第8卷 第7期
1988年7月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 8, No. 7
July, 1988

同步泵浦锁模染料激光器的理论

鲍晓毅 吴存恺
(中国科学院安徽光学精密机械研究所激光光谱实验室)

提 要

本文对过去的同步泵浦锁模理论进行了扩展,并获得了精确解,即超模解,给出了超模解的物理意义,并给出了在最低阶超模情况下的脉冲宽度,光强及峰值位置的解析表达式。此外,文中还研究了噪声对同步泵浦锁模染料激光器的超模解的影响,给出了该系统的噪声谱的表达式,估算噪声源的方法和系统的信噪比。

一、引 言

由于同步泵浦锁模染料激光器能够产生具有高功率转换效率的微微秒以致亚微微秒的稳态脉冲,这种激光器越来越引起人们的重视。本文将在同步泵浦锁模理论的自再现模型[1]的框架上,对同步泵浦锁模染料激光器系统进行详细的分析,研究它的运转过程,得到该系统的精确解为一组超模解;讨论了在最低阶超模情况下,激光系统的输出特性;接着,研究了在超模工作情况下,噪声对超模工作特性的影响,给出了噪声谱的计算方法及解析式。由于上述精确解的获得,使我们可以在更普遍的意义下,讨论同步泵浦锁模染料激光器的输出特性,此外,上述工作还为设计和运转激光器提供了有力的依据和指导原则。

二、厄米-高斯方程及其解

在自再现模型中,染料激光脉冲的特性由下面的耦合方程来确定[2,3],对于染料脉冲包络$V(t)$,其稳态方程往返增益$G(t)$的速率方程分别为

$$\left[G(t)-L+\delta T\frac{d}{dt}+\frac{1}{\omega_c^2}\frac{d^2}{dt^2}\right]V(t)=0, \tag{1}$$

$$\frac{dG(t)}{dt}=\frac{dG_p(t)}{dt}-I(t)G(t), \tag{2}$$

式中L与常数的腔损耗有关,ω_c与内腔带宽有关,δT为泵浦脉冲周期T_p与激光脉冲的往返通过时间T_r之差($\delta T=T_p-T_r$),$G_p(t)$为由泵浦脉冲确定的小信号增益,$I(t)$是染料脉冲的光强,它正比于染料激光脉冲包络的平方。取泵浦脉冲为高斯型,于是,(2)式中的$[dG_p(t)/dt]$可写成

$$\frac{dG_p(t)}{dt}=\frac{G_{max}}{\sqrt{\pi}\,t_p}\exp\left(-\frac{t^2}{t_p^2}\right), \tag{3}$$

收稿日期:1987年1月24日;收到修改稿日期:1987年8月31日

式中 G_{max} 为最大可获得的增益，t_p 为泵浦脉冲宽度。令

$$V(t)=U(t)\exp\left(-\frac{\omega_c^2\delta T}{2}t\right), \tag{4}$$

则(1)式变成

$$\frac{1}{\omega_c^2}\frac{d^2U}{dt^2}=\left\{\frac{\omega_c^2\delta T}{4}-[G(t)-L]\right\}U(t)。 \tag{5}$$

设 t_0 时刻脉冲达到最大峰值，在脉冲峰值处的倒空速率为 t_s(也称饱和时间)，则在 t_0 附近对 $G(t)$ 进行泰勒展开到二阶得

$$G(t)=G_0+G_1(t-t_0)+\frac{1}{2}G_2(t-t_0)^2。 \tag{6}$$

当 $t=t_0$ 时，$G(t_0)=G_0=L$(这是一个与实际情况相符的合理近似)，将(6)和(3)式代入到(2)式中有

$$G_1=-\frac{L}{t_s}+\frac{LG_{max}}{\sqrt{\pi}\,t_p}, \tag{7}$$

$$-G_2=\frac{LG_{max}}{\sqrt{\pi}\,t_p}\left(\frac{2t_0}{t_p^2}+\frac{1}{t_s}\right)-\frac{L}{t_s^2}, \tag{8}$$

$$\therefore\quad G(t)=\frac{1}{2}G_2\left[\left(t-t_0+\frac{G_1}{G_2}\right)^2\right]+L-\frac{G_1^2}{2G_2}。 \tag{9}$$

