

串接型三能级原子的感应极化

朱诗尧 周礼冲 马爱群
(上海交通大学应用物理系) (哈尔滨工业大学应用物理系)

提 要

从求在双频场作用下的三能级原子系统的哈密顿量的本征函数和本征值出发, 导出系统随时间的演化规律。从而得出宏观极化的表示式。计算了极化的频谱分布和它们的相对强度。

关键词: 三能级原子, 感应极化, 双光子共振。

在过去的十年中, 三能级原子系统(包括入型和串接型)与双频(或单频)光场的相互作用受到广泛的重视。人们研究了原子的动力学行为、双光子放大和双光子激光等^[1~6]。本文侧重于讨论串接型三能级原子在双频场作用下的极化, 极化的频谱结构和各分量的相对强度。

一、本征函数与本征值

在双频场作用下三能级原子的哈密顿量为 $H = H_0 + V$, 其中 H_0 为无光场作用时的原子哈密顿量, V 为原子场相互作用哈密顿量。原子有三个能级, 基态, 中间态和激发态, 如图 1 所示。在无光场时, 原子的本征矢分别为 $|2\rangle$, $|n\rangle$ 和 $|1\rangle$ 。相应的本征值分别为 ω_2 , ω_n 和 ω_1 。基态和激发态之间无偶极跃迁。基态和中间态之间, 中间态和激发态之间的偶极跃迁分别由频率为 Ω_1 的场和 Ω_2 的场激发。并假定 $|\omega_1 - \omega_n - \Omega_1|$, $|\omega_n - \omega_2 - \Omega_2| \ll |\omega_1 - \omega_n - \Omega_2|$, $|\omega_n - \omega_2 - \Omega_1|$ 。因此, 在双频场作用下, 三能级原子的哈密顿量在转动波近似下为

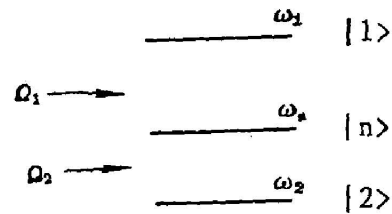


Fig. 1 Three-level atom and two light fields with frequencies Ω_1 and Ω_2

$$H = H_0 + V = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & -\frac{1}{2} p_{1n} \varepsilon_1 \exp(-i\Omega_1 t) \\ 0 & \omega_2 & -\frac{1}{2} p_{2n} \varepsilon_2^* \exp(i\Omega_2 t) \\ -\frac{1}{2} p_{n1} \varepsilon^* \exp(i\Omega_1 t) & -\frac{1}{2} p_{n2} \varepsilon_2 \exp(-i\Omega_2 t) & \omega_n \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中 ε_1 和 ε_2 是二光场的电场强度, p_{ij} ($i, j=1, 2$) 是 $|i\rangle$ 和 $|n\rangle$ 态之间的电偶极矩。

作下列么正变换(双转动变换),将 H 中的时间因子去掉^[3]

$$R = \begin{bmatrix} \exp(i\Omega_1 t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-i\Omega_2 t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

哈密顿量 H 变为 H'

$$H' = RHR^{-1} = H'_0 + V', \quad (3)$$

$$H'_0 = \begin{bmatrix} \omega_1 - \Omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 + \Omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_n \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$V' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} p_{1n} \varepsilon_1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} p_{2n} \varepsilon_2^* \\ -\frac{1}{2} p_{n1} \varepsilon_1^* & -\frac{1}{2} p_{n2} \varepsilon_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

令哈密顿量 H' 的本征矢和本征值分别为 $|\psi\rangle$ 和 K ^[5],

$$H'|\psi\rangle = K|\psi\rangle. \quad (6)$$

用 H'_0 的本征矢 $|1_R\rangle$ 、 $|n_R\rangle$ 和 $|2_R\rangle^*$ 来表示 $|\psi\rangle$,

$$|\psi\rangle = a|1_R\rangle + b|n_R\rangle + c|2_R\rangle. \quad (7)$$

将(7)式代入(6)式并利用(4)和(5)式可得

$$H'|\psi\rangle = \omega_n|\psi\rangle + (-\Delta_1 a + V_1 b)|1_R\rangle + (V_1^* a + V_2 c)|n_R\rangle \\ + (-\Delta_2 c + V_2^* b)|2_R\rangle = K|\psi\rangle, \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 = \Omega_1 - \omega_{1n}, \quad \Delta_2 = \omega_{n2} - \Omega_2, \quad \omega_{1n} = \omega_1 - \omega_n, \\ \omega_{n2} = \omega_n - \omega_2, \quad V_1 = -\frac{1}{2} p_{1n} \varepsilon_1, \quad V_2 = -\frac{1}{2} p_{n2} \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由(6)~(8)式可得

$$\left. \begin{aligned} -(\Delta_1 + K)a + V_1 b &= 0, \\ V_1^* a - Kb + V_2 c &= 0, \\ V_2^* b + (-\Delta_2 - K)c &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

