，频率为 ω_0 的泵浦光，通过非线性过程，转换成一对光子，其频率关系为 $\omega_0=2\omega$，则为简并参量下转换(Degenrate Parametric Down-Conversion，下称DPDC)。该过程早有研究，预言了压缩态[1,2]及高阶压缩[3]，反聚束效应[1]，实验也观察到DPDC光场的压缩态[4]。

本文首先采用薛定谔表象讨论DPDC，得到了态演化算符，给出了DPDC光场的态矢。不仅证明了DPDC光场的高阶压缩特性，而且给出了光场态的粒子数表象中的表示，光子分布函数，粒子数涨落及二阶相干度。如果初态是真空态，经DPDC演化，虽然它是压缩态，但不具有反聚束效应，光子分布既不是泊松分布也不是亚泊松分布。它表明压缩态与反聚束效应或亚泊松分布并一定同时出现。

二、态的演化算符

我们采用Louisell关于光学参量的理论模型[5]，泵浦场采用经典表示，忽略损耗，系统的哈密顿为($\hbar=1$)

$$\mathscr{H}=\omega a^{+}a-\frac{i}{2}\lambda\left[a^{2}e^{i(2\omega t-\varphi)}-a^{+2}e^{-i(2\omega t-\varphi)}\right], \tag{1}$$

a^{+} 与 a 为光子产生与湮灭算符，且 $[a,\ a^{+}]=1$。$\omega_0=2\omega$ 是泵浦光的模频，ω 为下转换光子频率，φ 为泵浦场的初相位，λ 为实耦合常数。

将(1)式代入薛定谔方程

$$i\,\frac{dU(t,\ t_0)}{dt}=\mathscr{H}U(t,\ t_0), \tag{2}$$

采用文献[6]的方法，可得方程(2)的解为

$$U(t,\ t_0)=\exp\left[-\frac{a^{+2}}{2}e^{-i(2\omega t-\varphi)}\operatorname{th}(\lambda t-\lambda t_0)\right]$$

收稿日期：1987年8月12日；收到修改稿日期：1988年2月8日

$$\times \exp\{[-i\omega(t-t_0)+\ln \operatorname{sech}(\lambda t-\lambda t_0)]a^+a\}$$
$$\times \exp\left[\frac{a^2}{2}e^{i(2\omega t-\varphi)}\operatorname{th}(\lambda t-\lambda t_0)\right]\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}(\lambda t-\lambda t_0), \tag{3}$$

初始条件

$$U(t_0,\ t_0)=1, \tag{4}$$

根据(3)式可证

$$U^+(t,\ t_0)U(t,\ t_0)=1, \tag{5}$$

即 U 为幺正算符。由此可得 DPDC 普遍的态矢为

$$|\psi(t)\rangle=U(t,\ t_0)|\psi(t_0)\rangle。 \tag{6}$$

根据文献[4]的实验工作和文献[7]关于来自量子噪声的光学参量放大的讨论，可以认为系统的初始量子态为真空态$|0\rangle$。由此 DPDC 光场的一个特殊态为

$$|\psi(t)\rangle=U(t,\ 0)|0\rangle=\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}(\lambda t)\exp\left[-\frac{a^{+2}}{2}e^{-i(2\omega t-\varphi)}\operatorname{th}\lambda t\right]|0\rangle, \tag{7}$$

将 $\exp\left[-\frac{a^{+2}}{2}e^{-i(2\omega t-\varphi)}\operatorname{th}\lambda t\right]$ 作级数展开可得态函数为

$$|\psi(t)\rangle=\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}(\lambda t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\operatorname{th}\lambda t)^n e^{-i(2n\omega t-n\varphi)}[(2n)!]^{1/2}}{n!2^n}|2n\rangle, \tag{8}$$

