

# 用 Kramers-Kronig 关系求出 反射镜的相位色散

梁培辉 张峭峰 沃敏政

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

## 提 要

光学元件相位色散在超短光脉冲的产生和传播中起着重要的作用,本文提出运用 Kramers-Kronig 关系,从反射谱直接求出反射镜的相位色散。文中对此法作了分析并以多层介质膜和铝膜反射镜为例子进行了讨论。

关键词: 反射镜, 相位色散 Kramers-Kronig 关系。

## 一、引 言

要获得超短激光脉冲必须注意腔内外光学元件的色散,适当的反射膜与折射介质相匹配以校正腔内色散对于获得超短脉冲是必要的<sup>[1,2]</sup>,目前超短激光脉冲的脉宽已达到 10 fs 的量级,在进行光学实验时所使用的分光板与反射镜的相位色散会导致脉冲的变形与加宽,例如,如果光路总的相位色散的二阶导数为  $2 \times 10^{-28} \text{s}^2$ ,则会使 10 fs 的脉冲加宽 40%<sup>[3]</sup>。因此,在 fs 的光学中,腔内或腔外的反射镜的相位色散应该作为一个重要的参数。

我们曾用 F-P 干涉仪的方法测量出宽带多层高反射介质膜的位相色散,并给出相位色散的二阶导数<sup>[3]</sup>。这种方法要求被测介质膜涂在 F-P 标准具上,要准确知道标准具隔圈的厚度,而且介质膜的反射率要足够高,因此这种方法不宜用作光学元件的常规性测量。

本文以经典的普遍的色散关系——Kramers-Kronig 关系出发,测量光学元件的反射率谱导出元件的相位色散谱。而 Kramers-Kronig 关系所使用的积分变换可以由计算机完成,因此本文提出的方法是适合于实际应用的。

## 二、Kramers-Kronig 关系的应用

令人射到反射面的电场为  $E_i$ , 反射电场为  $E_r$ , 反射系数

$$r(\omega) = [E_r(\omega)/E_i(\omega)] = \rho(\omega)\exp[i\theta(\omega)], \quad (1)$$

式中  $\theta(\omega)$  是反射系数的相位因子,描写反射面的相位色散。实验中测量反射率,即反射光场强度与入射光场强度之比

$$R(\omega) = [E_r^*(\omega)E_r(\omega)/E_i^*(\omega)E_i(\omega)] = \rho^2(\omega). \quad (2)$$

显然,  $R(\omega)$  不显含相位因子。所谓 Kramers-Kronig 关系是指, 当一个线性无源系统的响应函数  $\alpha(\omega)$  的虚部在所有频率  $\omega$  内数值已知时, 如何求得该函数的实部, 或者是反过来, 由实部求出虚部<sup>[4]</sup>:

$$\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega), \quad (3)$$

$$\alpha'(\omega) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{s\alpha''(s)}{s^2 - \omega^2} ds, \quad (4a)$$

$$\alpha''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\alpha'(s)}{s^2 - \omega^2} ds, \quad (4b)$$

其中符号  $\mathcal{P}$  表示柯西积分主值。令  $\alpha(\omega) = \ln r(\omega)$ , 利用 (1)、(2) 式得

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2} \ln R(\omega) + i\theta(\omega), \quad (5)$$

依照 (4b) 的关系

$$\theta(\omega) = -\frac{\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\ln R(s)}{s^2 - \omega^2} ds. \quad (6)$$

(6) 式给出了反射面位相色散与反射率谱的函数关系, 从这个积分变换式我们可以得出许多有用的推论:

- (1) 反射率为常数的频域对相位色散的贡献较小;
- (2) 如果两个反射面的反射率谱是相似的, 即两者在各种频率下的反射率的比值是常数, 则它们的相位色散是相同的;
- (3) 因为被积函数的分母为  $s^2 - \omega^2$ , 故只有当  $s \sim \omega$  时积分才有较大的数值, 反之,  $s \gg \omega$  或  $s \ll \omega$ , 积分值甚小。故即使从理论的角度看, 要求  $R(\omega)$  谱包括  $\omega=0$  到  $\omega=\infty$  的全部频率不是完全必要的<sup>[5]</sup>。当我们关心  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  区域的  $\theta(\omega)$  时, 需要有更宽频域下的  $R(\omega)$  频, 设其范围为  $(\omega_1/M)$  到  $N\omega_2$ 。对  $M$ 、 $N$  值的估计视  $R(\omega)$  的性质以及对  $\theta(\omega)$  精度要求而定;
- (4) 如果在某一频域内  $R(\omega)$  的变化缓慢, 则其对位相色散的贡献有限, 反之, 在某一频域内  $R(\omega)$  有急剧的变化, 则在此频域附近的  $\theta(\omega)$  就较大。
- (5) 在很大的频域内相比较,  $R(\omega)$  具有多峰形状的反射镜, 其相位色散数值会比  $R(\omega)$  变化单调的反射镜大得多。

