

# 水准折光及双波长激光效应

戴邦雯  
(上海市地震局)

## 提 要

本文从“同温度层不完全平行于地面，且在变化”的“任意分层”假设出发，导出了水准折光修正公式，并利用光的色散效应在 $10^{-6}$ 的精度要求下，求得

$$\gamma = \gamma_T = \frac{h_1}{h_2} = \frac{n_{01} - 1}{n_{02} - 1} = \text{常数}.$$

最后指出，研制双波长激光水准仪的必要性和可能性，并提出了研制此种仪器的技术参数。

关键词：水准折光；双波长；激光效应；平行分层；任意分层。

在水准测量中，由于前后视线通过的气象、地形起伏、覆盖物等因素的不同，当水准线路一般沿倾斜路面进行时，测量高差中的折光误差将成为系统性的，距离越长，折光误差影响越大。它是当前大地测量中，迫切需要解决问题之一，从一定意义上讲，限制了水准测量的精度。

库卡梅基等遵循着“同温度层平行于地面”，即所谓“平行分层”这一准则，推导出水准折光修正公式。本文在此基础上，作以下二点改进：

1. 同温度层不完全平行于地面，且瞬时变化，即所谓“任意分层”。
2. 库卡梅基等水准折光修正公式中，折射率仅顾及温度、压力、湿度的影响，未考虑波长这一因素。

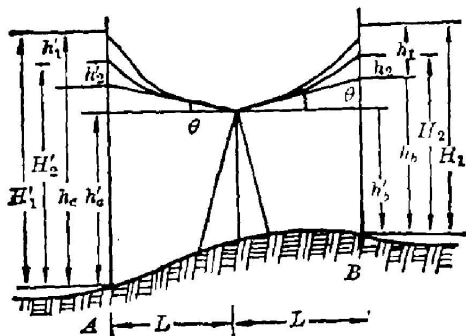


Fig. 1

水准测量时，一般水准轴与视准轴（激光轴）之间有一小的夹角 $\theta$ （自动安平水准仪亦有准水平误差），若 $\theta$ 不变，不考虑折光误差的影响，在前后视距相等时，即可消去由于 $\theta$ 角存在而产生的误差。

在考虑折光误差的情况下如图1所示。

$$\left. \begin{aligned} H_2 &= h_0 + h_2, & H_1 &= h_0 + h_1, \\ \delta &= H_2 - H_1 = h_2 - h_1, & h &= h_0 - h_0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $h_1$ 为第一种波长 $\lambda_1$ 的折光误差。 $h_2$ 为第二种波长 $\lambda_2$ 的折光误差。根据波长 $\lambda$ 、温度 $T$ 、气压 $P$ 、视线与空气层界面的夹角 $i$ 、空气层界面与水准面夹角 $\alpha$ 、视线与水准面夹角 $\theta$ 等因素，推导出折光误差修正公式\*

$$h = f(\lambda, T, P, i, \alpha, \theta, L),$$

$$\therefore \gamma = \frac{h_1}{h_2}, \delta = h_2 - h_1, \therefore h_2 = \frac{\delta}{1 - \gamma}. \quad (2)$$

收稿日期：1987年4月10日；收到修改稿日期：1987年5月25日

\* 具体推导见后。

将(2)式代入(1)式得  $h_0 = H_2 - h_2$ ; 同样, 也可算出  $h_0$ , 将  $h_0$ 、 $h_0$  代入(1)式, 可得  $A$ 、 $B$  之间的高差  $h$ 。这样, 用双激光自动安平水准仪, 进行水准测量时, 对折光误差进行修正后, 可减少和消除折光误差, 提高水准测量的精度。

激光(或视线)通过的空气层界面较复杂, 它与气象、地形起伏、覆盖物等有关, 界面间通常是不平行的, 且在不断变化, 本文建立的“任意分层”的数学模型, 如图 2 所示。

