

# 任意周期性物体的扩展 Lau 效应: 基于部分相干传递函数的分析

吕迺光 叶 飞 彭华实  
(华中工学院光学工程系)

## 提 要

本文基于自由空间的部分相干传递函数对效应提出了新的解释模型,给出了描述 Lau 条纹强度分布的普遍公式,它适用于任意周期性的振幅或位相型物体,对于几种典型周期性物体分析了 Lau 条纹产生的条件及输出强度。给出了不同周期的矩形光栅产生 Lau 效应的实验结果。

关键词: Lau 效应、光栅、部分相干传递函数。

## 一、引 言

对 Lau 效应的分析解释,并探索其可能的应用是近年来很受重视的课题。Lohmann<sup>[1,2]</sup>基于载射理论和光学传递函数,Swandon 和 Leith<sup>[3]</sup>利用双光栅衍射干涉仪模型, Sethuraman<sup>[4]</sup>用 Bloch 函数的光学传递函数,刘立人<sup>[5,6]</sup>用反向脉冲传递法和离轴光学傅里叶变换系统的模型都分别对 Lau 效应作出了解释。Sudol, Thompson<sup>[7]</sup>和 Gori<sup>[8]</sup>也曾分别根据部分相干理论对 Lau 效应进行了解释,给出了 Lau 条纹强度公式。但其结论仅适用于两个完全相同的线光栅所产生的经典 Lau 效应。本文利用自由空间的部分相干传递函数对 Lau 效应给出新的解释模型,导出了描述 Lau 条纹强度分布的普遍公式,它适用于任意周期性的振幅或位相型物体。对矩形光栅、正(余)弦振幅光栅、纯位相周期性物体等几种典型情况,分别讨论了产生 Lau 条纹的条件及其强度分布。并对不同周期的矩形光栅给出了 Lau 效应的实验结果,验证了理论分析。

## 二、基本理论

图1为产生 Lau 效应的实验系统,用扩展光源  $S$  照明物体  $G_1$ , 物体  $G_2$  和  $G_1$  平行,相距  $z_0$ 。在透镜  $L_2$  后焦面上观察条纹图样,非相干平面光源  $S$  通过透镜  $L_1$  成像在物体  $G_1$  上,  $G_1$  后的光场互强度分布为

$$J_1^{(+)}(x_1, y_1; x'_1, y'_1) = J_1^{(-)}(x_1, y_1; x'_1, y'_1) g_1(x_1, y_1) g_1^*(x'_1, y'_1), \quad (1)$$

式中用上标(-)、(+)表示物体透射前、后的互强度函数,  $g_1$  为物体  $G_1$  的复振幅透过率。小角度近似下,忽略倾斜因子的影响,  $G_2$  面上入射互强度分布可以表示为四维卷积积分

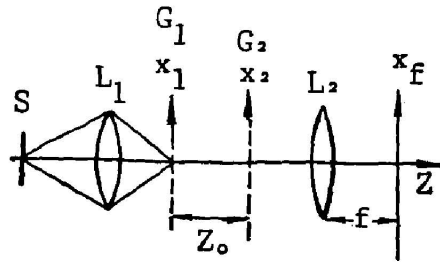


Fig. 1 System for producing the Lau effect

$$\left. \begin{aligned} J_2^{(-)}(x_2, y_2; x_1', y_1') &= \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} J_1^{(+)}(x_1, y_1; x_1', y_1') h(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \\ h(x_2 - x_1, y_2 - y_1) &= \frac{1}{i\lambda r} \exp\left(\frac{i2\pi}{\lambda} r\right), \\ r &= \sqrt{z_0^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中  $h$  是自由空间的传播因子(小角度近似下)。(2)式表明,若把  $J_1^{(+)}$  和  $J_2^{(-)}$  分别当作输入和输出,在自由空间互强度的传播现象可看作空间不变的线性系统。在频率域相应有以下关系

$$\tilde{J}_2^{(-)}(f_x, f_y; f_x', f_y') = \tilde{J}_1^{(+)}(f_x, f_y; f_x', f_y') \mu(f_x, f_y; f_x', f_y'), \quad (3)$$