这里我们已假定 $\omega_n = 0$ 。哈密顿量 H' 的本征值 K 可由(10)式的行列式决定,即为下列三次方程的三个根。

$$K^3 + (\Delta_1 + \Delta_2)K^2 + (\Delta_1\Delta_2 - |V_1|^2 - |V_2|^2)K - \Delta_1|V_2|^2 - \Delta_2|V_1|^2 = 0. \quad (11)$$

令(11)式的三个根为 K_i ($i=1, 2, 3$)。相应(10)式的解为 a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, 3$)。 H' 的本征矢为

$$|\psi_i\rangle = a_i|1_R\rangle + b_i|n_R\rangle + c_i|2_R\rangle. \quad (i=1, 2, 3) \quad (12)$$

由(10)式和归一化条件

$$|a_i|^2 + |b_i|^2 + |c_i|^2 = 1. \quad (13)$$

a_i, b_i 和 c_i 可以决定。它们构成一个么正矩阵 U 。因此(12)式可以写成矩阵的形式。

* $|1_R\rangle = R|1\rangle$, 其中 $(I=1, n, 2)$ 。

$$\begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ |\psi_3\rangle \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} |1_R\rangle \\ |n_R\rangle \\ |2_R\rangle \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}; \quad (14)$$

或者写成逆矩阵形式

$$\begin{pmatrix} |1_R\rangle \\ |n_R\rangle \\ |2_R\rangle \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ |\psi_3\rangle \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

同时也有

$$UH'U^{-1} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

(15)式可写成

$$\left. \begin{aligned} |1_R\rangle &= a'_1 |\psi_1\rangle + a'_2 |\psi_2\rangle + a'_3 |\psi_3\rangle, \\ |n_R\rangle &= b'_1 |\psi_1\rangle + b'_2 |\psi_2\rangle + b'_3 |\psi_3\rangle, \\ |2_R\rangle &= c'_1 |\psi_1\rangle + c'_2 |\psi_2\rangle + c'_3 |\psi_3\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

二、原子的感应极化

假定初始原子在激发态 $|1\rangle$, 在双转动坐标中 $|1_R\rangle$ 态。

$$|\Phi(0)\rangle = |1_R\rangle = a'_1 |\psi_1\rangle + a'_2 |\psi_2\rangle + a'_3 |\psi_3\rangle. \quad (18)$$

在时刻 t , 态矢量为

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle &= \exp(-iH't) |\Phi(0)\rangle \\ &= \exp(-iK_1 t) a'_1 |\psi_1\rangle + \exp(-iK_2 t) a'_2 |\psi_2\rangle + \exp(-iK_3 t) a'_3 |\psi_3\rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

将(12)式代入(19)式得

$$\left. \begin{aligned} |\Phi(t)\rangle &= A(t) |1_R\rangle + B(t) |n_R\rangle + C(t) |2_R\rangle, \\ A(t) &= a_1 a'_1 \exp(-iK_1 t) + a_2 a'_2 \exp(-iK_2 t) + a_3 a'_3 \exp(-iK_3 t) \\ &= A_1 \exp(-iK_1 t) + A_2 \exp(-iK_2 t) + A_3 \exp(-iK_3 t), \\ B(t) &= a'_1 b_1 \exp(-iK_1 t) + a'_2 b_2 \exp(-iK_2 t) + a'_3 b_3 \exp(-iK_3 t) \\ &= B_1 \exp(-iK_1 t) + B_2 \exp(-iK_2 t) + B_3 \exp(-iK_3 t), \\ C(t) &= a'_1 c_1 \exp(-iK_1 t) + a'_2 c_2 \exp(-iK_2 t) + a'_3 c_3 \exp(-iK_3 t) \\ &= C_1 \exp(-iK_1 t) + C_2 \exp(-iK_2 t) + C_3 \exp(-iK_3 t). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

在双转动坐标中极化算符为

$$\hat{p} = R \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1n} \\ 0 & 0 & p_{2n} \\ p_{n1} & p_{n2} & 0 \end{pmatrix} R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1n} \exp(i\Omega_1 t) \\ 0 & 0 & p_{2n} \exp(-i\Omega_2 t) \\ p_{n1} \exp(-i\Omega_1 t) & p_{n2} \exp(i\Omega_2 t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

