

# 单模光纤的磁光效应

陈锡坤 宗伟勇  
(上海科技大学物理系)

## 提 要

本文利用琼斯(Janes)矩阵叙述了单模光纤磁光效应的理论,导出了既具有双折射又具有法拉第效应的琼斯矩阵形式,并利用 Mueller 矩阵导出电流传感器系统输出光强与法拉第旋转角之间的关系。  
关键词: 光纤磁光效应, 矩阵运算。

## 一、引 言

由于单模光纤既具有双折射的性质又具有法拉第效应,因此研究偏振光在单模光纤中的传播就比较复杂。人们用沿光纤轴线强扭<sup>[1]</sup>或改变光纤绕圈平面<sup>[2]</sup>的方法来补偿双折射对偏振面旋转的影响。本文在假设光纤由于应力的影响所产生的双折射相当于非吸收晶体的双折射近似下,计算单模光纤的磁光效应。

纵向磁场作用下,光纤中所传输的偏振光的偏振面旋转角  $F$  为

$$F = V \int_l H \cdot dl, \quad (1)$$

式中  $V$  是光纤材料的 Verdet 常数,  $H$  是磁场,  $l$  是磁场作用下的光纤长度。光纤的法拉第旋转性质用琼斯矩阵记为

$$J_F = \begin{pmatrix} \cos F & -\sin F \\ \sin F & \cos F \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其光路如图 1 所示。当两偏振器的透射轴之间的夹角为  $\theta$  时,系统输出光强<sup>[3]</sup>

$$I = I_0 \cos^2(\theta - F), \quad (3)$$

式中  $I_0$  为进入光纤的光强,当  $\theta = 45^\circ$  时, (3) 式化简成

$$I = (I_0/2) (1 + \sin 2F)。 \quad (4)$$

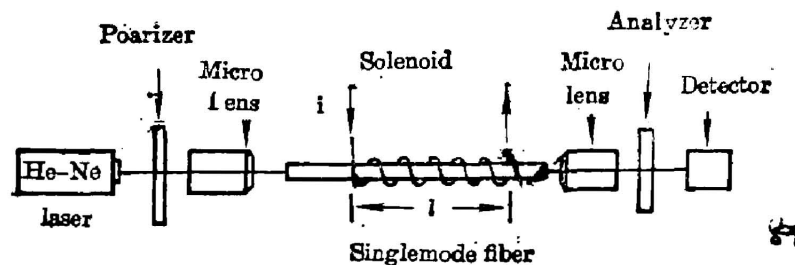


Fig. 1

• 另一方面, 由于光纤几何尺寸的不对称及应力的影响等所产生的双折射, 使单模光纤对不同取向偏振光呈现不同的折射率(即传播速度不同)。设光纤截面内有二个相互垂直的、分别以  $n_1$  和  $n_2$  表示快慢轴方向的折射率, 且把  $x$  和  $y$  坐标取在这二个特殊方向, 以琼斯矩阵表示光纤的这种相延性质

$$J_s = \begin{pmatrix} \exp(i\delta/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\delta/2) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

(5)式中  $\delta = (2\pi/\lambda)(n_2 - n_1)l$  为光通过光纤  $l$  后快慢轴方向的相对相移。

显然, 光纤在磁场中的传光性质应是以上二个效应的合效果, 即同时有偏振方向的旋转和不同偏振方向的相移。对同一段有限长度的光纤来说, 这个合效果不是两个琼斯矩阵的简单相乘, 不能将光纤的磁光效应简单地看成先偏振面旋转(不存在相移)后相移(不存在法拉第效应)或反之, 而且它们是不对易的,  $J_s J_F \neq J_F J_s$ , 实际上光纤中存在的这两种效应是微分效应。

## 二、理论计算

考虑长度为  $l$  的光纤中的一无穷小段的情形。设  $\delta_s$  为单位光纤长度  $x, y$  方向的相对位相延迟,  $F_s$  为单位光纤长度的法拉第旋转角, 则对于无穷小的  $dl$ ,

$$J_s = \begin{pmatrix} \exp(i\delta_s dl/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\delta_s dl/2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 + (i\delta_s dl/2) & 0 \\ 0 & 1 - (i\delta_s dl/2) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$J_F = \begin{pmatrix} \cos(F_s dl) & -\sin(F_s dl) \\ \sin(F_s dl) & \cos(F_s dl) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -F_s dl \\ F_s dl & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

(6)和(7)式中只计及一阶小量。这样

$$J_s J_F \approx \begin{pmatrix} 1 + (i\delta_s dl/2) & -F_s dl \\ F_s dl & 1 - (i\delta_s dl/2) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