式中  $\tilde{J}_1^{(+)}$ 、 $\tilde{J}_2^{(-)}$  分别是  $J_1^{(+)}$  和  $J_2^{(-)}$  的四维傅里叶变换,由卷积定理

$$\tilde{J}_1^{(+)}(f_x, f_y; f_x', f_y') = \tilde{J}_1^{(-)}(f_x, f_y; f_x', f_y') \otimes G_1(f_x, f_y) G_1^*(-f_x', -f_y'), \quad (4)$$

式中  $G_1$  是  $g_1$  的二维傅里叶变换式。(3)式中  $\mu$  为自由空间传播的部分相干传递函数

$$\begin{aligned} \mu(f_x, f_y; f_x', f_y') &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y) h^*(x', y') \exp[-i2\pi(f_x x + f_y y + f_x' x' + f_y' y')] dx dy dx' dy' \\ &= H(f_x, f_y) H^*(-f_x', -f_y'), \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $H$  是  $h$  的二维傅里叶变换,它可以表示为<sup>[9]</sup>

$$H(f_x, f_y) = \exp[i2\pi/\lambda z_0 \sqrt{1 - (\bar{\lambda} f_x)^2 - (\bar{\lambda} f_y)^2}],$$

于是

$$\begin{aligned} \mu(f_x, f_y; f_x', f_y') &= \exp[i2\pi/\lambda z_0 \sqrt{1 - (\bar{\lambda} f_x)^2 - (\bar{\lambda} f_y)^2}] \\ &\times \exp[-i2\pi/\lambda z_0 \sqrt{1 - (\bar{\lambda} f_x')^2 - (\bar{\lambda} f_y')^2}], \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $\bar{\lambda}$  表示平均波长,把互强度分布表示为不同空间频率的四维谐波分量的叠加,每个谐波分量从  $G_1$  平面传播到  $G_2$  平面时,受到频率响应  $\mu$  的调制。传播现象相当于一个四维线性滤波器。但当  $f_x^2 + f_y^2 > (1/\bar{\lambda}^2)$  或  $f_x'^2 + f_y'^2 > (1/\bar{\lambda}^2)$  时,相应谱分量不能透过系统,在非涅耳区内,对(6)式近似有

$$\mu(f_x, f_y; f_x', f_y') = \exp\{-i\pi\bar{\lambda}z_0[(f_x^2 - f_x'^2) + (f_y^2 - f_y'^2)]\}, \quad (7)$$

物体  $G_2$  透射互强度的空间频谱为

$$\tilde{J}_2^{(+)}(f_x, f_y; f_x', f_y') = \tilde{J}_2^{(-)}(f_x, f_y; f_x', f_y') \otimes G_2(f_x, f_y) G_2^*(-f_x', -f_y'). \quad (8)$$

透镜  $L_2$  后焦面上光强为  $J_2^{(+)}$  的傅里叶变换,因此,

$$I(x_f, y_f) = \tilde{J}_2^{(+)}\left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f}; -\frac{x_f}{\lambda f}, -\frac{y_f}{\lambda f}\right). \quad (9)$$

### 三、任意周期性物体的扩展 Lau 效应

假定入射到物体  $G_1$  上的场是完全非相干的\*, 则有

$$J_1^{(-)}(x_1, x_1') = I_0 \delta(x_1 - x_1'), \quad (10)$$

式中  $I_0$  为正常数, 表示入射到  $G_1$  上的照明光强,  $J_1^{(-)}$  的二维傅里叶变换为

$$\tilde{J}_1^{(-)}(f_x, f_x') = I_0 \delta(f_x + f_x'). \quad (11)$$

若  $G_1$  和  $G_2$  是两个一维周期性物体, 透过率分别为  $g_1(x_1)$ 、 $g_2(x_2)$ , 周期为  $T_1$  和  $T_2$ , 则有