将(9)式代入到(5)式并令 $-G_2=G_2'$ 得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dt'^2}=\omega_c^2\left[\frac{\omega_c^2\delta T^2}{4}+\frac{1}{2}G_2't'^2-\frac{G_1^2}{2G_2'}\right]u(t),\\&t'=t-t_0+\frac{G_1}{G_2}=t-t_0-\frac{G_1}{G_2'}。\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

很显然(10)式就是著名的厄米-高斯(Hermite-Gaussians)方程，它的解为

$$\left.\begin{aligned}&u_n=\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t'}{t_a}\right)^2H_n\left(\frac{t'}{t_a}\right)\right],\\&t_a=\sqrt[4]{\frac{2}{G_2'}}(\omega_0)^{-\frac{1}{2}}。\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

方程(11)定义了锁模激光器的"超模"或者说是"锁模模式"。相应于上面的超模的能量本征值为

$$E_n=(2n+1)\left(\frac{G_1^2}{2G_2'}-\frac{\omega_c^2\delta T^2}{4}\right)\frac{\omega_0\sqrt{2}}{\sqrt{G_2'}}, \tag{12}$$

(12)式决定着锁模腔中的功率。

三、超 模 解

当我们把(11)式的超模解代入到(14)式中后，就得到了染料激光脉冲的包络

$$V(t)=\exp\left[-\frac{1}{2}\omega_c^2\delta Tt-\frac{1}{2}\left(\frac{t'}{t_a}\right)^2\right]H_n\left(\frac{t'}{t_a}\right)。 \tag{13}$$

显然，染料脉冲的包络是非对称的。同时，根据厄米函数的奇偶性而知，只有当 n 为偶数的超模才有可能成为对称的(15)式中的指数部分可以变型为

$$\left.\begin{aligned}V(t)&=\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t+t''}{t_a}\right)^2\right]\\&\quad\times\exp\left[-\frac{1}{4}\,\omega_c^2\delta T\left(2t_0+2\,\frac{G_1}{G_2'}-\frac{1}{2}\,\omega_c^2\delta Tt_a^2\right)\right]H_n\left(\frac{t'}{t_a}\right),\\t''&=\frac{\omega_c^2\delta Tt_a^2-t_0-(G_1/G_2')}{2}。\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

第一部分指数是以中心为 t'' 而变化的高斯包络，该变化的幅度可以由第二部分指数给出；而厄米函数是以 t' 为中心变化的包络。t' 与 t'' 是不重合的，由于两个包络的峰值点不重合，所以叠加起来，就不能形成一个稳态脉冲。仅在 $n=0$ 时才是一个峰值，$n>0$ 的所有超模均有多个尖峰，从这个意义上说，只有 $n=0$ 的情况下，才会有稳态的脉冲输出。

现在，讨论一下超模的物理意义。由于锁模基本上是能量在激光腔中的一种重新分布方式。所以，一套超模的存在表明，这种重新分配的方式是以几种不同的形式进行的。但是，这并不意味着所有的超模解在实际的物理过程中都是存在的，这一点正象前面的分析中所指出的。Haus[4]曾指出：在一定的合理近似下，除最低阶超模外的所有超模对于小的扰动都是不稳定的。这一理论隐含着这样的事实，即通常超模形成一套完整的非简并的模式，而稳态解恰是能量的最可几率分布。因此，如果超模变成简并的，则激光器的运转将变得无法预料和确定。

为了简单起见，本文仅讨论最低阶起模情况。当 $n=0$ 时，$H_0(x)=1$，(14)式简化成为

$$V(t)=\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t+t''}{t_a}\right)^2\right]\exp\left[-\frac{1}{4}\,\omega_c^2\delta T\left(2t_0+\frac{2G_1}{G_2'}-\frac{1}{2}\,\omega_c^2\delta Tt_a\right)\right]。\tag{15}$$

只要其它参数固定，该脉冲是一个以为中心的高斯脉冲包络。它的脉冲宽度 τ_d 和振幅包络 $v(t)$ 分别为

$$\tau_d=2\sqrt{\ln 2}\;t_a=2\sqrt{\ln 2}\sqrt[4]{\frac{2}{G_2'}}\,\frac{1}{\omega_c},\tag{16}$$

$$v(t)=\exp\left[-\frac{1}{4}\,\omega_c^2\delta T\left(2t_0+\frac{2G_1}{G_2'}-\frac{1}{2}\,\omega_c^2\delta Tt_a^2\right)。\right.\tag{17}$$

