

# 变波长逆 WKB 方法确定单模渐变 平面光波导的折射率轮廓\*

浦远 赖祖猷 盛素琴

(上海交通大学应用物理系)

## 提 要

将渐变波导模式方程 (WKB 积分方程) 化为分段积分, 以波导某一模式在不同波长下的转折点为分段点, 当波长相差很小时, 相应的转折点相差也很小, 可在各个分段积分中作折线近似, 从而从理论上推出确定波导轮廓数据的递推式。以所得轮廓必须满足光滑条件为判据, 最后定出波导的轮廓。该方法尤其适用于单模渐变波导, 而且无需事先假设待定轮廓的函数形式。

本文对双曲正弦和抛物线轮廓的理想波导进行了计算机模拟, 结果证明该方法的精度达到 $10^{-3}$ 甚至于更高。而且理论上具有分割愈密, 精度愈高的优点。

关键词: 逆 WKB 法, 折射率轮廓, 波导。

## 一、引 言

在众多确定渐变光波导折射率轮廓的方法中<sup>[1]</sup>, 由于实验上的方便和对样品的无破坏性, 逆 WKB 方法应用得最为广泛<sup>[2]</sup>。这种方法的理论依据为求解近似模式方程:

$$2k_0 \int_0^{z_m} [n_2^2(z) - N_m^2]^{1/2} dz + 2\phi_{21} + 2\phi_{23} = 2\pi m, \quad (1)$$

有两类具体处理方法。一是先假定样品折射率轮廓的函数形式, 通过测量样品在若干个不同条件下的有效折射率  $N_m$ , 代入(1)式, 列出若干个方程, 理论上便能解出所假定的轮廓函数中的待定函数<sup>[3~4]</sup>。这在数字计算上比较繁琐, 另一类是将(1)式中的积分区域  $0 \sim z_m$  化为多个小区域, 各个分段积分中的被积函数作直线近似, 然后递推出各个转折点, 从而得出待求的轮廓曲线<sup>[5]</sup>。这种方法只能运用于多模波导。但是, 至今尚缺乏可靠而简单的确定单模渐变波导折射率轮廓的方法。

本文将文献[5]的分段积分处理方法与文献[3]变波长思想联合起来, 以同一模式在不同波长下的转折点为分段点, 并对波导色散作一假设, 在理论上得出递推式, 从而提出一种确定渐变波导折射率轮廓的新方法, 其特点是可以运用于单模波导中而且无需事先假设样品轮廓的函数形式。

## 二、理 论

在波导材料色散的远离反常色散区, 假定渐变波导的折射率轮廓为

收稿日期: 1987年6月5日; 收到修改稿日期: 1987年7月28日

\* 本文为上海交通大学科技发展基金资助项目。

$$n_2(z, \lambda) = n_3(\lambda) + \Delta n g(\lambda) f(z), \quad (0 \leq z < \infty) \quad (2)$$

这个假设的物理意义是, 在远离材料的反常色散区, 在掺杂浓度较低的情况下作为线性近似, 波导层材料的色散规律与其在波导层中的位置无关, 而其幅度与  $\Delta n f(z)$  成正比。这个假设在银离子交换玻璃波导中已得到实验验证<sup>[6]</sup>。对于波长为  $\lambda_k$ ,  $m=0$  的 TE 模, 模式方程为<sup>[5]</sup>

$$\int_0^{z_t(\lambda_k)} [n^2(z, \lambda_k) - N^2(\lambda_k)]^{1/2} dz = \frac{3}{8} \lambda_k, \quad (3)$$

式中  $z_t(\lambda_k)$  是波长为  $\lambda_k$  的导模的转折点。将积分区域  $0 \sim z_t(\lambda_k)$  分成  $k$  个小段, 为了以后计算机模拟的方便, 令每个积分小段的上下限等于导模在波长为  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, k-1$ ) 时的转折点  $z_t(\lambda_i)$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \int_{z_t(\lambda_i)}^{z_t(\lambda_{i+1})} [n^2(z, \lambda_k) - N^2(\lambda_k)]^{1/2} dz = 3\lambda_k/8. \quad (4)$$