$$\left. \begin{aligned} g_1(x_1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{T_1} x_1\right), \\ C_n &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} g_1(x_1) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T_1} x_1\right) dx_1, \\ g_2(x_2) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{T_2} x_2\right), \\ a_n &= \frac{1}{T_2} \int_{-T_2/2}^{T_2/2} g_2(x_2) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T_2} x_2\right) dx_2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由(3)、(4)、(7)式得到

$$\tilde{J}_2^{(-)}(f_x, f_x') = I_0 \sum_n \sum_m C_n C_m^* \delta\left(f_x + f_x' + \frac{m}{T_1} - \frac{n}{T_1}\right) \exp\left[-i\pi \bar{\lambda} z_0 (f_x^2 - f_x'^2)\right]. \quad (13)$$

将(13)式代入(8)式和(9)式, 经化简得到后焦面上强度分布

$$I(x_f) = I_0 \sum_n \left\{ B_1(n) B_2(n) \exp\left[i\pi \bar{\lambda} z_0 \left(\frac{n}{T_2}\right)^2\right] \exp\left[-i2\pi \frac{n}{(fT_2/z_0)} x_f\right] \right\}, \quad (14)$$

$$B_1(n) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1) g_1^*(x_1) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T_2} x_1\right) dx_1, \quad (15)$$

$$B_2(n) = \int_{-T_2/2}^{T_2/2} g_2[x_2 + \bar{\lambda} z_0 n / T_2] g_2^*(x_2) \exp\left(i2\pi \frac{n}{T_2} x_2\right) dx_2. \quad (16)$$

一般情况下, (14)式是一个以  $(fT_2/z_0)$  为周期的函数的傅里叶级数展开式, 表明强度分布呈周期性变化。系数  $B_1(n)$  是第一个周期性物体强度透过率的傅里叶变换在  $f_x = (n/T_2)$  处的离散谱。 $B_2(n)$  则是第二个周期性物体平移  $(\bar{\lambda} z_0 n / T_2)$  后的复振幅透过率与原透过率共轭的乘积的函数的傅里叶系数。当位移  $(\bar{\lambda} z_0 n / T_2)$  恰是  $T_2$  整数倍时,  $B_2(n)$  就是物体  $G_2$  强度透过率函数的傅里叶系数。在  $I(x_f)$  展开式中, 可把  $B_1(n) B_2(n) \exp[i\pi \bar{\lambda} z_0 (n/T_2)^2]$  看作傅里叶系数。由(15)式分析可知, 当  $(T_1/T_2) = (\alpha_1/\beta_1)$ , ( $\alpha_1, \beta_1$  为任意互质的正整数), 有

$$B_1(n) = \begin{cases} K \delta(0), & n=0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (17)$$

式中  $K$  为常数。因此,  $(T_1/T_2) = (\alpha_1/\beta_1)$  是输出平面上产生条纹的必要条件, 不满足此条件时, 输出强度为均匀分布。

\* 为简单起见, 只作一维分析。

#### 四、几种典型的周期性物体的讨论

(14)式的结论适用于任意周期性的振幅和位相物体。输出强度分布的具体形式完全由傅里叶系数所确定。由(15)、(16)式不难看出,它决定于两个物体的结构及其距离 $z_0$ 。现在来讨论几种典型的周期性物体的情况

##### 1. 矩形光栅

若物体分别是缝宽为 $h_1, h_2$ , 周期为 $T_1, T_2$  [ $(T_1/T_2) = (\alpha_1/\beta_1)$ ]的两个矩形振幅光栅, 其复振幅透过率分别为

$$\left. \begin{aligned} g_1(x_1) &= \sum_m \text{rect}\left(\frac{x_1 - mT_1}{h_1}\right), \\ g_2(x_2) &= \sum_m \text{rect}\left(\frac{x_2 - mT_2}{h_2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