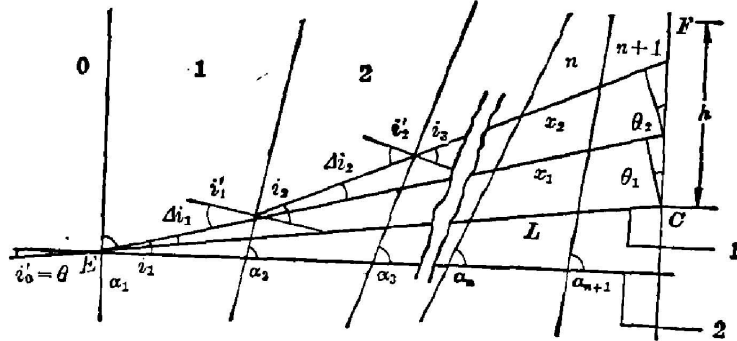


Fig. 2

假定空气层界面相互不平行, 且与水准面有倾角  $\alpha_j$ , 在水准测量时, 由于水准仪的望远镜光轴与水准面平行,  $\therefore \alpha_1 = 90^\circ$ ,  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}$  倾角不相等。入射角与折射角可表示为

$$i'_j = i_j + \alpha_j - \alpha_{j+1} \quad (3)$$

设想在水准测量时, 前视(或后视)视线通过  $n+1$  空气层, 当视准轴(激光轴)与水准轴夹角为  $\theta$ , 在没有大气效应(折光误差)情况下, 激光应沿  $EC$  直线前进, 激光点应落在被观测标尺的  $O$  点上; 由于有大气效应(折光误差)激光点落在  $F$  点。

假定在 0 空气层的入射角为  $i_0$ , 1 空气层的折射角为  $i_1$ , 则折射对高差的影响为  $\Delta_1$

$$\Delta_1 = x_1 \Delta i_1 / \cos \theta_{10} \quad (4)$$

由图 2 可知, 折光误差  $h$  可表示为

$$h = \int_0^L \frac{x di}{\cos \theta} = \sum_{j=0}^n \frac{x_{j+1} \Delta i_{j+1}}{\cos \theta_{j+1}} = \sum_{j=0}^n \Delta_{j+1} \quad (5)$$

式中  $L$  为水准仪至标尺的距离,  $x$  为视线通过的空气层界面至标尺的距离,  $\theta$  为视线与水准面的夹角。折射率  $n = f(T, P, e)$ , 即  $n$  是  $T$ 、 $P$ 、 $e$  的函数, 对  $n$  全微分得

$$dn = \frac{\partial f}{\partial T} dT + \frac{\partial f}{\partial P} dP + \frac{\partial f}{\partial e} de \quad (6)$$

几个基本公式及其符号的意义:

1. 斯涅耳定律:

$$n_j \sin i_j = n_{j+1} \sin i_{j+1} \quad (7)$$

式中  $n_j, n_{j+1}$  是相邻的  $j, j+1$  空气层中的折射率。

2. 在标准状态和干燥空气中时, 群折射率  $n_0$  (波长  $\lambda$  以  $\mu\text{m}$  计算) 和波长的依赖关系

$$n_0 = 1 + 2.876 \times 10^{-4} + \frac{4.887 \times 10^{-6}}{\lambda^2} + \frac{6.80 \times 10^{-6}}{\lambda^4} \quad (8)$$

3. 折射率与温度、气压、湿度、波长等参数的关系为

$$n_j = 1 + \frac{n_0 - 1}{1 + \alpha T_j} \left( \frac{P_j}{760} \right) - \frac{5.5 \times 10^{-9} e_j}{(1 + \alpha T_j)} \quad (9)$$

式中  $P$  为以  $\text{mm Hg}$  计算的压强,  $T$  为以  $^\circ\text{C}$  计算的温度,  $e$  为以  $\text{mm Hg}$  计算的水蒸汽压力。  $\alpha = 0.00367$ 。因为  $n \sin i$  是常数, 所以

$$n \cos i \, di + \sin i \, dn = 0, \quad di = -\operatorname{tg} i \frac{dn}{n}. \quad (10)$$