当  $\lambda_i$  间隔足够小,  $k$  足够大时, 即分段足够密时, 便可在各个分段区域内对被积函数作线性近似, 使之成为可积分的函数。例如在第  $i$  个区域  $z_t(\lambda_i) - z_t(\lambda_{i+1})$  小段内线近似

$$n(z, \lambda_k) - N(\lambda_k) \cong n[z_t(\lambda_{i+1}), \lambda_k] + \frac{n[z_t(\lambda_i), \lambda_k] - n[z_t(\lambda_{i+1}), \lambda_k]}{z_t(\lambda_{i+1}) - z_t(\lambda_i)} [z_t(\lambda_{i+1}) - z] - N(\lambda_k), \quad (5)$$

$$n(z, \lambda_k) + N(\lambda_k) \cong \frac{n[z_t(\lambda_i), \lambda_k] + n[z_t(\lambda_{i+1}), \lambda_k]}{2} + N(\lambda_k), \quad (6)$$

式中  $n[z_t(\lambda_i), \lambda_k]$  指在波长为  $\lambda_k$  时波导强度  $z = z_t(\lambda_i)$  处的折射率, 而此深度为导模在波长为  $\lambda_i$  时的转折点。考虑到

$$n[z_t(\lambda_i), \lambda_k] = n_3(\lambda_i) + \Delta n g(\lambda_i) f[z_t(\lambda_i)] = N(\lambda_i), \quad (7)$$

$$n[z_t(\lambda_i), \lambda'_i] = n_3(\lambda'_i) + \Delta n g(\lambda'_i) f[z_t(\lambda_i)]. \quad (8)$$

由(7)、(8)式消去  $f[z_t(\lambda'_i)]$

$$n[z_t(\lambda'_i), \lambda_i] = n_3(\lambda_i) + \frac{g(\lambda_i)}{g(\lambda'_i)} [N(\lambda'_i) - n_3(\lambda_i)], \quad (9)$$

$g(\lambda)$  可由实验得出<sup>[6]</sup>, 为说明简单起见, 不妨设  $g(\lambda) = 1$ 。将(5)、(6)、(9)式代入(4)式, 得到递推出式

$$z_t(\lambda_i) = z_t(\lambda_{i-1}) + \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{2} (F_{i-1} + 3N_i) \right]^{-\frac{1}{2}} (F_{i-1} - N_{i-1})^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{3}{8} \lambda_i - \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{i-2} S_{i,i} \right), \quad (i=2, 3, \dots, k) \quad (10)$$

$$F_{i,i-1} = n_3(\lambda_{i-1}) + N(\lambda_i) - n(\lambda_i), \quad (11)$$

$$S_{i,i} = \left[ \frac{1}{2} (F_{i,i} + F_{i+1,i}) + N_i \right]^{\frac{1}{2}} \frac{z_t(\lambda_{i+1}) - z_t(\lambda_i)}{F_{i,i} - F_{i+1,i}} \times [(F_{i,i} - N_i)^{3/2} - (F_{i+1,i} - N_i)^{3/2}], \quad (12)$$

$$z_t(\lambda_1) = \frac{9\lambda_1}{16} \left[ \frac{n_3(\lambda_1) + 3N(\lambda_1)}{2} \right]^{-\frac{1}{2}} [n_3(\lambda_1) + C_0 - N(\lambda_1)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

其中  $C_0 = N(\lambda_0) - n_3(\lambda_0) = \Delta n$  是尝试值。

由此可见, 从实验中得出不同波长  $\lambda_i$  下的有效折射率  $N(\lambda_i)$ , 并假定  $C_0$ , 便可由(13)和(9)式得出一组  $z_t(\lambda_i)$ , 由(8)、(9)式可知, 相应于该点的轮廓函数为

$$\Delta n f [z_i(\lambda_i) = \frac{N(\lambda_i) - n_3(\lambda_i)}{g(\lambda_i)} = N(\lambda_i) - n_3(\lambda_i) \quad (14)$$

每个  $C_0$  值对应一条轮廓曲线, 而所寻找的那条曲线必须使下式达到最小<sup>[5]</sup>

$$G = \sum_{i=0}^{k-2} \left\{ \frac{\frac{n[z_i(\lambda_{i+2}), \lambda_k] - n[z_i(\lambda_{i+1}), \lambda_k]}{z_i(\lambda_{i+2}) - z_i(\lambda_{i+1})} - \frac{n[z_i(\lambda_{i+1}), \lambda_k] - n[z_i(\lambda_i), \lambda_k]}{z_i(\lambda_{i+1}) - z_i(\lambda_i)}}{\frac{z_i(\lambda_{i+2}) + z_i(\lambda_{i+1})}{2}} - \frac{\frac{n[z_i(\lambda_{i+1}), \lambda_k] - n[z_i(\lambda_i), \lambda_k]}{z_i(\lambda_{i+1}) - z_i(\lambda_i)}}{\frac{z_i(\lambda_{i+1}) + z_i(\lambda_i)}{2}} \right\} \quad (15)$$