因此原子的极化为

$$\begin{aligned}
P(t) &= \langle \Phi(t) | \hat{p} | \Phi(t) \rangle \\
&= \langle \Phi(t) | 1_R \rangle \langle n_R | \Phi(t) \rangle p_{1n} \exp(i\Omega_1 t) \\
&\quad + \langle \Phi(t) | 2_R \rangle \langle n_R | \Phi(t) \rangle p_{2n} \exp(-i\Omega_2 t) + c.c.
\end{aligned} \tag{22}$$

将(20)式代入(22)式得

$$\begin{aligned}
P(t) &= p_{n1} \{ (A_1 B_1^* + A_2 B_2^* + A_3 B_3^*) + A_1 B_2^* \exp[-i(K_1 - K_2)t] \\
&\quad + A_1 B_3^* \exp[-i(K_1 - K_3)t] + A_2 B_1^* \exp[i(K_1 - K_2)t] \\
&\quad + A_2 B_3^* \exp[-i(K_2 - K_3)t] + A_3 B_1^* \exp[i(K_1 - K_3)t] \\
&\quad + A_3 B_2^* \exp[i(K_2 - K_3)t] \} \exp(-i\Omega_1 t) \\
&\quad + p_{2n} \{ (B_1 C_1^* + B_2 C_2^* + B_3 C_3^*) + B_1 C_2^* \exp[-i(K_1 - K_2)t] \\
&\quad + B_1 C_3^* \exp[-i(K_1 - K_3)t] + B_2 C_1^* \exp[i(K_1 - K_2)t] \\
&\quad + B_2 C_3^* \exp[-i(K_2 - K_3)t] + B_3 C_1^* \exp[i(K_1 - K_3)t] \\
&\quad + B_3 C_2^* \exp[i(K_2 - K_3)t] \} \exp(-i\Omega_2 t) + c.c.
\end{aligned} \tag{23}$$

说明原子的极化有14个分量,以 Ω_1 (和 Ω_2)在中间,每一侧各有三个。各分量的强度是不一样的,并且中间分量并不一定是最大的,其中的 A_i, B_i 和 C_i 可从 a_i, b_i 和 c_i 以及 a'_i, b'_i 和 c'_i 求得。也可从另一方法获得。由于 a_i, b_i 和 c_i 是(10)式的解,因此 A_i, B_i 和 C_i 也是(10)式的解。由初条件(18)式可得

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1, \quad B_1 + B_2 + B_3 = 0, \quad C_1 + C_2 + C_3 = 0. \tag{24}$$

由(10)式和(24)式可得

$$\left. \begin{aligned}
A_1 &= \frac{-|V_1|^2(K_1 + \Delta_1)}{(K_1 + \Delta_1)(K_1 - K_2)(K_3 - K_1)}, \quad B_1 = \frac{-V_1^*(K_1 + \Delta_1)}{(K_1 - K_2)(K_3 - K_1)}, \\
C_1 &= \frac{-V_1^* V_2^*}{(K_1 - K_2)(K_3 - K_1)},
\end{aligned} \right\} \tag{25}$$

$$\left. \begin{aligned}
A_2 &= \frac{-|V_1|^2(K_2 + \Delta_1)}{(K_2 + \Delta_1)(K_1 - K_2)(K_2 - K_3)}, \quad B_2 = \frac{-V_1^*(K_2 + \Delta_1)}{(K_1 - K_2)(K_2 - K_3)}, \\
C_2 &= \frac{-V_1^* V_2^*}{(K_1 - K_2)(K_2 - K_3)},
\end{aligned} \right\} \tag{26}$$

$$\left. \begin{aligned}
A_3 &= \frac{-|V_1|^2(K_3 + \Delta_1)}{(K_3 + \Delta_1)(K_1 - K_3)(K_3 - K_1)}, \quad B_3 = \frac{-V_1^*(K_3 + \Delta_1)}{(K_2 - K_3)(K_3 - K_1)}, \\
C_3 &= \frac{-V_1^* V_2^*}{(K_2 - K_3)(K_3 - K_1)},
\end{aligned} \right\} \tag{27}$$

其中 K_i 不等于 $-\Delta_1$ 。

在双光子共振情况下, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$, (11)式的三个根为

$$K_1 = -\Delta, \quad K_2 = -\frac{\Delta}{2} - \mu, \quad K_3 = -\frac{\Delta}{2} + \mu, \quad \mu = \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + |V_1|^2 + |V_2|^2}. \tag{28}$$