### 三、数值计算方法

用快速傅里叶变换计算 Kramers-Kronig 关系是一种可行的方法<sup>[6]</sup>, 但是比较麻烦。本文采用直接积分的办法, 其中利用被积函数的特性, 略去在  $s=\omega$  点附近极小区间内的积分值, 并使积分步长随  $|s-\omega|$  值的增大而急剧增大, 以便提高计算的速度。(6) 式中的积分可以写成

$$\int_0^{\infty} g(s) ds = \int_0^{\infty} \frac{f(s)}{s^2 - \omega^2} ds,$$

其中  $f(s) = \ln R(s)$ 。在  $s = \omega \pm \Delta\omega$  处

$$g(\omega - \Delta\omega) = \frac{f(\omega - \Delta\omega)}{(\omega - \Delta\omega)^2 - \omega^2} = -\frac{f(\omega - \Delta\omega)}{2\omega\Delta\omega - (\Delta\omega)^2},$$

$$g(\omega + \Delta\omega) = \frac{f(\omega + \Delta\omega)}{(\omega + \Delta\omega)^2 - \omega^2} = \frac{f(\omega + \Delta\omega)}{2\omega\Delta\omega + (\Delta\omega)^2}.$$

当  $\Delta\omega \ll \omega$  时,  $g(\omega + \Delta\omega) \approx -g(\omega - \Delta\omega)$ , 即被积函数在  $s = \omega \pm \Delta\omega$  附近近似有反对称关系, 故可以认为在  $\omega - \Delta\omega < s < \omega + \Delta\omega$  区域的积分为零, 从而避开了  $s = \omega$  处的奇点问题。

上述计算中假设反射率  $R(\omega)$  是连续函数, 这与实际相符。由于较多的光谱仪其使用波长  $\lambda$  为变量, 故(6)式也可表示为

$$\theta(\lambda) = -\frac{\lambda}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\ln R(l)}{l^2 - \lambda^2} dl. \quad (7)$$

按(7)式作数值计算时, 我们运用变步长  $\Delta l_r$  的梯形面积求积方法:

$$\Delta l_0 = 10^{-5} \text{ \AA} \ll \lambda,$$

$$\Delta l_r = 10 \times \left[ 1 - \exp\left(-\frac{l^2}{4 \times 10^4}\right) \right] \text{ \AA},$$

$l$  从 1 开始。为处理方便, 下面用  $\nu = (\omega/2\pi)$  将计算结果的变量  $\lambda$  换成相应的  $\nu$ , 便能得到所需的  $\theta(\nu)$ 。

为了验证这种数值计算方法的正确性, 我们选用

$$\alpha'(\nu) = (1 + \nu^2)^{-1}, \quad (8)$$

为响应函数的实部, 用我们的计算程序算出响应函数的虚部, 然后与(8)式的积分变换(公式 4b))的解析表达式

$$\alpha''(\nu) = \nu / (1 + \nu^2). \quad (9)$$

以函数图像的形式进行比较, 结果表明我们的直接积分方法是成功的。图 1 是所得的函数图像。

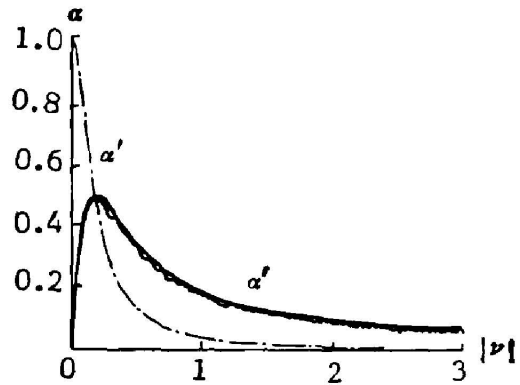


Fig. 1 The comparison of the calculated result from Kramers-Kronig relations using one code with the known curve