由(15)、(16)式得到

$$B_1(n) = \begin{cases} h_1 \sin \alpha \left(\frac{h_1 n}{T_1}\right) \delta(0), & n = r\beta_1 \\ 0, & n \neq r\beta_1 \end{cases} \quad (19)$$

$$B_2(n) = \begin{cases} \frac{h_2}{T_2} \sin \alpha \left(\frac{h_2}{T_2} n\right), & n = r\beta \\ 0, & n \neq r\beta_2 \end{cases} \quad (20)$$

式中 $r$ 为整数。显然 $n$ 取值须同时是 $\beta_1, \beta_2$ 的整数倍,  $B_1(n)$ 与 $B_2(n)$ 乘积才可能取非零值。令 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 最小公倍数为 $M$ ,  $n$ 则可用 $nM$ 代替。又令 $M = r'\beta_2$  ( $r'$ 为正整数), 在上述条件下,  $\exp[i\pi\bar{\lambda}z_0(n/T_2)^2]$ 只可能取+1或-1两个值, 于是, 略去常系数后输出强度为

$$I(x_f) = \begin{cases} \sum_n \sin \alpha \left(\frac{h_1 n M}{T_1}\right) \sin \alpha \left(\frac{h_2 n M}{T_2}\right) \exp\left[-i \frac{2\pi n x_f}{(fT_2/Mz_0)}\right], & (\alpha_2, r', M \text{ 为偶数}) \\ \sum_n (-1)^n \sin \alpha \left(\frac{h_1 n M}{T_1}\right) \sin \alpha \left(\frac{h_2 n M}{T_2}\right) \exp\left[-i \frac{2\pi n x_f}{(fT_2/Mz_0)}\right], & (\alpha_2, r', M \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (21a)$$

$$(21b)$$

(21b)式的光强分布事实上可由式(21a)的光强分布图样平移 $(T'/2) = (fT_2/2Mz_0)$ 得到, (21a)式可以简单表示为

$$I(x_f) = \sum_n \text{rect}\left(\frac{x_f - mT'}{h_1 f/z_0}\right) \otimes \sum_m \text{rect}\left(\frac{x_f - mT'}{h_2 f/z_0}\right). \quad (22)$$

由此可知,  $I(x_f)$ 是周期 $T' = (fT_2/Mz_0)$ , 亮纹宽度 $w = [(h_1 f/z_0) + (h_2 f/z_0)]$ 的三角波或梯形波分布, 如图2所示, 注意条纹对比并不因光栅周期不同就明显下降。它仅仅取决于 $(h_1 + h_2)$ 与 $(T_2/M)$ 相比较的情况。当 $(h_1 + h_2) \leq (T_2/M)$ 时, 条纹具有高对比。由(19)式和(20)式还可看出, 光栅缝宽 $h_1, h_2$ 不可取 $(T_1/\beta_1)$ 或 $(T_2/\beta_2)$ 的整数倍, 否则 $B_1(n)$ 或 $B_2(n)$ 只有 $n=0$ 时存在非零值, 后焦面上没有条纹。

通常所说的Lau效应是指两个光栅完全相同, 即 $h_1 = h_2 = h$ ,  $T_1 = T_2 = T$ 的特殊情况。相应取 $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ 。当 $z_0 = (\alpha_2/\beta_2)(T^2/\bar{\lambda})$ 时, 输出强度分布为

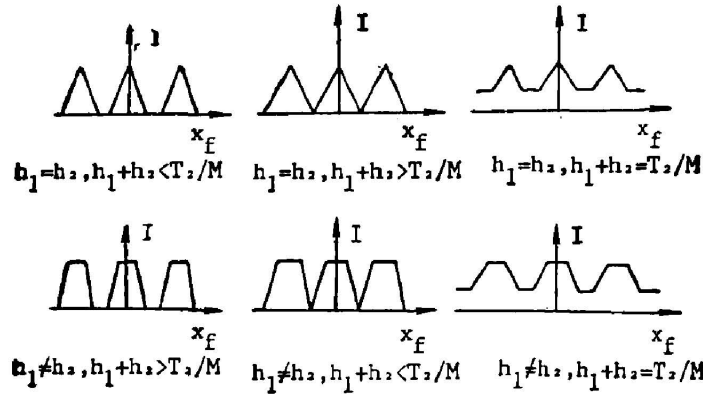


Fig. 2 Intensity distribution in the fringe pattern produced by two line-gratings

$$I(x_f) = \sum_m \text{rect}\left(\frac{x_f - mT'}{hf/z_0}\right) \otimes \sum_n \text{rect}\left(\frac{x_f - mT'}{hf/z_0}\right), \quad (23)$$

