

小于 Airy 斑的小孔衍射研究

王桂英

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

根据傅里叶光学传输表达式,利用数值计算方法,首次给出了小于衍射极限的小孔处于夫朗和菲区时,理想光束和像差光束经过它之后的波面相位变化。

关键词: 相位差,波像差。

一、引 言

最早演示光波相干性的实验是杨氏干涉实验。这是最早的小孔干涉仪。经过一个世纪之后的今天,小孔干涉仪重返舞台,并发展为多种形式^[1,2]。但是,小于衍射极限的小孔对于波面相位及光强的影响还没有人给出确切的数据。

E. Wolf 等人曾经研究过小孔衍射的克希霍夫标量衍射理论^[3],以及利用相干矩阵表示的矢量衍射理论^[4,5,6]。并且给出了两种数值计算结果。一种是利用克希霍夫积分,另一种是利用 Rayleigh-Sommerfeld 积分,笔者认为后者计算精度高于前者。进而对后者做菲涅耳近似,可得到描述菲涅耳衍射的傅里叶变换式。再做夫琅和斐近似之后,可得到描述夫琅和斐衍射的傅里叶变换式^[7]。在夫琅和斐区,傅里叶变换式的计算精度很高。随着菲涅耳数的加大,计算精度越来越差^[8]。

目前发展起来的小孔干涉仪,倾向于在夫琅和斐区放置小孔。把通过小孔的光作为参考光。在计算这种系统的光传输时,利用傅里叶变换式给出了可信赖的精度。但是小孔的尺度必须大于波长,而且镶嵌小孔的屏对光是完全吸收的,或者对入射的线偏振光该屏可改变其偏振态^[9],致使小孔内外的透过光不再相干。

二、计算模型与表达式

图 1 示出了所需计算的光学系统, S 表示单色点光源, EX 表示扩束望远镜,这是为了得

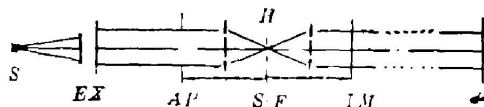


Fig. 1 The optical path of the system simulated by computer

S —a point source; EX —an extend light beam device; AP —a circular hard aperture;
 IM —image plane of the aperture S . F —the spatial filter; P —a plane at far field

到准平面波而加的。 S, F 表示空间滤波器。小孔置于输入透镜的焦平面上。 P 为处于无穷远处的观察屏。 AP 为限瞳光阑。 IM 为 AP 的共轭像平面。

设 z 轴为该光学系统的主轴。其原点位于空间滤波器的焦面上。标出的空间直角坐标皆对光束输入口径之半径归一化:

$$x = \frac{X}{a}; \quad y = \frac{Y}{a}; \quad z = \frac{Z}{a}.$$

则投影在输入透镜上的光场分布为:

$$U_1(x, y, z) = A_1 \exp[-\rho(x^2 + y^2)] \exp[i(\varphi + \varphi_0)]. \quad (1)$$

此处略去了光场随时间的变化,或设对时间取了平均值。 ρ 为填充因子,它表示光束被系统的有效光阑对其强度截尾的情况。其中 φ 表示由光束的波像差引起的波面相位差。 φ_0 为常数。 $\varphi(x, y) = K \cdot W(x, y)$ 。对于初级像差的分类表达式为^[3]:

$$W(x, y) = A(x^2 + y^2)^2 + By(x^2 + y^2) + C(x^2 + 3y^2) + D(x^2 + y^2) + Ey + Fx. \quad (2)$$

其中 A 为球差系数, B 为彗差系数, C 为像散系数, D 为离焦像差系数, E 为绕 x 轴倾斜, F 为绕 y 轴倾斜像差系数。

空间滤波器中傅氏焦面上的光场分布:

$$U_2(f_x, f_y, 0) = \exp[if\lambda\pi(f_x^2 + f_y^2)] F[U_1(x, y, z)], \quad (3)$$