由(17)和(16)式确定了最低阶超模的脉冲宽度和振幅变化情况。同时，由(12)式，还可以知道该最低阶超模的能量本征值(即此时的腔内功率)为

$$E_0=\left(\frac{G_1^2}{2G_2'}-\frac{\omega_c^2\delta T^2}{4}\right)\frac{\omega_c\sqrt{2}}{\sqrt{G_2'}}。\tag{18}$$

一组典型的同步泵浦锁模染料激光器参数为：在最低阶超模情况下，激光器系统输出的脉冲宽度 τ_d 为 8.8 ps，此时输出的高斯脉冲包络的峰值位于 $t'=12$ ps 处。

四、噪声对系统输出特性的影响

已有很多有关激光器噪声方面的讨论；但是，还很少有人讨论同步泵浦锁模染料激光器的噪声。目前见到的只有文献[5, 6]，但它对噪声的讨论仅限于对随机项 S 取一个固定数值进行计算，且没有给出解析式。本文给出了解析式，因此能对各种变化的条件进行讨论。

如果考虑噪声的影响，那么在(1)式中可唯象地引入噪声源项 $S_n(t)$，此时方程(1)变成：

$$[G(t)-L]V_n'+\delta T\frac{dV_n'}{dt}-\delta TS_n(t)+\frac{1}{\omega_c^2}\frac{d^2V_n}{dt^2}=0, \tag{19}$$

于是,(19)式的解在形式上可以写成为

$$V_n'=V_n(t)+b_n(t), \tag{20}$$

式中 $b_n(t)$是自发辐射噪声引起的扰动项。得(20)式代入到(19)式中并代入 $G(t)$表达式后得到

$$\frac{1}{\delta T\omega_c^2}\frac{d^2b_n(t)}{dt^2}+\frac{db_n(0)}{dt}+\frac{b_n}{\delta T}\left[G_1(t-t_0)+\frac{1}{2}G_2(t-t_0)^2\right]=S_n(t)。 \tag{21}$$

将(21)式进行傅里叶变换,并注意到:自发辐射噪声存在于兆赫兹频率范围内[7],该频率对应的时间变化量为 10^{-6} sec 量级,而对于同步泵浦锁模染料激光器,其激光增益的恢复时间为 10^{-9} sec 量级。因此,在傅里叶积分时,可以把增益的含时间变化项当作一个 δ 函数来处理。可得(21)式的左边最后一项的傅里叶变换为

$$\int\left[\frac{G_2}{2}\left(t-t_0+\frac{G_1}{G_2}\right)^2\delta(t)-\frac{G_1^2}{2G_2}\right]\frac{b_n(t)}{\delta T}\exp(i\omega t)dt$$
$$=\frac{G_2}{2\delta T}b_n(0)\left(\frac{G_1}{G_2}-t_0\right)^2-\frac{G_1^2}{2G_2\delta T}b_n(\omega)。 \tag{22}$$

因此,对(21)式进行傅里叶变换,并求解得 $b_n(\omega)$和噪声项的谱 $|b_n(\omega)|^2$ 分别为

$$\left.\begin{aligned} b_n(\omega)&=\frac{S_n(\omega)-\frac{G_2}{2\delta T}b_n(0)\left(\frac{G_1}{G_2}-t_0\right)^2}{i\omega-\frac{1}{\delta T}\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}+\frac{G_1^2}{2G_2}\right)},\\ |b_n(\omega)|^2&=\frac{\left|S_n(\omega)-\frac{G_2}{2\delta T}b_n(0)\left(\frac{G_1}{G_2}-t_0\right)^2\right|^2}{\omega^2+\frac{1}{\delta T^2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}+\frac{G_1^2}{2G_2}\right)}。\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

由于我们这里考虑的频率都是指光谱范围,对于自发辐射噪声,它主要存在于兆赫兹频率区,因此,可以不考虑噪声中的直流分量 $b(0)$,故在(23)式中,可略去含有 $b(0)$ 的项,则化简成为

$$|b_n(\omega)|^2=\frac{|S_n(\omega)|^2}{\omega^2+\frac{1}{\delta T^2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}+\frac{G_1^2}{G_2}\right)^2}。 \tag{24}$$