明显看出 DPDC 光场是偶光子数态的叠加，而且包含真空态。

三、光子数分布函数

由(8)式不难得出真空态经 DPDC 演化的光场的光子分布函数

$$P(2n)=|\langle 2n|\psi(t)\rangle|^2=\operatorname{sech}\lambda t\frac{(\operatorname{th}\lambda t)^{2n}(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}, \tag{9}$$

(9)式表明 DPDC 光场是偶光子态分布，奇光子数分布为零，且当 $n=0$ 时，

$$P(0)=\operatorname{sech}\lambda t。 \tag{10}$$

说明真空态以偶光子态特例参入 DPDC 光场，真空态虽然对光强无贡献，但是参与光场的

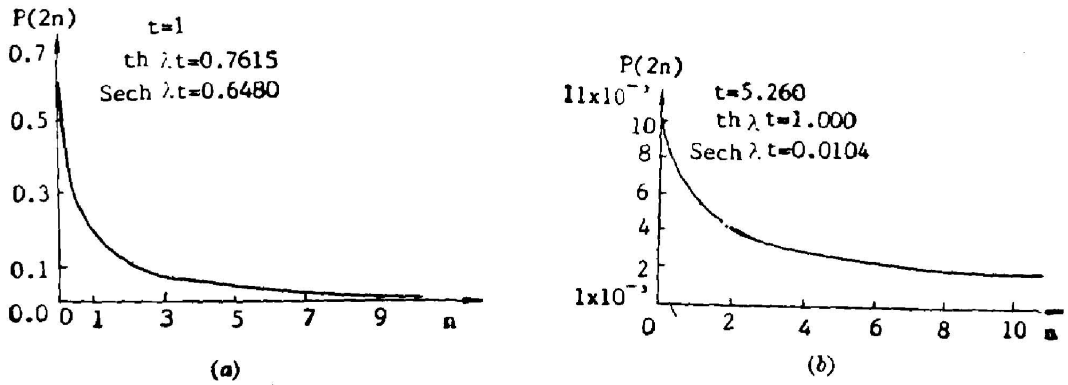

Fig. 1　Photon-number distribution $P(2n)$ for DPDC

(a) at $\lambda t=1$; (b) at $\lambda t=5.260$

涨落，影响光场的统计性质。由(9)式可得递推公式

$$P(2n+2)=\frac{2n+1}{2(n+1)}\,\mathrm{th}^2(\lambda t)P(2n), \tag{11}$$

而且

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(2n)=P(0)+\sum_{n=1}^{\infty}P(2n)=1, \tag{12}$$

由(10)式可知，当 $\lambda t\gg 1$，$P(0)\simeq 0$，显见随作用时间的增长，真空态的比例减小，多光子态比例增加[见图1(a)，(b)]。

四、光子数涨落与二阶相干度

利用如下公式[6,8]

$$ae^{-\nu a^+a}=e^{-\nu a^+a}ae^{-\nu}, \tag{13}$$

$$a^+e^{-\nu a^+a}=e^{-\nu a^+a}a^+e^{\nu}, \tag{14}$$

$$a^{\nu a^{+2}}a=(a-2\nu a^+)e^{\nu a^{+2}}, \tag{15}$$

$$a^+e^{\nu a^2}=e^{\nu a^2}(a^+-2\nu a)。 \tag{16}$$

可得：

$$U^+(t)aU(t)=e^{-i\omega t}(a\,\mathrm{ch}\,\lambda t-a^+e^{i\varphi}\,\mathrm{sh}\,\lambda t), \tag{17}$$

$$U^+(t)a^+U(t)=e^{i\omega t}(a^+\,\mathrm{ch}\,\lambda t-ae^{-i\varphi}\,\mathrm{sh}\,\lambda t)。 \tag{18}$$