在式中弃去了常数相位延迟因子。 λ 为波长, F 表示正的 Fourier 变换, f 为滤波器输入透镜之焦距, 并设输入和输出透镜焦距相等。设小孔透过率为:

$$T(f_x, f_y, 0) = \begin{cases} 1 & f_x, f_y, 0 < \Sigma \\ 0 & f_x, f_y, 0 > \Sigma \end{cases} \quad (4)$$

Σ 表示小孔的尺度范围。此处假定小孔比波长大了很多倍, 因此忽略了小孔边界对光场的作用。式中 $f_x = \frac{x}{\lambda f}$; $f_y = \frac{y}{\lambda f}$ 为空间频率。

在无穷远处 P 屏上的光场分布为:

$$U_3(x, y, z) = F^{-1}[T(f_x, f_y, 0) \cdot U_2(f_x, f_y, 0)], \quad (5)$$

其中 F^{-1} 表示逆的 Fourier 变换。

若小孔离焦放置, 仍然处于物理焦深区, 设其离焦距离为 d 。则在 P 屏上的光场分布:

$$U'_3(x, y, z) = F^{-1} \left\{ T(f_x, f_y, d) \right. \\ \left. \times \exp\left[i\pi\lambda f \left(1 - \frac{d}{f} \right) (f_x^2 + f_y^2) \right] \cdot F[U_1(x, y, z)] \right\}. \quad (6)$$

若小孔离焦的距离大大超出物理焦深区, 则在 P 屏处的光场分布为:

$$U''_3(x, y, z) = F^{-1} \left\{ \exp\left[i\lambda\pi f \cdot \frac{f}{d} (f_x^2 + f_y^2) \right] \cdot F[T(x, y, d) \cdot U_1(x, y, d)] \right\}, \quad (7)$$

其中

$$U'_1(x, y, z) = \exp\left[-i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right] \cdot U_1(x, y, z). \quad (8)$$

(7) 式所描述的有关 d 距离的传输, 其计算精度是很差的。而且随着 d 距离的减小误差加大。这是由于该表达式是从几何光学推算出来的, 不能精确地描述光的衍射传输现象。

三、计算程序的考核

文献[8]中曾详细地说明了计算方孔滤波的情况。在周期 $T=10a$ (a 为通光孔径之半径) 取样点 $N=1024$ 时, 利用快速傅里叶变换计算的结果与利用变步长积分算法计算的结果, 在精度取 10^{-4} 时完全一致。在计算速度上约快 100 倍。本文利用 FFT 算法计算正逆 Fourier 变换, 来模拟老孔的空间滤波器共轭物像的转换问题, 得到了 10^{-5} 以上的高精度。

J. Hayes 等人曾利用外差干涉法测量了小于衍射极限的小孔的滤波问题^[10]。他们给出了具有 1λ 的像散光束, 通过不同大小的小孔后, 波面相位的变化。他们测得在小孔孔径为 0.5 倍的 Airy 斑时, 该像差光束的波面相位变化为 0.1λ 左右。本文的计算结果, 对截尾于 0.5 倍主强度的光束, 其相位变化为 0.11λ ; 对截尾于 0.001 强度的光束为 0.14λ 。由于实验者忽略了光束的截尾情况, 因此在文献[10]中没有此数据。但尽管如此, 本文的计算与文献[10]的实测数据, 在光场的中心部分是完全相符的。由于截尾强度不同的影响, 仅在边缘有些误差。

四、计算结果与分析

在对计算程序严格考核的基础上, 计算了小孔置于焦面上时, 理想光束与像差光束的传输情况。最后讨论了小孔离焦放置时, 对于光束的影响。

1. 焦面上的小孔对理想光束的影响

令射向限瞳光阑的光束为理想的单色平面波。利用(5)式可以给出 P 屏处的场分布。倘若取消(3)式中与透镜焦距有关的表示波面弯曲的相乘因子, 则可表示限瞳光阑在经过滤波器成像之后, 在像面上的光场分布。为方便起见, 对于不同小孔给光束带来的影响, 仅以比较像面上的变化来说明。