将(9)式全微分可得

$$dn = \frac{(n_0 - 1) [-\alpha P (1 + \alpha T)^{-2} dT + (1 + \alpha T)^{-1} dP]}{760} - 5.5 \times 10^{-9} \\ \times [-\alpha e (1 - \alpha T)^{-2} dT + (1 + \alpha T)^{-1} de] \quad (11)$$

若略去湿度影响将(10)、(11)式代入(5)式, 则对于第一种、第二种波长分别可写为

$$h_1 = (n_{01} - 1) \sum_{j=0}^n \left\{ [\alpha P_j (1 + \alpha T_j)^{-2} \Delta T_{j+1} - (1 + \alpha T_j)^{-1} \Delta P_{j+1}] \frac{\tan i'_{1,j} \cdot x_{1,j+1}}{760 \cdot n_{1,j} \cos \theta_{1,j+1}} \right\} \\ = (n_{01} - 1) \omega_1, \quad (12)$$

$$h_2 = (n_{02} - 1) \sum_{j=0}^n \left\{ [\alpha P_j (1 + \alpha T_j)^{-2} \Delta T_{j+1} - (1 + \alpha T_j)^{-1} \Delta P_{j+1}] \frac{\tan i'_{2,j} \cdot x_{2,j+1}}{760 n_{2,j} \cos \theta_{2,j+1}} \right\} \\ = (n_{02} - 1) \omega_2, \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta T_{j+1} &= T_{j+1} - T_j, & \Delta P_{j+1} &= P_{j+1} - P_j, & \Delta n_{j+1} &= n_{j+1} - n_j, \\ i'_{1,j} &= i_{1,j} + \alpha_j - \alpha_{j+1}, & i'_{2,j} &= i_{2,j} + \alpha_j - \alpha_{j+1}, \\ \theta_{1,j} &= \theta + \sum_{k=0}^j \Delta i_{1,k+1} = \theta + \sum_{k=0}^j \left( -\operatorname{tg} i'_{1,k} \frac{\Delta n_{1,k+1}}{n_{1,k}} \right), \\ \theta_{2,j} &= \theta + \sum_{k=0}^j \Delta i_{2,k+1} = \theta + \sum_{k=0}^j \left( -\operatorname{tg} i'_{2,k} \frac{\Delta n_{2,k+1}}{n_{2,k}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

假如是第一种波为红光(6328 Å)、第二种波为红外线(11530 Å)代入(8)式得

$$\left. \begin{aligned} n_{01} &= 1.0003002803, & n_{02} &= 1.0002913666, \\ \frac{n_{01}}{n_{02}} &= 1.00000891, & \gamma_T &= \frac{n_{01} - 1}{n_{02} - 1} = 1.0305928491. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

在分析(12)、(13)式时, 发现在一定精度范围内对于任何两个给定的波长  $\gamma$  是常数。

$$\gamma = \gamma_T = \frac{h_1}{h_2} = \frac{n_{01} - 1}{n_{02} - 1} = \text{常数}. \quad (16)$$

从(2)、(16)式可得

$$n_2 = \frac{\delta}{1 - \gamma} = \frac{\delta}{1 - [(n_{01} - 1)/(n_{02} - 1)]} = \frac{n_{02} - 1}{n_{02} - n_{01}} \delta. \quad (17)$$

(9)式中若不忽视湿度的影响, 将(10)、(11)式代入(5)式, 并提出公共项  $(n_{01} - 1)$ 、 $(n_{02} - 1)$  等可得

$$h_1 = (n_{01} - 1) \sum_{j=0}^n \left\{ \left( \frac{\alpha P_j (1 + \alpha T_j)^{-2} \Delta T_{j+1} - (1 + \alpha T_j)^{-1} \Delta P_{j+1}}{760} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{5.5 \times 10^{-9} [\alpha e_j (1 + \alpha T_j)^{-2} \Delta T_{j+1} - (1 + \alpha T_j)^{-1} \Delta e_{j+1}]}{n_{01} - 1} \right) \times \frac{\tan i'_{1,j} \cdot x_{1,j+1}}{n_{1,j} \cos \theta_{1,j+1}} \right\} \\ = (n_{01} - 1) \omega_1, \quad (18)$$