### 三、模拟计算及结果

假设有两块以  $\text{LiNbO}_3$  为衬底, 折射率轮廓分别为双曲正割和抛物线的理想渐变波导, 其相应的参数及有效折射率为

#### 1. 双曲正割

$$n_{\text{eff}}(z, \lambda) = n_3(\lambda) + \Delta n \operatorname{sech}^2\left(\frac{\alpha z}{d}\right), \quad 0 \leq z \leq \infty \quad (16)$$

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \left\{ n_3^2(\lambda) + \left(\frac{\alpha}{kd}\right) [2 H(\lambda) - 1] \right\}^{1/2}, \\ H(\lambda) &= \left\{ \left[ 8k^2 n_3(\lambda) \Delta n \frac{d^2}{\alpha^2} + 1 \right]^{1/2} - 1 \right\} / 4, \end{aligned} \quad (17)$$

$\Delta n = 0.0770$ ,  $d = 0.4750 \mu\text{m}^{[4]}$ ,  $\alpha = 1.04$ .

#### 2. 抛物线

$$n_{\text{eff}}(z, \lambda) = \begin{cases} n_3(\lambda) + \Delta n [1 - (z^2/d^2)], & (0 \leq z < d) \\ n_3(\lambda), & (z > d) \end{cases} \quad (18)$$

$$N(\lambda) = \{ (n_3(\lambda) + \Delta n)^2 - 3\lambda [(n_3(\lambda) + \Delta n)^2 - n_3(\lambda)]^{1/2} / 2\pi d \}^{1/2}, \quad (19)$$

$\Delta n f(Z)$

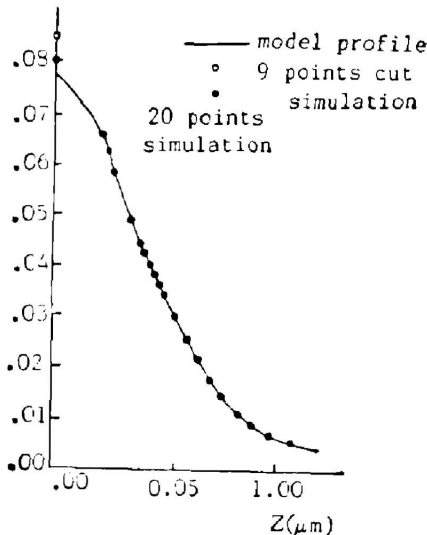


Fig. 1 Computer simulation for the model profile in hyperbolic secant type

$\Delta n f(Z)$

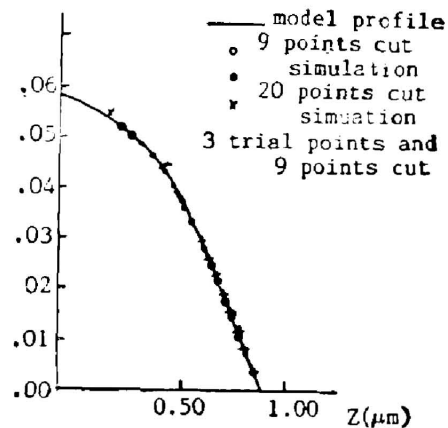


Fig. 2 Computer simulation for the model profile in parabolic type

$\Delta n = 0.0576$ ,  $d = 0.8150 \mu\text{m}^{[4]}$ 。式中, 衬底折射率  $n_3(\lambda)$  由文献[7]查出。将以上的有效折射率视为实验中得到的值, 代入(10)~(13)式进行模拟计算, 再将由此得到的轮廓曲线与理想曲线(16)、(18)式比较, 从而验证变波长逆 WKB 方法精确度。

图(1)、(2)是对这两种波导分别作 9 点分割和 20 点分割, 所计算得到的结果及其与理想曲线的比较。每个分割点是相差  $0.0500 \mu\text{m}$  波长下的转折点。9 点分割的第一点  $\lambda_1 = 0.4500 \mu\text{m}$ , 20 点分割  $\lambda_1 = 0.1000 \mu\text{m}$ 。