图 2 示出了三种不同截尾强度的光束在不同的滤波小孔的情况下的相位变化。当限瞳光阑对光束的截尾强度为主峰强度的 0.001, 且滤波小孔的口径为 1 倍的衍射极限时, 得到了最好的滤波效果。这是因为光束的截尾强度小, 光场的 Fresnel 衍射起伏小, 经过较大的小孔即可得到近似入射波面的相位。在采用比其小的小孔滤波时, 光场的相位变化反而大了起来。这是由于滤波小孔在 Fraunhofer 区对光波的影响大于限瞳光阑在 Fresnel 区的影响所致。在滤波小孔小于 0.5 倍衍射极限时, 波面位相的变化只变小了。这说明随着滤波小孔口的减小, 逐渐消除了在 Fresnel 区限瞳光阑的影响, 只有卡在 Fourier 零级谱上的小孔在起作用。如图 2(a) 所示。随着限瞳光阑对光束截尾强度的增加, 在焦面上的零级谱逐渐地减小。致使大的滤波小孔已经抵消不了限瞳光阑的影响, 图 2(b) 和 (c) 示出了截尾强度分别为 0.25 和 0.5 的情况。

图 3 示出了光束截尾强度为 0.001 时, 在限瞳光阑像面上的光强空间分布。由图可知, 随着滤波小孔尺度的减小, 光场的中心强度减弱, 边缘强度相应的增加。

由次上计算结果表明, 通过光阑和滤波器系统的光束, 受到了限孔光阑和滤波小孔的共同影响。在滤波小孔小到一定程度时, 滤波小孔将起主要的作用。至于小到何等程度, 这要

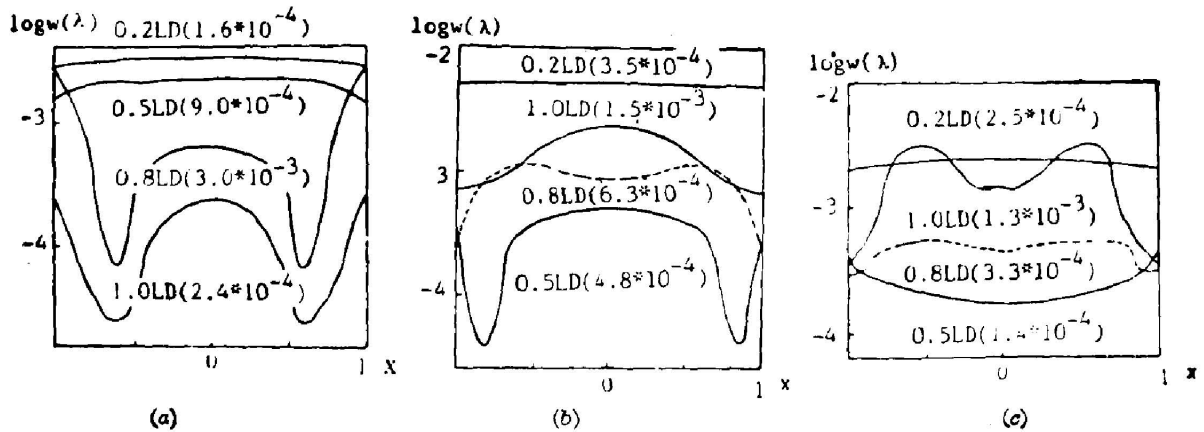


Fig. 2 Phase distribution of the light beam with different truncation after passing through different pinhole at the image plane

- (a) Truncation intensity of 0.001
 (b) Truncation intensity of 0.25
 (c) Truncation intensity of 0.5.
 L. D. represent limited diffraction

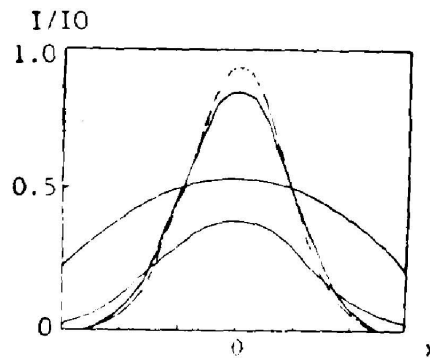


Fig. 3 Intensity distribution of the light beam with truncation intensity of 0.001 after passing through different pinhole at image plane