$$h_2 = (n_{02} - 1) \sum_{j=0}^n \left\{ \left( \frac{\alpha P_j (1 + \alpha T_j)^{-2} \Delta T_{j+1} - (1 + \alpha T_j)^{-1} \Delta P_{j+1}}{760} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{5.5 \times 10^{-9} [\alpha e_j (1 + \alpha T_j)^{-2} \Delta T_{j+1} - (1 + \alpha T_j)^{-1} \Delta e_{j+1}]}{n_{02} - 1} \right) \times \frac{\tan i'_{2,j} \cdot x_{2,j+1}}{n_{2,j} \cos \theta_{2,j+1}} \right\} \\ = (n_{02} - 1) \omega_2. \quad (19)$$

(18)、(19)式就是根据“任意分层”的假设出发,而导出的水准折光误差修正公式。  
比较(18)、(19)式同样得出,在一定精度范围内,对于任何两个给定的波长是常数,

$$\gamma = \gamma_T = \frac{h_1}{h_2} = \frac{n_{01} - 1}{n_{02} - 1} = \text{常数。} \quad (20)$$

为了估算在什么精度的要求下,可以用  $\gamma_T$  来代替  $\gamma$ ,特模拟以下两个算例。

例 1: 观测站到被观测点距离为 505m, 视线通过 0~n+1 空气层, 视线通过每空气层的距离均相等为 5m, 0 空气层的温度为 19.8°C, 气压为 770.0 mm,  $i_{1,0} = i_{2,0} = \theta = 10'$ ,  $\alpha_0 = \alpha_1 = 90^\circ$ ,  $\alpha_2 = 30^\circ$ , 假定 0~n+1 空气层的气象条件(不考虑湿度的影响), 空气层界面倾角  $\alpha_i$ , 分为五个区段, 每层依次递增、递减情况如表 1 所示。假如使用红光(6328 Å)和红外线(11530 Å)双波长激光器, 通过电子计算机运算, 得到结果如表 2 所示。

Table 1

the interval or interface of the air layer	temperature (°C)	atmospheric pressure (mm)	the interface dip angle of the air layer ( $\alpha_i$ )
0~20	incr. by 0.4	decr. by 0.4	decr. by 1° from $\alpha_2$
20~40	decr. by 1	incr. by 0.1	incr. by 1°
40~60	incr. by 0.2	decr. by 0.2	decr. by 1°
60~80	incr. by 1	incr. by 0.1	incr. by 1°
80~101	incr. by 0.2	decr. by 0.2	decr. by 1°

Table 2

$n_{01} = 1.0003002803$	$n_{02} = 1.0002913666$
$\gamma_T = 1.0305928491$	$\gamma = 1.0305843446$
$h_1 = 13.05808 \text{ mm}$	$h_2 = 12.67056 \text{ mm}$
$\alpha_1 = 2.59 \times 10^{-5} \text{ rad}$	$\alpha_2 = 2.51 \times 10^{-5} \text{ rad}$

Table 3

$n_{01} = 1.0003002803$	$n_{02} = 1.0002913666$
$\gamma_T = 1.0305928491$	$\gamma = 1.0306154167$
$h_1 = 13.04523 \text{ mm}$	$h_2 = 12.65771 \text{ mm}$
$\alpha_1 = 2.58 \times 10^{-5} \text{ rad}$	$\alpha_2 = 2.51 \times 10^{-5} \text{ rad}$

例 2: 观测条件基本如例 1, 考虑湿度的影响, 假定 0 空气层的湿度为 55.35 mm, 从 0~101 每层依次递减 0.01 mm。通过电子计算机运算, 得到结果如表 3 所示。