#### 四、计算反射镜相位色散的例子

作为例子我们选择了两种典型的反射面为研究对象, 一种是涂多层介质膜的反射镜, 一种是涂铝膜的反射镜。两种样品的反射谱用 Perkin-Elmer 公司的 Lambda 9 型光谱仪测量, 波长范围从紫外到近红外  $2000 \text{ \AA} \sim 30000 \text{ \AA}$ 。图 2(a) 和图 3(a) 分别为它们的反射率光谱曲线。从图可以看到, 介质膜在可见光的一部分波段具有高反射率的特性, 但在高反射率波段的两侧, 反射率大小有周期性的起伏, 这是多层介质的干涉的结果。与此相反, 铝金属膜的反射率除了在  $10000 \text{ \AA}$  附近有小小凹陷外, 反射率随波长变短而单调地下降。

从本文第二节的后面的推论中可以预测, 介质膜的相位色散曲线要比铝膜的复杂, 介质膜的相位色散的数值要比铝膜的大。

将图 2(a) 和图 3(a) 所示的反射率  $R(\nu)$  数据送入 IBM/PC, 并运用上节所介绍的计算程序, 可以方便地得到相应的相位色散曲线, 结果示于图 2(b) 和图 3(b)。不难看出这些曲线与预测的结论一致: 凡是  $R(\nu)$  有调制的地方, 相位色散  $\theta(\nu)$  都有相应的起伏。在整个波测量的波段内, 介质膜的相位变化幅度约为  $2 \text{ rad}$ , 而铝膜则只有  $0.3 \text{ rad}$  左右, 相差约 1 个

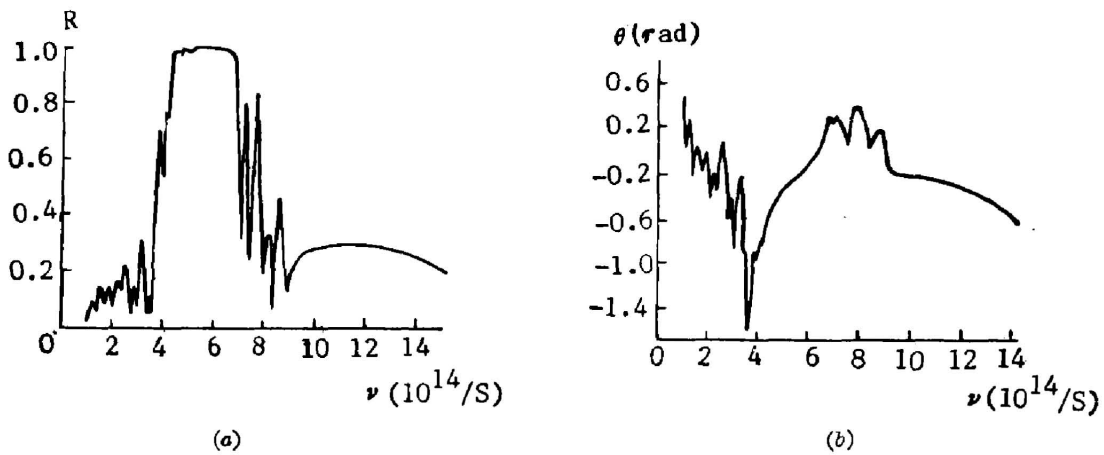


Fig 2. Plots of the reflectivity curve (a) and phase dispersion (b) of the dielectric coating