由限瞳光阑对光束的截尾强度来确定。

2. 焦面上的小孔对象差光束的影响

选择截尾强度为 0.001 和 0.5 的光束为例, 计算球差、彗差、像散、离焦和绕轴倾斜五种像差对通过限瞳光阑和空间滤波器光束的影响。为了便于比较, 对于各种像差均选为 1λ 的波像差量。

比较图 4 中各图可以看出, 球差对光束的影响是最小的。图 4(a) 示出, 在选择 0.5 倍的衍射极限的小孔时, 光场仍可达到 $3 \times 10^{-2}\lambda$ 的波像差量。而像散和彗差光束通过滤波得到 0.14λ 的波像差量。对于具有绕轴倾斜像差光束, 通过同一滤波小孔所剩波像差达 0.45λ 。由此可知, 由于像差光束的焦体光场的空间分布不同, 致使通过小孔的光场的空间分布也各不相同。

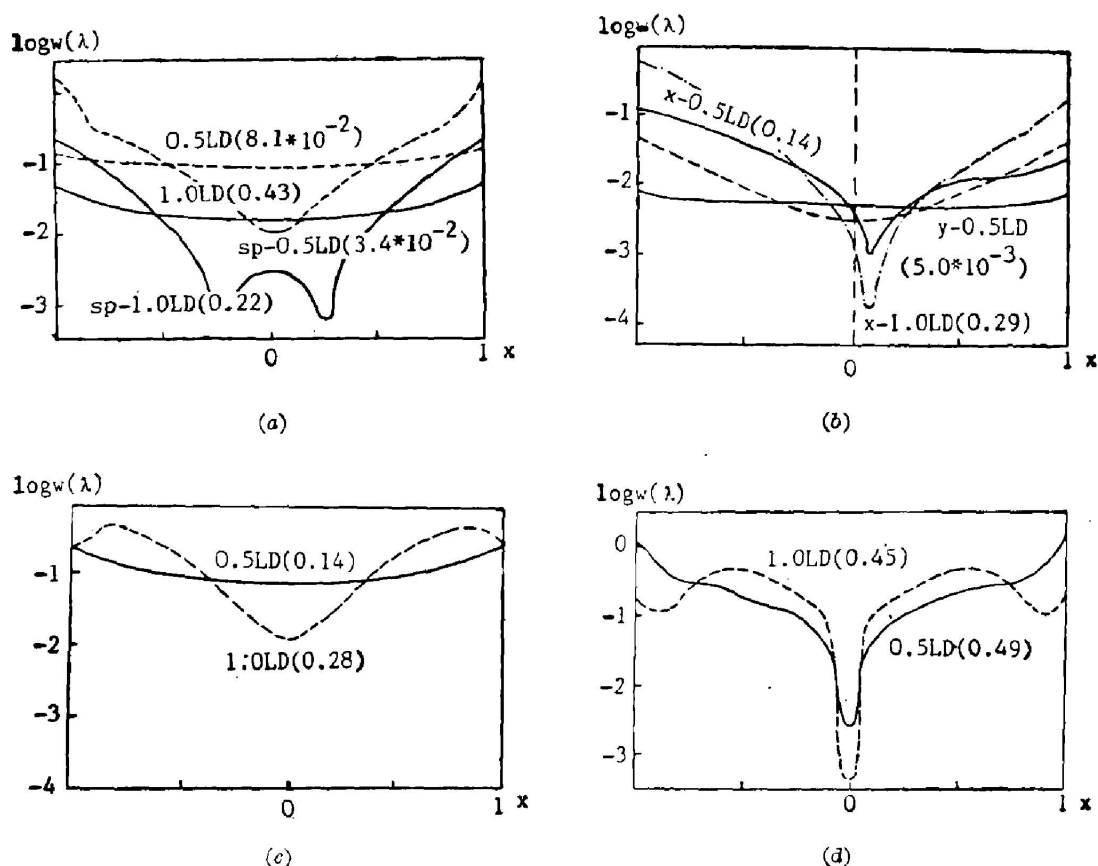


Fig. 4 Phase distribution of the aberration light beam with truncation intensity of 0.001 after passing through different pinhole of 1 or 0.5 times of Airy disk