$I(x_f)$  是周期  $T' = (fT/\beta z_0)$ , 亮纹宽度  $w = (2hf/z_0)$  的三角波或梯形波分布。周期随着两个光栅的间距  $z_0$  变化, 采用白光扩展光源时, 可能观察到彩色条纹。

## 2. 正(余)弦振幅光栅

考虑  $G_2$  是正弦振幅光栅,  $g_2(x_2) = \{[1 + \sin(2\pi x_2/T_2)]/2\}$ , 由于  $B_2(n)$  是函数  $g_2[x_2 - (\bar{\lambda} z_0 n/T_2)]g_2^*(x_2)$  的傅里叶系数, 显然,  $B_2(n)$  仅在  $n=0, \pm 1, \pm 2$  处取值。令

$$B'_2(n) = B_2(n) \exp[i\pi \bar{\lambda} z_0 (n/T_2)^2]. \quad (24)$$

由(16)式计算出

$$B'_2(n) = \begin{cases} \frac{3}{8}, & n=0 \\ \frac{1}{4} i \cos\left(\frac{\pi \bar{\lambda} z_0}{T_2^2}\right), & n=1 \\ -\frac{1}{4} i \cos\left(\frac{\pi \bar{\lambda} z_0}{T_2^2}\right), & n=-1 \\ -\frac{1}{16}, & n=\pm 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (25)$$

若  $G_1$  是周期性振幅物体,  $g_1(x_1)$  为偶函数,  $B_1(n)$  也为实值偶函数。当  $z_0 = [r + (1/2)] \times (T_2^2/\bar{\lambda})$  ( $r$  为正整数) 时, 则(18)式变为

$$\left. \begin{aligned} I(x_f) &= B_1(0) B'_2(0) + 2B_1(2) B'_2(2) \cos(4\pi z_0 x_f / f T_2), \\ T' &= \frac{f T_2}{2z_0} = \frac{\bar{\lambda} f}{(2r+1) T_2}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式中已略去常系数,  $I(x_f)$  输出为周期  $T'$  的余弦强度分布。如果  $G_1$  也是余弦振幅光栅, 例如,  $g_1(x_1) = \{[1 + \cos[2\pi x_1/T_1]]/2\}$ 。由(15)式得到

$$\begin{aligned} B_1(n) &= \frac{3}{8} \delta\left(\frac{n}{T_2}\right) + \frac{1}{4} \left[ \delta\left(\frac{n}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) + \delta\left(\frac{n}{T_2} + \frac{1}{T_1}\right) \right] \\ &+ \frac{1}{16} \left[ \delta\left(\frac{n}{T_2} - \frac{2}{T_1}\right) + \delta\left(\frac{n}{T_2} + \frac{2}{T_1}\right) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

在不同条件下, 输出归一化强度分布可表示为当  $T_1 = T_2$  时,

$$I(x_f) = \frac{9}{64} + \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\pi \bar{\lambda} z_0}{T_2^2}\right) \sin\left(\frac{2\pi z_0}{f T_2} x_f\right) - \frac{1}{128} \cos\left(\frac{4\pi z_0}{f T_2} x_f\right); \quad (28)$$

当  $T_1 = T_2$ ,  $z_0 = [r + (1/2)](T_2^2/\bar{\lambda})$  时,

$$I(x_f) = \frac{9}{64} - \frac{1}{128} \cos\left(\frac{4\pi z_0}{f T_2} x_f\right); \quad (29)$$