再由(7)、(17)、(18)式易得平均光子数与光子数涨落

$$\bar{n}=\langle\psi(t)|a^+a|\psi(t)\rangle=\mathrm{sh}^2\lambda t, \tag{19}$$

$$\langle(\Delta n)^2\rangle=\langle\psi(t)|(a^+a)^2|\psi(t)\rangle-\langle\psi(t)|a^+a|\psi(t)\rangle^2=2\,\mathrm{sh}^2\lambda t\,\mathrm{ch}^2\lambda t>\bar{n}, \tag{20}$$

以及二阶相干度

$$g^{(2)}(0)=2+\mathrm{cth}^2\lambda t>3\quad(t\neq 0)。 \tag{21}$$

由(20)、(21)式结果明显可见，在 DPDC 过程中，由真空态演化的光场任何时刻不具有反聚束效应。与热光场($g^{(2)}(0)=2$)相比有更明显的聚束效应，可称之为超聚束效应。

五、高阶压缩

文献[3]中提出量子化电磁场高阶压缩的概念。由态函数(7)式可证明 DPDC 亦具有高阶压缩的特性。

单模电场算符在薛定谔表象中的表式为[9]

$$E(x)=gae^{ikx}+g^*a^+e^{-ikx}, \tag{22}$$

其中

$$g=i\left(\frac{\omega}{2\varepsilon_0V}\right)^{1/2}\quad(\hbar=1) \tag{23}$$

引入时间慢变正交相位振幅算符

$$E_1(x,t)=gae^{i(kx+\omega t)}+g^*a^+e^{-i(kx+\omega t)}, \tag{24}$$

$$E_2(x,t)=gae^{i\left(kx+\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}+g^*a^+e^{-i\left(kx+\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}。 \tag{25}$$

(22)式可化为

$$E(x)=E_1(x,\ t)\cos\omega t+E_2(x,\ t)\sin\omega t, \tag{26}$$

而且有

$$[E_1,\ E_2]=E_1E_2-E_2E_1=2i|g|^2, \tag{27}$$

则测不准关系为

$$\langle(\varDelta E_1)^2\rangle\langle(\varDelta E_2)^2\rangle\geqslant|g|^4。 \tag{28}$$

如果　$\langle(\varDelta E_1)^N\rangle<(N-1)!!|g|^N$

或者　$\langle(\varDelta E_2)^N\rangle<(N-1)!!|g|^N,$　$(N=\text{偶数})$　(29)

光场即为 N 阶压缩态[3]。当 $N=2$ 时是通常的压缩态[10]。其中 $\varDelta E_i=E_i-\langle E_i\rangle$。

利用(17)、(18)式可得 DPDC 态的 E_1 的 N 阶中心矩为

$$\langle\psi(t)|(\varDelta E_1)^N|\psi(t)\rangle=\langle 0|(Ga+G^*a^+)^N|0\rangle, \tag{30}$$

其中

$$G=ge^{ikx}\operatorname{ch}\lambda t-g^*e^{-i(kx+\varphi)}\operatorname{sh}\lambda t, \tag{31}$$

$$G^*=g^*e^{-ikx}\operatorname{ch}\lambda t-ge^{i(kx+\varphi)}\operatorname{sh}\lambda t。 \tag{32}$$

利用 Compbell-Baker-Hausdorff 等式[3]

$$\langle e^{\varkappa(Ga+G^*a^+)}\rangle=\langle :e^{\varkappa(Ga+G^*a^+)}:\rangle e^{\frac{\varkappa^2|G|^2}{2}}, \tag{33}$$

对(33)式两端做级数展开，对比 $\varkappa$ 的同次幂得

$$\begin{aligned}\langle(Ga+G^*a^+)^N\rangle=&\langle:(Ga+G^*a^+)^N:\rangle\\&+\frac{N(N-1)}{1!}\frac{|G|^2}{2}\langle:(Ga+G^*a^+)^{N-2}:\rangle\\&+\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{2!}\frac{|G|^4}{2^2}\langle:(Ga+G^*a)^{N-4}:\rangle\\&+\cdots+(N-1)!!|G|^N。\end{aligned} \tag{34}$$