于是(25)式改变为如下形式:

$$A_1 = \frac{|V_2|^2}{|V_1|^2 + |V_2|^2}, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = \frac{-V_1^* V_2^*}{|V_1|^2 + |V_2|^2}, \tag{29}$$

而(26)和(27)式仍然成立。

三、极化分量的位置和强度

极化分量共有 14 个, 它们的位置分别为 Ω_i ,

$$\Omega_i \pm (K_1 - K_2), \Omega_i \pm (K_1 - K_3), \Omega_i \pm (K_2 - K_3). \quad (i=1, 2)$$

表 1 列出在近共振情况下 [$k=(\Delta_2/\Delta_1)=1.05$], 不同光强下这 14 个分量的相对强度。从表 1 中可看到随光强 [$z_i=(V_i/\Delta_i)$] 增加, Ω_i 分量的相对强度下降, 而其它分量一般增加。在表 2 中列出固定 z_i 情况下, 不同双光子偏调时, 原子极化中的主要分量的位置和相对强度。从表 2 中可知最强的分量是在原子跃迁频率 ω_{1i} 附近。越接近双光子共振, 相对强度大的分量数增加。

Table 1 The relative strengths of the components in the polarization under different intensities of the light fields

Z_1	Ω_1	Ω_1+y_1	Ω_1+y_2	Ω_1+y_3	Ω_1-y_1	Ω_1-y_2	Ω_1-y_3	Ω_2	Ω_2+y_1	Ω_2+y_2	Ω_2+y_3	Ω_2-y_1	Ω_2-y_2	Ω_2-y_3
0.04	0.99	0	0	0	0	1	0.01	0.016	0.015	0.016	0	0	0	0.015
0.10	0.93	0	0	0	0	1	0.06	0.10	0.11	0.11	0	0	0	0.10
0.20	0.64	0	0	0	0	1	0.46	0.08	0.58	0.60	0.27	0	0	0.31
10.0	0.06	0.94	0	0	1	0.44	0.44	0	0.50	0.94	0.94	0.22	0	0

$$y_1=K_2-K_1, \quad y_2=K_3-K_1, \quad y_3=K_3-K_2.$$

Table 2 The frequencies and the relative strengths of the main components in the polarization under different two-photon detunings

K	ω_{1n}	Ω_1	$\Omega_1+0.20\Delta_1$	Ω_2	ω_{n2}	$\omega_{n2}-0.17\Delta_1$	$\Omega_2+0.20\Delta_1$
1.2	$\omega_{1n}-0.027\Delta_1$	Ω_1	$\Omega_1+0.20\Delta_1$	Ω_2	$\omega_{n2}+0.026\Delta_1$	$\omega_{n2}-0.17\Delta_1$	$\Omega_2+0.20\Delta_1$
	1	0.95	0.04	0.05	0.04	0.05	0.04
1.1	$\omega_{1n}-0.26\Delta_1$	Ω_1	$\Omega_1+0.10\Delta_1$	Ω_2	$\omega_{n2}+0.027\Delta_1$	$\omega_{n2}-0.07\Delta_1$	$\Omega_2+0.10\Delta_1$
	1	0.90	0.09	0.09	0.09	0.10	0.08
1.05	$\omega_{1n}-0.27\Delta_1$	Ω_1	$\Omega_1+0.05\Delta_1$	Ω_2	$\omega_{n2}+0.03\Delta_1$	$\omega_{n2}-0.02\Delta_1$	$\Omega_2+0.05\Delta_1$
	1	0.80	0.20	0.12	0.18	0.19	0.15
1.01	$\omega_{1n}-0.022\Delta_1$	Ω_1	$\Omega_1+0.02\Delta_1$	Ω_2	$\omega_{n2}+0.03\Delta_1$	$\omega_{n2}-0.01\Delta_1$	$\Omega_2+0.02\Delta_1$
	1	0.54	0.63	0.24	0.60	0.62	0.17

最后讨论双光子共振和近双光子共振二种特殊情况:

1. 双光子共振且 $|V_i/\Delta_i| \ll 1$

在这样条件下, (29)、(26) 和 (27) 化简为

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{|z_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}, & A_2 &= \frac{|z_1|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2} - |z_1|^2, & A_3 &= |z_1|^2, \\ B_1 &= 0, & B_2 &= -z_1^*, & B_3 &= z_1^*, \\ C_1 &= \frac{-z_1^* z_2^*}{|z_1|^2 + |z_2|^2}, & C_2 &= \frac{z_1^* z_2^*}{|z_1|^2 + |z_2|^2} - z_1^* z_2^*, & C_3 &= z_1^* z_2^*, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