- (a) in presence of spherical aberration and curvature of field;
- (b) in presence of coma;
- (c) in presence of astigmatism;
- (d) in presence of distortion

同时还可以由图看出, 不同的小孔对各种像差光束的影响也各不相同。对于球差和离焦光束减小小孔的尺寸, 光束的波面位相差显著地减小。例如对 1 倍和 0.5 倍衍射极限的小孔, 波面相位差竟差二个量级。对于彗差和像散, 两者相差 1 倍左右。对于绕轴倾斜像差光束, 减小小孔尺寸, 竟然没有任何作用(图 4(c)和(d))。

最后应该说明对于非对称性的像差, 利用小孔滤波的方法不可能全部消除其非对称性。图 4(b) 示出彗差光束在像面上的波面相位分布。在引起彗差的 xoz 平面内, x 轴上的波像差分布与像散光束基本相同。在具有对称性 $yo z$ 平面内, 在 y 轴上的波像差分布虽然具有对称性, 但是与无像差光束的波面相位分布并不相同, 这是必然的结果。

图 5 示出了截尾强度为 0.5 时像差光束通过滤波器后, 在像面上的波面相位的空间分布。与图 4 相比较, 可知波像差均增大了很多, 而且空间分布形状也有较大的变化。由于限瞳光阑截尾调制的影响已经大到可以与 1λ 的波像差量相比甚至于超过了此量的程度, 因此通过小孔的光场不仅仅受光束原有像差的制约, 还受限瞳光阑对光束截尾所造成的空间衍射的制约。

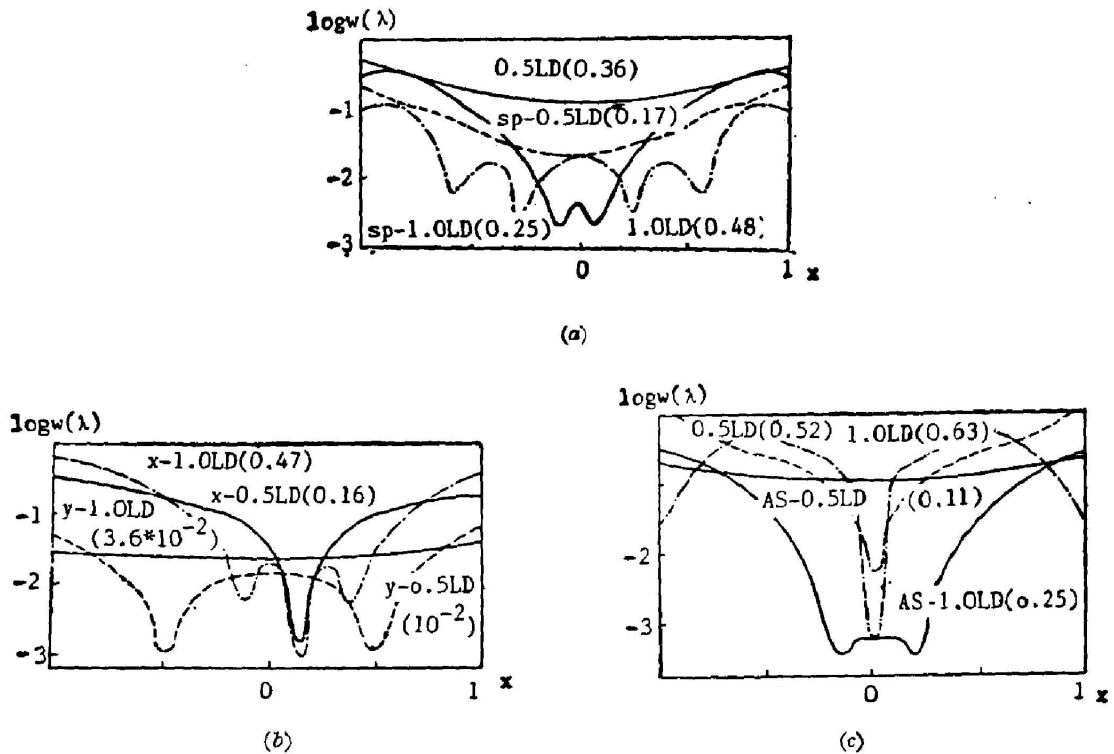


Fig. 5 Phase distribution of the aberration light beam with truncation of 0.5 after passing through the pinhole of 1 and 0.5 times of Airy disk