当  $T_1 = (T_2/2)$  时,

$$I(x_f) = \frac{9}{64} - \frac{1}{32} \cos\left(\frac{4\pi z_0}{f T_2} x_f\right), \quad (30)$$

当  $T_1 = 2T_2$ ,  $z_0 \neq [r + (1/2)](T_2^2/\bar{\lambda})$  时,

$$I(x_f) = \frac{9}{64} + \frac{1}{32} \cos\left(\frac{\pi \bar{\lambda} z_0}{T_2^2}\right) \sin\left(\frac{2\pi z_0}{f T_2} x_f\right). \quad (31)$$

在其它情况下, 输出强度均匀, 无条纹产生。

### 3. 周期性位相物体

讨论周期性纯位相物体的情况。若  $G_1$  透过率为  $g_1(x_1) = \exp[i\varphi(x_1)]$ , 其中  $\varphi(x_1)$  是以  $T_1$  为周期的周期函数, 由(15)式可知

$$B_1(n) = \delta(n/T_2) = \begin{cases} \delta(0), & n=0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (32)$$

这时不论  $G_2$  为何种类型周期性物体, 输出平面均无条纹产生。

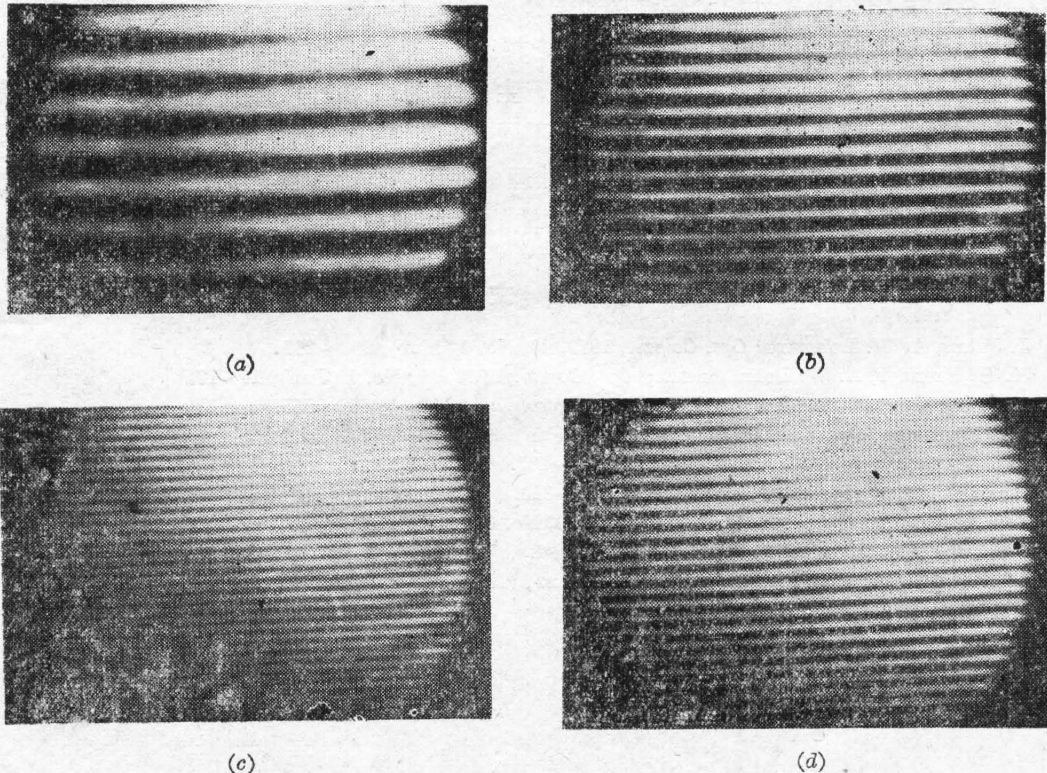


Fig.3 The Lau fringe pattern produced by two line-gratings with different periods

(a)  $z_0 = 50$  mm; (b)  $z_0 = 100$  mm; (c)  $z_0 = 150$  mm; (d)  $z_0 = 200$  mm