五、对噪声影响的分析和讨论

通过上节对含噪声项的方程在频率域内求解,得到了噪声谱的解析式,这样,我们就可以得到有噪声存在时,腔内的平均功率第 n 个超模的平均能量可表示为

$$W_n=\int\overline{|b_n(\omega)|^2}d\omega=\int\frac{\overline{|S_n(\omega)|^2}d\omega}{\omega^2+\frac{1}{\delta T^2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}+\frac{G_1^2}{G_2}\right)^2}。 \tag{25}$$

按文献[8]的处理方法,$\overline{|S_n(\omega)|^2}$ 在频域内为 $\{|\delta T^{-1}|[(\omega_l^2/\omega_c^2)+(G_1^2/G_2)]\}$(其中 ω_l 为自发辐射噪声谱的中心频率)的范围内,可以看作与 ω 无关,则对(25)式积分可得解析结果。在这个积分中,我们使用如下近似:即在数学处理中,为简便起见我们略去分母中含 ω^2

的项，而仅考虑分母中含 $\{(\delta T)^{-2}[(\omega^2/\omega_c^2]+(G_1^2/G_2)]^2\}$ 项对频率的积分。这样处理是合理的，因为我们在前面讲过，自发辐射噪声的频率是 10^6 Hz，而 δT 的量级为 10^{-13} sec，故 $(\delta T)^{-2}$ 的量级为 $10^{26}\mathrm{sec}^{-2}$，所以把各数值代入后得到的量级差在 10^{10} 左右，故可以把 n 项作为小量不计。于是，我们得到在第 n 个超模中的能量为

$$W_n=\frac{\pi G_2'}{2G_1}\frac{\overline{|S_n(\omega_l)|^2}\delta T^2}{\sqrt{G_1^2/(\omega_c^2G_2')}}。\tag{26}$$

在 $\overline{|S_n(\omega)|^2}$ 不能当作常数来处理的情况下，(26)式可给出能量的估算，根据(26)式我们还可以给出总的噪声能量

$$W=\sum_n W_n=\sum_n\frac{\pi G_2'}{2G_1^2}\frac{\overline{|S_n(\omega_l)|^2}\delta T^2}{\sqrt{G_1^2/(G_2'\omega_c^2)}}。\tag{27}$$

下面我们来求 $|V_n(\omega)|^2$ 的平均，其几率分布取经典谐振子的振幅几率分布[9]

$$P(\xi)d\xi\propto\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-\xi_0^2}},\tag{28}$$

式中 ξ_0 是归一化的经典振幅 $\xi_0^2=n$，于是 $\overline{|S_n(\omega)|^2}$ 可以近似地取作

$$\left.\begin{aligned}&\overline{|S_n(\omega)|^2}=\overline{|S_0(\omega)|^2}\frac{\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}(\xi^2-n)^{-\frac{1}{2}}(1+\alpha^2\xi^2)^{-1}d\xi}{\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}(\xi^2-n)^{-\frac{1}{2}}d\xi},\\&\frac{1}{\alpha^2}=\omega_c^2t_0^2=\sqrt{\frac{2}{G_2'}}\,\omega_{c_0}\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

只要满足

$$\sqrt{n}<\alpha^{-1}=\sqrt[4]{\frac{2}{G_2'}}\sqrt{\omega_c}\tag{30}$$

条件，则 $\overline{|S_n(\omega)|^2}$ 以 n 为变量的函数可以近似为一个常数。随 n 值的增大，$\overline{|S_n(\omega)|^2}$ 的值减小。

对噪声能量(27)式作进一步估算。

设 $n<\alpha^{-1}$ 时，$\overline{|S_n(\omega)|^2}$ 与 n 无关，而当 $n>\alpha^{-1}$ 时为 0*，则有

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{1/\alpha}W_n}{W_0}=\frac{\text{噪声}}{\text{信号}}=\frac{\pi}{\alpha}\frac{\overline{|S_n(\omega)|^2}G_2'\delta T}{2G_1^2\sqrt{G_1^2/(\omega_c^2G_2')}\,W_0}=\frac{\pi G_2'\delta T\sqrt[4]{2/G_2'}\sqrt{\omega_c}}{2G_1^2W_0\sqrt{G_1^2/(\omega_c^2G_2')}}\overline{|S_n(\omega)|^2}。\tag{31}$$

为了从数值上给出信噪比的估算，取一般常用的同步泵浦锁模染料激光器参数：

$$t_0=1.2t_p=120\,\mathrm{ps},\ t_p=100\,\mathrm{ps},\ L=0.45,\ t_s=25\,\mathrm{ps},\ G_m=6,$$