从以上两个例子,  $\alpha_2 = 30^\circ$ , 递增、递减可知, 例子中所假定的空气层界面, 大致平行于地面。这是由于上述两个例子的假定要求并不十分严格, 所得的  $\gamma$  与  $\gamma_T$  之差最大仅  $2 \times 10^{-5}$ , 充分说明在一定精度要求下,  $\gamma_T$  可以代替  $\gamma$  的论点是正确的。

如果将线段量大气效应  $h_1$ 、 $h_2$  化为角色散值  $\Delta\theta$ 、 $\Delta\theta_2$ , 那么亦可用于三角和三角高程测量。即在一定的精度要求下, 对于任何两个给定的波长是常数。

$$\gamma = \gamma_T = \frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = \frac{n_{01} - 1}{n_{02} - 1} = \text{常数。} \quad (21)$$

无论测角(垂直折光、旁折光)、测距、测高的双波长激光仪器,都可导出

$$\gamma = (S_1/S_2) = (\Delta\theta_1/\Delta\theta_2) = (h_1/h_2) = \text{常数}$$

我们认为,  $\gamma$  的物理概念要比 Owens 所谓的“ $A$ ”为常数及 Willjams 提出的“ $K$ ”为常数, 更加明确。

所以双波长激光仪器的基本原理, 都取决于双波长激光效应, 它的物理意义是: 同一光轴, 发射出的两种不同波长的激光, 在大气传播中, 两种波长激光的折射影响之比, 在一定精度要求下是常数。

水准折光的研究, 迄今已有 100 多年的历史, 1948、1951 年苏联恩津等对巴甫洛夫公式进行实验性的检查, 按巴氏公式计算  $\Delta\rho$  及其和数, 甚至连折光差对水准测量实际影响的程度、都不能表示, 通过实践的结果, 彻底证明了巴甫洛夫公式是不能采用的。

克拉索夫斯基认为, 地面倾斜度的大小(即使是微小不平), 一日中不同的时刻, 季节、云量、风、植被、土质、实施水准测量所沿的道路结构不同, 地段的阴暗度等, 都可以对空气温度分布情况有重大影响, 因而要想成立一个符合于所有情况的公式, 是几乎没有希望的。

因此, 作者建议不要用上述的折光修正公式, 对我国一等水准观测进行修正, 因为我国一等水准测量视距仅为 35 m, 折光误差本身就不太大, 而水准折光修正的精度, 又大大地低于精密水准测量的精度, 况且所用水准折光修正公式的不同, 修正数的大小有一定的差别, 所以若这样进行水准折光修正, 可能会破坏我国的高程系统。

作者认为“同温度层平行地面”的假设, 本身就是不完善的, 据此所计算的折光误差, 是不完全正确的。

综上所述, 只有研制双波长激光自动安平水准仪, 才可能给人们进一步揭示水准折光误差的规律和性质, 将(17)式全微分得

$$dh_2 = \delta(1-\gamma)^{-2} d\gamma + (1-\gamma)^{-1} d\delta = h_\gamma + h_\delta \quad (22)$$

根据误差传播定律可得每次测量误差  $M_{h_2}$  为

$$M_{h_2} = \sqrt{[\delta(1-\gamma)^{-2}]^2 m_\gamma^2 + [(1-\gamma)^{-1}]^2 m_\delta^2} \quad (23)$$

从上式可知, 研制双波长激光自动安平水准仪时,  $\gamma$  愈大, 光电接收装置灵敏度愈高,  $\gamma$  的精度愈高, 则仪器的测量误差愈小。

在例 2 中, 考虑比较大的湿度影响下,  $\gamma$  与  $\gamma_T$  之差仅  $2 \times 10^{-5}$  误差, 则

$$h_\gamma = \delta(1-\gamma)^{-2} \Delta\gamma = 0.388(-0.031)^{-2} \times 2 \times 10^{-5} = 8.1 \times 10^{-3} \text{ mm},$$

$h_\gamma$  对测线长度 505 m 的相对误差为  $1.6 \times 10^{-8}$ 。在例 2 中若用  $\gamma_T$  代替  $\gamma$ , 则产生的误差为  $10^{-9}$  数量级, 在色散影响及湿度比较大的情况下, 可在测站与被观测站测定湿度, 以对  $\gamma_T$  进行修正。