在这里  $J_s J_F = J_F J_s$ , 说明对于无穷小  $dl$  两种效应对易的。(8)式即是无穷小  $dl$  光纤在纵向磁场下的琼斯矩阵。当偏振光通过  $dl$  光纤后, 场变为

$$\begin{pmatrix} E_x(l+dl) \\ E_y(l+dl) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (i\delta_s dl/2) & -F_s dl \\ F_s dl & 1 - (i\delta_s dl/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x(l) \\ E_y(l) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$x, y$  仍取在快慢轴方向。(9)式可改写成

$$\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} E_x(l) \\ E_y(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i\delta_s/2) & -F_s \\ F_s & (-i\delta_s/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x(l) \\ E_y(l) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

即

$$\frac{d\mathbf{E}}{dl} = J_s \mathbf{E}, \quad J_s = \begin{pmatrix} (i\delta_s/2) & -F_s \\ F_s & (-i\delta_s/2) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

(11)式的形式解为

$$\mathbf{E}(l) = \exp(J_s l) \mathbf{A} = \exp(J) \mathbf{A}, \quad J = \begin{pmatrix} (i\delta_s l/2) & -F_s l \\ F_s l & (-i\delta_s l/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i\delta/2) & -F \\ F & (-i\delta/2) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

$\delta$ 、 $F$  分别是长度为  $l$  的光纤中的总相对位相延迟和总法拉第旋转角。代入边界条件  $E(0) = E_0$ , (12) 式化简为

$$E(l) = e^J E_0, \quad (13)$$

显然  $e^J$  即为长度为  $l$  的单模光纤在纵向磁场中的琼斯矩阵。

设  $f(\lambda)$  为  $J$  的特征多项式, 由于  $J$  是二阶矩阵, 所以  $f(\lambda)$  是二次的。则

$$e^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \alpha + \beta\lambda + f(\lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} \approx \alpha + \beta\lambda, \quad (14)$$

式中  $\lambda$  为  $J$  的特征根, 又由于  $f(J) = 0^{[4]}$ , 故

$$e^J = \alpha + \beta J. \quad (15)$$

(14) 和 (15) 式具有相同的代数关系。由下式可求  $J$  的特征根

$$\begin{vmatrix} \lambda - (i\delta/2) & -F \\ F & \lambda + (i\delta/2) \end{vmatrix} = 0, \quad (16)$$

解 (16) 式得

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \pm i(\phi/2), \\ (\phi/2)^2 &= (\delta/2)^2 + F^2, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

把 (17) 式代入 (14) 式得

$$\exp(i\phi/2) = \alpha + (i\beta\phi/2), \quad \exp(-i\phi/2) = \alpha - i(\beta\phi/2). \quad (18)$$

由 (18) 式可得

$$\alpha = \cos(\phi/2), \quad \beta = (2/\phi) \sin(\phi/2). \quad (19)$$

这样 (15) 式化成

$$\begin{aligned} e^J &= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \left(\frac{2}{\phi} \sin\frac{\phi}{2}\right) J \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi/2) + i \cos x \sin(\phi/2) & -\sin x \sin(\phi/2) \\ \sin x \sin(\phi/2) & \cos(\phi/2) - i \cos x \sin(\phi/2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

(20) 式就是既具有法拉第效应又具有双折射的单模光纤的琼斯矩阵。

### 三、应 用

利用单模光纤的磁光效应来测量电流的工作已有很多报道<sup>[5,6]</sup>。在这里为直接给出电流测量系统出射光强与法拉第旋转角的关系式, 由 Mueller 矩阵与琼斯矩阵的关系<sup>[7,8]</sup>, 可把 (20) 式的琼斯矩阵转换成如下的 Mueller 矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \cos^2(\phi/2) + \sin^2(\phi/2) \cos 2x, & a_2 &= -\sin x \sin \phi, & a_3 &= -\sin^2(\phi/2) \sin 2x, \\ b_1 &= \sin x \sin \phi, & b_2 &= \cos \phi, & b_3 &= \cos x \sin \phi, \\ d_1 &= -\sin^2(\phi/2) \sin 2x, & d_2 &= -\cos x \sin \phi, & d_3 &= \cos^2(\phi/2) - \sin^2(\phi/2) \cos 2x, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

假定进入光纤的光在  $x$  方向偏振, 可通过如图 1 中在未加磁场时调节起偏器来实现, 其归一化的斯塔克参量为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