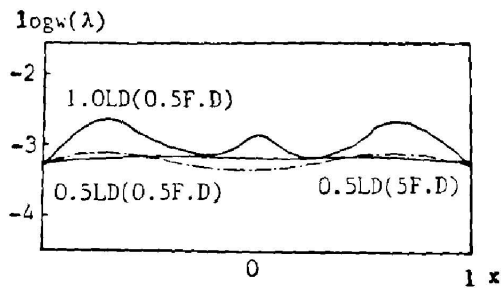


Fig. 6 Phase distribution of the light beam with truncation intensity of 0.001 after passing through the pinhole is placed inside the depth of field or outside the depth of field

3. 离焦放置的小孔对理想光束的影响

图 6 示出置于 0.5 倍物理焦深区的小孔对光场的影响。根据表达式(8)给出的计算图像说明, 小于衍射极限的小孔即使置于离焦的位置上也可以使透过的光束波面相位变化小于 $10^{-3}\lambda$ 。对于大于 1 倍衍射极限的小孔, 其出射光场明显地呈现了衍射花样。在物理焦深区之外, 由于计算表达式本身有较大的误差, 这里使用 0.5 倍衍射极限的小孔仍可以得到波差为 $10^{-3}\lambda$ 的光束。该结果仅供参考。

五、结 论

上述计算与分析有两点意义

1. Huygens-Fresnel 原理对小孔衍射做了定性的描述。Fresnel-Kirchhoff 积分公式给出了较好的数学表达。我们的数值计算给出位于 Fraunhofer 区小于 Airy 斑的小孔衍射以定量的概念。

2. 由于在 Fraunhofer 区用小孔取光比在 Fresnel 区光强要强得多。因此这种取光方式很有应用价值。例如用做小孔干涉仪或者做光学传感器等。

本课题是由王之江教授提出的，作者还曾与伍树东和梁培辉副教授进行过多次有益的讨论，在此一并表示衷心地感谢。同时还感谢钱家钧高级工程师和沈丽娟同志在计算方面给予的帮助。

参 考 文 献

- [1] R. N. Smartt, J. Strong; *J. O. S. A.*, 1972, **62**, No. 5 (May), 737~738.
- [2] 伍树东;《光学学报》,1983, **3**, No. 9 (Dec), 815~820.
- [3] E. W. Machand, E. Wolf; *J. O. S. A.*, 1966, **56**, No. 12 (Dec), 1712~1726.
- [4] B. Karczewski, E. Wolf; *J. O. S. A.*, 1966, **56**, No. 9 (Sep), 1207~1214.
- [5] B. Karczewski, E. Wolf; *J. O. S. A.*, 1966, **56**, No. 9 (Sep), 1214~1219.
- [6] D. C. Sincla; *J. O. S. A.*, 1966, **56**, No. 12 (Dec), 1727~1733.
- [7] J. W. Goodman; *«Introduction to Fourier Optics»*, (New York, McGraw-Hill, 1986), Chapter 2~4.
- [8] Wang Guiying; *«Fourier Optics and Fast Fourier Transform»*, (Max Planck Institute of Quantum-Optics 1986).
- [9] D. A. Malacara; *«Optical Shop Testing»*, (John Wiley & Sons, New York, 1978), Appendix.
- [10] J. Hayes, S. R. Lange; *«Spie Proceedings»*, (Printed in the United of America), 1983, 429, 22~26.

Light field diffraction passing through a pinhole smaller than Airy disk

WANG GUIYING

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 24 April 1987; revised 17 August 1987)

Abstract

By using Fourier transforms algorithm, the phase difference of the waveform and the intensity distribution of light beam passing through a pinhole smaller than Airy disk are calculated for first time.

Key words: phase difference; aberration of wavefront surface.