式中 $z_i=(V_i/\Delta_i)$ 。当 $z_1=0.01$, $z_2=2z_1$ 时极化各分量的相对强度和位置分别为

$$\begin{aligned} \Omega_1 &: 0.25, \Omega_1 + \Delta(z_1^2 + z_2^2) : 1, \\ \omega_{1n} - \Delta(z_1^2 + z_2^2) &: 1, \omega_{1n} - 2\Delta(z_1^2 + z_2^2) : 0.25, \Omega_2 : 1, \\ \Omega_2 - \Delta(z_1^2 + z_2^2) &: 0.5, \omega_{2n} + \Delta(z_1^2 + z_2^2) : 0.50, \Omega_2 + 2\Delta(z_1^2 + z_2^2) : 1. \end{aligned}$$

2. 双光子近共振 [$(\Delta_2/\Delta_1) - 1 \ll 1$], 且 $|V_i/\Delta_i| \ll 1$

在这样条件下, (25)、(26) 和 (27) 式可化简为

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1 - z_1^2, & A_2 &= \frac{z_1^2 z_2^2}{(k-1)^2}, & A_3 &= z_1^2, \\ B_1 &= -z_1^* \left(1 - 2z_1^* - kz_2^2 - \frac{k}{k-1} z_2^2 \right), & B_2 &= -\frac{z_1^* z_2^2}{k-1}, & B_3 &= z_1^* (1 - z_2^2 - 2z_1^2 - kz_2^2), \\ C_1 &= -\frac{k}{k-1} z_1^* z_2^*, & C_2 &= \frac{z_1^* z_2^*}{k-1}, & C_3 &= z_1^* z_2^*, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

式中 $k = (\Delta_2/\Delta_1)$ 。当 $k = 1.01$, $z_1 = 0.01$, $z_2 = 2z_1$ 时, 极化各分量的相对强度和位置分别为 $\Omega_1 : 0.93$, $\omega_{1n} + (1 + z_2^2)\Delta_2 + z_1^2\Delta_1 : 0.45$, $\omega_{1n} - 2z_1^2\Delta_1 - z_2^2\Delta_2 : 1$, $\Omega_2 : 0.19$, $\omega_{2n} - (1 + z_1^2)\Delta_1 - z_2^2\Delta_2 : 16$, $\omega_{2n} - z_1^2\Delta_1 - 2z_2^2\Delta_2 : 0.16$, $\Omega_2 + (1 + z_1^2)\Delta_1 - z_2^2\Delta_2 : 0.17$ 。这就说明最强分量不是 Ω_i 分量, 而是位置在 $\omega_{1n} - 2z_1^2\Delta_1 - z_2^2\Delta_2$ 的分量, 即在激发态与中间态跃迁频率附近的分量。在能级跃迁频率附近有好几个相对强度较大的分量。从上可看到, 在双频场作用下三能级原子的极化不仅携带了双频带的信息, 而且还携带了原子本身的信息。

参 考 文 献

- [1] G. S. Agarwal *et al.*; *J. Phys. (B)*, 1979, **12**, No. 16 (Aug), 2655~2671.
- [2] R. Salomaa; *J. Phys. (B)*, 1977, **10**, No. 15 (Aug), 3005~3021.
- [3] D. Grischkowsky *et al.*; *Phys. Rev. (A)*, 1975, **12**, No. 6 (Jun), 2514~2533.
- [4] L. M. Narducci *et al.*; *Phys. Rev. (A)*, 1977, **16**, No. 4 (Apr), 1665~1672.
- [5] L. Kancheva *et al.*; *J. Phys. (B)*, 1981, **14**, No. 2 (Jan), 573~583.
- [6] S. Y. Chu *et al.*; *Phys. Rev. (A)*, 1982, **25**, No. 6 (Jun), 3169~3186.

Induced polarization of a cascade-type three-level atom

ZHU SHIYAO AND ZHOU LICHONG

(Department of Applied Physics,
Shanghai Jiaotong University)

MA AIQUN

(Department of Applied Physics,
Harbin Institute of Technology)

(Received 30 December 1986)

Abstract

The induced polarization of a cascade-type threelevel atom interacting with two light fields is studied using semiclassical method. Using eigenfunction and eigenvalues, the wavefunction of the atom at arbitrary time and the formula for polarization are obtained. The spectral distribution and relative strength of the polarization are calculated.

Key words: three-level atom; induced polarization; two-photon resonance.