当在图 1 中输出端的显微透镜与检偏器之间加一个  $1/4$  波片后, 则单模光纤磁光效应的整个系统出射光的斯塔克参量为

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -c_2 & -s_2 & 0 \\ -c_2 & c_2^2 & c_2 s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 s_2 & s_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 & c_2 s_2 & s_2 \\ 0 & c_2 s_2 & s_2^2 & -c_2 \\ 0 & -s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

(23) 式右边第四个列阵就是图 1 中透射轴在  $x$  方向的偏振器所产生的线偏振光的归一化斯塔克参量列阵; 右边第三个矩阵就是 (21) 式, 它代表图 1 中光纤的磁光效应性质的 Mueller 矩阵; 右边第二个矩阵是快轴在光纤双折射所引起的椭圆长轴方向的  $1/4$  波片 Mueller 矩阵<sup>[9]</sup>, 它位于图 1 中检偏器之前(图 1 中未画出), 其作用是把光纤出射的椭圆偏振光转换成线偏振光; 右边第一个矩阵是透射轴在  $1/4$  波片出射线偏振光消光位置上的检偏器 Mueller 矩阵<sup>[9]</sup>, 它代表图 1 中检偏器的性质。其中  $s_2 = \sin 2\theta_0$ ,  $c_2 = \cos 2\theta_0$ ,  $\theta_0$  是未加磁场时光纤双折射产生的方位角。由 (23) 式可导出系统出射光强信号  $s_0$  与法拉第旋转角  $F$  的关系式

$$s_0 \approx \frac{1}{2} \{1 - c_2 [\cos^2(\phi/2) + \sin^2(\phi/2) \cos 2\alpha] - s_2 \sin \alpha \sin \phi\} \quad (24)$$

对于 (24) 式, 当系统只存在法拉第旋转而无双折射时,  $\delta = 0$ ,  $\theta_0 = 0$ , 所以  $\alpha = \pm(\pi/2)$ ,  $s_2 = 0$ ,  $c_2 = 1$ 。这时

$$s_0 = \frac{1}{2} [1 - (\cos^2 F - \sin^2 F)] = \sin^2 F \quad (25)$$

当两偏振器的透射轴成  $45^\circ$  夹角时, 就得到类似于 (4) 式的形式。

#### 四、结 束 语

在单模光纤中伴有双折射的法拉第旋转, 可用 (20) 式的琼斯矩阵近似地表示光纤的这种性质, 在对光纤的磁光效应的实际计算中, 可把在纵向磁场作用下的单模光纤看作具有这个琼斯矩阵的光学元件, 这样使问题大为简化。由这个琼斯矩阵出发, 组成对磁场(电流)测量的计算方法。

## 参 考 文 献

- [1] S. C. Rashleigh, R. Ulrich; *Appl. Phys. Lett.*, 1979, **34**, No. 11 (Jun), 768~770.
- [2] H. Schneider *et al.*; *Appl. Opt.*, 1978, **17**, No. 19 (Oct), 3035~3037.
- [3] A. J. Rogers; *Proc. IEE*, 1973, **120**, No. 2 (Feb), 261.
- [4] 谢邦杰;《线性代数》, (人民教育出版社, 北京, 1978), 166.
- [5] A. Papp, H. Aarms; *Appl. Opt.*, 1980, **19**, No. 22 (Nov), 3729~3734.
- [6] G. W. Day *et al.*; *Opt. Lett.*, 1982, **7**, No. 5 (May), 238~240.
- [7] M. Takenaka; *Japan. J. Appl. Phys.*, 1973, **13**, No. 2 (Feb), 226~231.
- [8] W. H. McMaster; *Rev. Mod. Phys.*, 1961, **33**, No. 1 (Jan), 8~28.
- [9] H. Takasaki *et al.*; *Appl. Opt.*, 1964, **3**, No. 7 (Jul), 833~837.

## The magneto-optic effect of single-mode fibers

CHEN XIKUN AND ZONG WEIYONG

(Department of Physics, Shanghai University of Science & Technology)

(Received 30 March 1987; revised 2 August 1987)

### Abstract

In investigating the polarization property and magneto-optic effect of single-mode fiber, we need to consider not only its Faraday effect but also its birefringence. In this paper, the theory of the magneto-optic effect of the single-mode fiber is described with the Jones matrix. The Jones matrix expressing the birefringence and magneto-optic effect of the single-mode fiber is derived. And the relation between the output light intensity and Faraday rotation angle of current sensor system is presented using Mueller matrix.

**Key words:** magneto-optic effect; Jones matrix; Mueller matrix.