如果仅仅  $G_2$  是周期性纯位相物体, 通常可以产生条纹。但在满足 Talbot 自成像条件  $z_0 = (rT_2^2/\lambda)$  ( $r$  为正整数) 处, 由(16)式计算

$$B_2(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (33)$$

这时无论  $G_1$  选择何种类型周期性物体, 输出平面都不产生条纹。

## 五、实验结果

为了验证理论分析, 选用不同周期的光栅进行 Lau 效应实验。采用白光扩展光源, 通过滤色片 ( $\bar{\lambda} = 546.1 \text{ nm}$ ) 照明,  $G_1$  是缝宽  $h_1$  为  $0.25 \text{ mm}$ , 周期  $T_1$  为  $0.5 \text{ mm}$  的矩形光栅。 $G_2$  是缝宽  $h_2$  为  $0.5 \text{ mm}$ , 周期  $T_2$  为  $1 \text{ mm}$  的矩形光栅。图 3 中给出 Lau 条纹实验结果。相应光栅间距分别为  $50 \text{ mm}$ ,  $100 \text{ mm}$ ,  $150 \text{ mm}$ ,  $200 \text{ mm}$ 。四种情况下都得到对比很好的 Lau 条纹, 与理论分析相一致。它表明采用不同周期的光栅, 仍然可以产生高对比的 Lau 条纹, 而影响对比度的因素不仅仅是物体的周期, 还包括两物体结构形式及其距离, 必须综合考虑。

## 六、结 论

本文基于自由空间部分相干传递函数对效应给出新的解释模型。对于 Lau 条纹强度分布的数学描述与 Sudol, Thompson 的结论相符。不同点在于其普遍性, 它适于任意周期性振幅或位相物体, 对几种典型周期性物体产生 Lau 条纹的条件及输出强度的分析, 有利于我们在应用 Lau 效应时, 选择不同周期、不同类型的周期性物体配对使用。这对于 Lau 效应干涉仪及 Lau 效应在全息和光学信息处理中的应用均有重要意义, 另外, 本文采用的基本理论显然也可以用于讨论二维周期性物体的 Lau 效应。

## 参 考 文 献

- [1] J. Jahns, A. W. Lohmann; *Opt. Comm.*, 1979, **28**, No. 3 (Mar), 263~267.
- [2] K. H. Brenner, A. W. Lohmann et al.; *Opt. Comm.*, 1983, **48**, No. 1 (Jun), 14~17.
- [3] G. J. Swanson, E. N. Leith; *J. O. S. A.*, 1982, **72**, No. 5 (May), 552~555.
- [4] J. Sethuraman; *Opt. Comm.*, 1985, **52**, No. 6 (Jan), 377~379.
- [5] 刘立人; 《光学学报》, 1985, **5**, No. 6 (Jun), 481~487.
- [6] 刘立人; 《光学学报》, 1986, **6**, No. 9 (Sep), 807~813.
- [7] S. Sudol, B. J. Thompson; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, No. 6 (Mar), 1107~1116.
- [8] F. Gori; *Opt. Comm.*, 1979, **31**, No. 1 (Oct), 4~8.
- [9] J. W. Goodman; *Introduction to Fourier Optics*, (Mc Graw-Hill, New York, 1968), **54**.

## Generalized Lau effect of arbitrary periodical objects: The analysis based on partial coherent transfer function

LÜ NAIGUANG, YE FEI AND PENG HUASHI

*(Department of Optical Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)*

(Received 19 March 1987; revised 11 August 1987)

### Abstract

In this paper we present a new model for interpreting Lau effect on the basis of partial coherent transfer function in free-space propagation. The generalized formula for description of intensity distribution of Lau fringe is deduced. It is suitable for arbitrary periodical amplitude or phase objects. The condition of producing Lau fringe and output intensity for some typical periodical objects is analysed. The experimental results of Lau fringe produced by line gratings with different periods are given.

**Key words:** Lau effect; grating; partial coherent transfer function.