将信号功率取为 8 mW，$\overline{|S_0(\omega_l)|^2}$ 取为 8×10^{-8} W，代入(31)式可得信噪比为(噪声)/(信号)=0.396≈0.40。由此，得到了考虑噪声起伏的情况下，同步泵浦锁模染料激光器系统的噪声与信号之比。

六、对噪声源的估算

由(27)式所决定的腔能量，在热平衡条件下等于它的热激发能量(此时的热平衡温度

* 这一假设是合理的，因从前面的讨论中可以看出，高阶超模是不稳定的。

为 T)[10]

$$W=\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT)-1}。\tag{32}$$

令(32)式与(27)式相等，就可得到相应的噪声源功率 $\overline{|S_n(\omega)|^2}$，采用前述近似条件，即当 $n<\alpha^{-1}$ 时，$\overline{|S_n(\omega_l)|^2}$ 与 n 无关，而当 $n>\alpha^{-1}$ 时，该功率谱为 0，则存在下式

$$\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT)-1}=\frac{\pi G_2'\omega_c\overline{|S_n(\omega_l)|^2}}{2G_1^2\sqrt{G_1^2/G_2'}}\sqrt[4]{\frac{2}{G_2'}}\sqrt{\omega_c}\delta T^2,\tag{33}$$

$$\overline{|S_n(\omega_l)|^2}=\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT)-1}\frac{2G_1^2\sqrt{2G_1^2/G_2'}}{\pi G_2'\omega_c\sqrt{\omega_c}\delta T^2\sqrt[4]{2/G_2'}}。\tag{34}$$

(34)式表明：在 ω_l 处的噪声功率谱与系统的腔长失谐因子，振荡频率，调谐元件的带宽及其增益系数有关。一旦这些参数的数值给定，我们就可以通过(34)式，计算出噪声源的大小。同时，上式还表示了热能对于随机驱动力的频谱密度函数所产生的影响。

对于一般常用的同步泵浦锁模染料激光器系统，我们选取如下的一组参数 $t_0=120\,\mathrm{ps}$，$t_p=100\,\mathrm{ps}$ $t_l=25\,\mathrm{ps}$，$G_m=6$，$L=0.45$，$\omega_c=5\times10^{13}\,\mathrm{Hz}$，代入(33)式，可求得此时的噪声功率为 $\overline{|S_n(\omega_l)|^2}=7.8\times10^{-8}\,\mathrm{W}$。

因此，通过热平衡状态下所得到的平均能量与同步泵浦锁模染料激光器系统的锁模方程求解得到的超模能量等同，就得到了此时的噪声功率。

参 考 文 献

[1] J. P. Heritage, P. K. Jain; *Appl. Phys. Lett.*, 1978, **32**, No. 1 (Jan), 101~103.
[2] C. P. Ausschnitt, P. K. Jain *et al.*; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1979, **QE-15**, No. 9 (Sep), 912~918.
[3] H. A. Haus; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1975, **QE-11**, No. 9 (Sep), 736~746.
[4] H. A. Haus; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1975, **QE-11**, No. 7 (Jul), 323~330.
[5] K. Smith, J. M. Catherall *et al.*; *Opt. Commun.*, 1986, **58**, No. 2 (May), 118~123.
[6] J. M. Catherall, G. H. C. New; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1986, QE-**22**, No. 9 (Sep), 1593~1599.
[7] 私人通讯。
[8] H. A. Haus, P. -T. HO; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1979, **QE-13**, No. 11 (Nov), 1258~1265.
[9] L. I. Schiff; «*Quantum Mechanics* (*3rd*)», (McGrawhill, New York, 1968).
[10] A. Yariv; «*Quantum Electronics* (*2nd*)», (John Wiley & Sons Inc., New York, 1975)

Theory of synchronously pumped mode-locking dye lasers

BAO XIAOYI AND WU CUNKAI
(Laboratory of Laser Spectroscopy, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 24 January 1987; revised 31 August 1987)

Abstract

In this paper we extend the theory of synchronously pumped mode-locking and obtain the precise solution, i.e. supermodes solution. The physical meaning of the supermodes solution is given. Under the condition of the lowest supermodes, the analytic expressions for pulsewidth, intensity and peak position are deduced. The effect of noise on supermodes solution of the synchronously pumped mode-locking dye laser is studied. The expressions for the spectrum of noise, the method of evaluating the noise source and the ratio of noise to signal are also obtained.