若用红光与红外作为双波长激光器, 可得  $h_1 = 1.0306h_2$ , 即波长愈短则折光误差愈大, 若  $h_2 = 10 \text{ mm}$  时, 则  $h_1 = 10.306 \text{ mm}$ , 此时红外与红光的激光点, 在被观测的标尺上分开 0.306 mm。

事实证明, 由于大气湍流的存在, 大气抖动的量要大于双波长激光的水准折光差之差的量, 我们可以利用这一特性研制仪器, 当  $h_1 = h_2 = 0$  时, 即当两光点重合时进行观测, 这时此点可认为是没有折光误差的观测值。

在设计双波长激光水准仪时, 假定视距长度为 100 m, 根据我国一等水准测量规范要求

视距为 35 m 时,基辅差为 0.7 mm,则每次照准误差为  $(0.7/\sqrt{2})=0.5$  mm,在 100 m 时读数误差为  $0.5 \cdot \sqrt{100/35}=0.85$  mm,当接收的尺子,用光电转换重复测量 10 次时,每次测量误差  $M_{h_1}$  要求为 2.69 mm。

请看 (23) 式,因为  $m_7$  很小可忽略,则

$$M_{h_1} = (1 - \gamma)^{-1} m_8 = K m_8 \quad (24)$$

研制双波长激光仪器的困难,就在于观测的是小量  $\delta$ ,而求的是大量  $h_1$ ,误差扩大  $K$  倍,当用红光、红外时  $K \approx 32.7$ ,这样  $m_8 = 2.69/32.7 = 0.08$  mm。

国外研制的折光仪,使用 UDT 的 SC10 双轴探头,两个光点重合测量精度可达到  $0.1 \mu\text{m}$ ;我国国内的光电耦合器件 CCD,其灵敏度亦可达到  $13 \mu\text{m}$ ,远远小于 0.08 mm;至于红外、红光的双波长激光管已于 1978 年由上海复旦大学物理系研制成功,所以当前我国研制双波长激光自动安平水准仪是完全可能的。

本文提出的“任意分层”假设,并利用色散效应所推导的双波长激光水准仪理论基础是在同行们大量的实验数据而建立的,因而更具有实际应用的意义。但是,双波长激光测量也有一定的限制,通常距离愈远,要求空气的清晰度、稳定性愈高,当大气湍流太激烈和空气混沌的情况下,双波长激光效应因此而破坏,所以就不能进行观测。

本文得到庄松林博士、朱顺之高级工程师及段华琛同志不少帮助,在此表示感谢。

#### 参 考 文 献

- [1] Ф. 日克拉索夫斯基, B. B 达尼洛夫著;《大地测量上卷第四分册》, (测绘出版社, 1957), 1032~1042。
- [2] R. A. Bender; (NASA 1962 SP-5042, 27~28)。
- [3] 王. 恩津;《高精度水准测量》, (测绘出版社, 北京, 1958), 35~91。
- [4] T. Glissmann; *Zeitschrift für Vermessungswesen* 1978, 103, Heft 5, 209~216。

## Refraction in levelling and two-wavelength effect of laser

DAI BANGWEN

(Seismological Bureau of Shanghai)

(Received 10 April 1987; revised 25 May 1987)

### Abstract

The authors point out that "The layers with same temperature are not quite parrallel to the ground and are changable under different condition" (i.e. the layers are divided arbitrarily). Under such an assumption the correcting formula for refraction in levelling has been derived concerning the effect of light dispersion. The formula with the precision  $10^{-6}$  is as follows

$$\gamma = \gamma_{\text{THE}} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{n_{01} - 1}{n_{02} - 1} = \text{const.}$$

The necessity and the possibility to develop the two wavelengths laser levelling instrument are suggested and the technical parameter for producing this kind of instrument are put forward too.

**Key words:** refraction in levelling; two-wavelength; effect of the laser; parallelly devided layer; layers are divided arbitrarily.