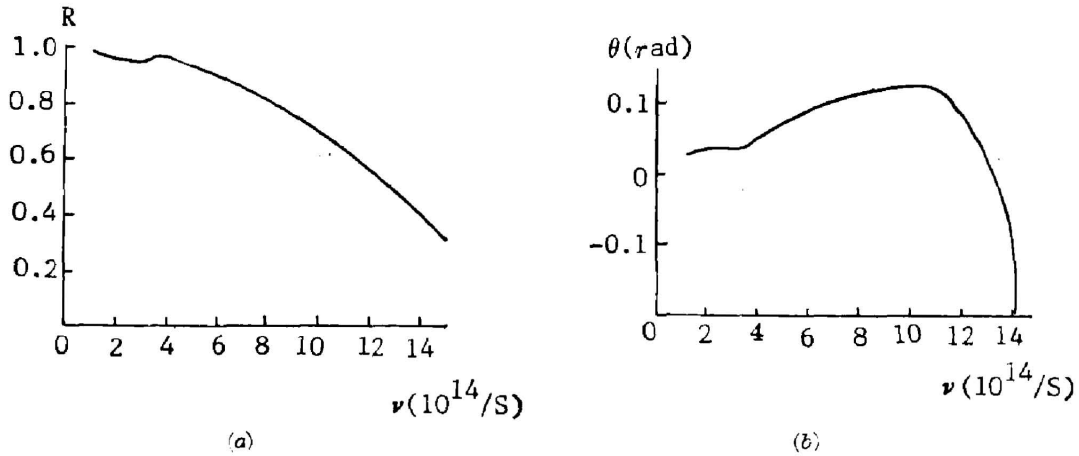


Fig 3 Plots of the reflectivity curve (a) and phase dispersion (b) of Al coating

数量级。

从理论上的推断可知, 由于  $R(\nu)$  的测量范围有限, 因此在曲线的高频端和低频端的相位。

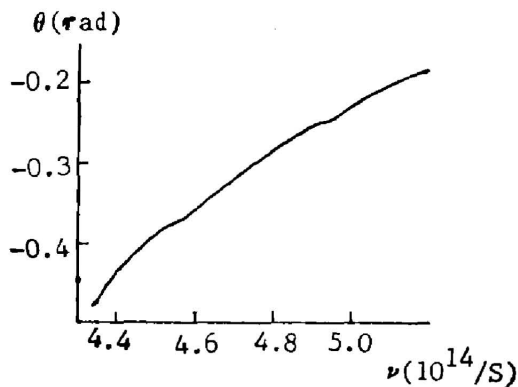


Fig 4. The phase dispersion of the dielectric coating in a region from yellow to red spectrum

存在较大的误差。但是, 就飞秒(fs)技术而言, 感兴趣的是 600 nm 附近的相位色散情况, 因为大多数产生飞秒脉冲的对撞锁模染料激光器工作在这一波段。在本工作中, 反射率测量范围从紫外到红外, 对 600 nm 波长而言, 最高频率为其频率 ( $\nu=5 \times 10^{14}/s$ ) 的三倍, 最低频率为其 1/5, 故计算结果较可靠。图 4 给出在这一频段内的介质膜的色散曲线, 实际上是图 2(b) 中的局部放大。

前面已经指出, Kramers-Kronig 变换的积分限应为无限大, 而实验只能提供有限带宽

的反射率数据,为了估计误差,我们以介质膜为例,取不同的积分上下限,即 400~900 nm, 300~1200 nm, 240~1500 nm, 200~1800 nm, 分别计算出 600 nm 附近的相位色散。上面积分限的选择,实际是以 600 nm ( $5 \times 10^{14}$ /s) 为中心,积分的频带宽度为中心频率的 3, 4, 5, 6 倍。由计算结果看到随着倍数增加,相位的绝对值逐渐增大而趋于一有限值比我们现在直接算出的约大 30%。

我们还计算了二种样品在 600 nm 附近相位二阶导数  $[\partial^2\theta(\nu)/\partial\nu^2]$  的数值,介质膜为  $1 \sim 2 \times 10^{-28}/s^2$ , 铝膜则低两个数量级。

## 五、结 束 语

超短光脉冲技术的发展趋势是在更高的频率(UV 至 X 光)产生更短的脉冲,故在今后的工作中,反射面的相位色散特性必须重视。本文提出的方法,即从反射面的反射率测量结果出发,经过 Kramers-Kronig 关系求出其相位色散特性,由于光谱测量技术的发展和计算机的普遍使用,将会在实验室工作中发挥作用。

## 参 考 文 献

- [1] 王之江,杨本祺;《光学学报》,1985,5, No. 8 (Aug), 697~701。
- [2] Sandro de Silvestri *et al.*; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1984, QE-20, No. 5 (May), 533~539。
- [3] 沃敏政,梁培辉等;《光学学报》,1986,6, No. 6 (Jun), 481~486。
- [4] R. de L. Kronig; *J. O. S. A.*, 1926, 12, 547。
- [5] R. Hulthen; *J. O. S. A.*, 1982, 72, No. 6 (Jun), 794~803。
- [6] B. Harbecke; *Appl. Phys. (A)*, 1986, 40, No. 3 (Jul), 151~153。

## Application of Kramers-Kronig relations for calculating phase dispersion of reflective mirrors

LIANG PEIHUI, ZHANG SHAOFENG AND WO MINZHENG  
(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 18 May 1987; revised 19 June 1987)

### Abstract

The phase dispersion of optical elements plays an important role in the generation and transmission of ultrashort pulses. In this paper we put forward a method for directly calculating the phase dispersion of reflective mirrors from reflective spectra by using Kramers-Kronig relations. Taking multi-layer dielectric coating and Al coating as examples, the method is analysed and discussed.

**Key words:** reflective mirrors; phase dispersion; Kramers-Kronig relation.