将(34)式代入(30)式得

$$\langle\psi(t)|(\varDelta E_1)^N|\psi(t)\rangle=(N-1)!!|G|^N。 \tag{35}$$

由(31)、(32)式得

$$|G|^2=|g|^2[\operatorname{sh}^2\lambda t+\operatorname{ch}^2\lambda t+2\operatorname{sh}\lambda t\operatorname{ch}\lambda t\cos(2kx+\varphi)], \tag{36}$$

取 $2kx+\varphi=\pi$，即有

$$|G|^2=|g|^2(\operatorname{sh}\lambda t-\operatorname{ch}\lambda t)^2=|g|^2e^{2\lambda t}<|g|^2。 \tag{37}$$

由(35)、(37)式可知

$$\langle\psi(t)|(\varDelta E_1)^N|\psi(t)\rangle<(N-1)!!|g|^N, \tag{38}$$

根据(29)式，(38)式表明 DPDC 光场是高阶压缩态。当 $N=2$ 时，由(38)式得

$$\langle\psi(t)|(\varDelta E_1)^2|\psi(t)\rangle<|g|^2 \tag{39}$$

是通常的压缩态。

六、结　　论

真空态经过 DPDC 演化后的光场，是偶光子数态的叠加，光子分布函数既不是泊松分布也不是亚泊松分布，二阶相干度($g^{(2)}(0)>3$)大于混沌光场的二阶相干度($g^{(2)}(0)=2$)，是明显的具有聚束效应的光场，此外 DPDC 光场是高阶压缩光场。

光子反聚束与压缩是光的量子特性的两个侧面，一个是粒子效应，另一个是波的效应。这些特性与光子数或相位的量子涨落低于相干光的涨落有关。虽然光子反聚束和压缩是光的量子特性的两个方面，它们常常在非线性现象中同时出现。然而本文中简并参量下转换光场只有光的压缩而无反聚束或亚泊松统计，这就说明了一般情况下，压缩与反聚束或亚泊松统计没有直接关系。

关于相干态、压缩态为初态经 DPDC 的演化性质将在另文中讨论。

参 考 文 献

[1] D. Stoler: *Phys. Rev. Lett.*, 1974, **33**, No. 23 (Dec), 1397~1400.

[2] G. Milburn and D. F. Walls: *Opt. Commun.*, 1981, **39**, No. 6 (Nov), 401~404.

[3] C. K. Hong and L. Mandel: *Phys. Rev.*, 1985, **32**, No. 2 (Aug), 974~782.

[4] Ling-An Wu *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **57**, No. 20 (Nov), 2520~2524.

[5] W. H. Louisell; «*Radiation and Noise in Quantum Electronics*», (McGraw-Hill, New York, 1964), 274~277.

[6] 范洪义:《光学学报》, 1986, **6**, No. 3 (Mar), 227~232。

[7] B. Schröder; *Opt. and Quant. Elec.*, 1983, **15** No. 1 (Jan), 57~63.

[8] 范洪义、[illegible]图南:《中国科学》(A 辑), 1984, No. 1(Jan), 61~76。

[9] P. L. Knight and L. Allen, «*Concepts of Quantum Optics*», (Pregamon Press, Oxford, 1983), 70~71.

[10] S. Kielich *et al.*; *Optica Acta*; 1985, 32, Nos, 9/10 (Oct), 1023~1037.

Statistical properties of light field at degenerate parametric down-conversion

SUN WANJUN

(*Department of Physics, Harbin Institute of Technology*)

(Received 12 August 1987; revised 8 February 1988)

Abstract

The evolution operator of state for degenerate parametric down-conversion has been obtained. By means of state function we have studied the statistical properties of light field at degenerate parametric down-conversion.

Key words: degenerat parametric down-conversion; squeezed state; photon probability distribution