## 四、讨 论

(1) 以上假设  $g(\lambda) = 1$  是为了避免递推式(10)~(13)和模拟计算复杂化, 并不影响方法和模拟计算的实质, 实际上  $g(\lambda)$  可由实验得出<sup>[10]</sup>。在运用中将其代入即可。

(2) 用激光器测量波导对于多个不同波长的有效折射率比较复杂, 实验上可以采用导波光谱学方法<sup>[5]</sup>。考虑到一般光路系统对紫外光有吸收, 本文在 9 点分割中将波长限制在可见及红外范围, 从  $\lambda_1 = 0.4500 \mu\text{m}$  开始取点。为了弥补由于紫外吸收造成的轮廓近表面部分的精度, 在该区域增加两个尝试点:  $c_1 = n_2(0.2, \lambda_1)$ ,  $c_2 = n_2(0.4, \lambda_0)$ , 图 2 中“+”表示对理想抛物线轮廓用了尝试点作 9 点分割模拟计算的结果。三个尝试点位置分别在  $z_0 = 0 \mu\text{m}$ ,  $z_1 = 0.2 \mu\text{m}$ ,  $z_2 = 0.4 \mu\text{m}$ 。计算时只需对(10)~(12)式作一修改:  $z_i(\lambda_1) = 0.2 \mu\text{m}$ ,  $z_i(\lambda_2) = 0.4 \mu\text{m}$ ,  $C_1 = N(\lambda_1) - n_3(\lambda_1)$ ,  $C_2 = N(\lambda_2) - n_3(\lambda_2)$ ,  $i = 4, 5, \dots, k$  与单尝试点 9 点分割模拟计算结果相比, 这种方法的结果更精确。

理论上讲, 分割愈密(包括尝试点), 精度愈高。作 20 点分割或采用三尝试点计算时, 波导表面的折射率精度达  $10^{-3}$ , 轮廓的后半段精度达到  $10^{-4}$ 。采用导波光谱学方法, 分割点数不受限制, 所以从理论上讲, 精度还可能提高。而采用文献[5]的方法, 对 10 模波导, 波导表面折射率精度仅为  $10^{-2}$ 。

## 参 考 文 献

- [1] G. Stewart; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1979, 13, No. 2 (Feb), 192~196.
- [2] G. Benjamin Hocker, W. K. Burns; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1975, 11, No. 6 (Jun), 270~278.
- [3] A. N. Kaul, K. Thyagarajan; *Opt. Commun.*, 1984, 48, No. 5 (Jun), 313~316.
- [4] 林盛强等; 《中国激光》, 1983, 9, No. 6 (Jun), 391~393.
- [5] J.M. White, P. F. Heidrich; *Appl. Opt.*, 1976, 15, No. 1 (Jan), 151~155.
- [6] 私人通讯。
- [7] W. G. Driscoll, W. Vaughan; 《*Handbook of Optics*》(McGraw-Hill Book Company, New York, 1978), 7~95.
- [8] M. Oliver; *Proc. NATO ASI, Cages*, 1983, 639.

**Wave-scanning inverse WKB method for the refractive index profile determination of monomode planar optical waveguide with graded index refraction**

PU YUAN, LAI ZHUYOU AND SHENG YUQIN

*(Department of Applied Physics, Shanghai Jiao Tong University)*

(Received 5 June 1987; revised 28 July 1987)

**Abstract**

The mode equation of graded waveguide (WKB integral equation) was divided into many segmental integrals and their terminal values points were set at the turning points of the same mode at different wavelengths. When the differences of the wavelengthe were small enough, the deviations for the corresponding turning points are also small enough, the broken lines approximations could be made in these segmental integrals. Then, we theoretically obtained a recurrence formula for calculating the refractive index profile. The profile can be finally determined by picking up the smoothest one. This method is especially applicable for monomode waveguide and it is unnecessary to presuppose the function type of the profile.

Computer simulations are made for model waveguides with the profiles of hyperbolic secant and parabolic types in this paper and the calculation had proved that the new method is with the precision of  $10^{-3}$  or even higher. The more segments were divided, the higher precision could be reached.

**Key words:** inverse WKB method, refractive index profile, waveguide.