第8卷 第3期　　光 学 学 报　　Vol. 8, No. 3
1988年3月　　ACTA OPTICA SINICA　　March, 1988

激光在不均匀随机媒质中的传播——多重散射的m-n阶矩方程的解*

王 贞 松
(中国科学院电子学研究所)

提 要

本文给出了受到多重散射的激光，在波传播方向上的物理参数的涨落是不均匀的、而垂直于传播方向上的物理参数的涨落又是均匀的随机媒质中传播时，当波受到前向小角度散射时，具有不同波数不同位置的场的矩方程的解析解。同时讨论了方程的解在激光传播研究中的一些应用。

关键词：光波传播；不均匀随机媒质。

一、引 言

当光波在垂直地面方向传播时，或者在不均匀地面上空水平地传播时，应该把大气考虑为不均匀随机媒质。当光波在随机媒质中传播的距离较长时，一定要考虑媒质对光波的多重散射效应。研究多重散射下光波的传播时，Rytov 近似与 Born 近似方法都不适用[1]。由于光波波长的量度较大气中不均匀体的尺度小得多，所以不均匀媒质对光波的散射主要是前向小角度散射，而且可以忽略垂直于波传播方向的媒质物理参数涨落的不均匀性。考虑到沿波传播方向上，媒质物理参数的涨落是不均匀的，因此，前向散射相干光波的矩方程可用来研究光波在传播中的一些问题。例如，二阶矩方程的解可用于研究相干光波的涨落。双频二阶矩方程的解与四阶矩方程的解的时间矩，可用来研究光脉冲的传播问题，例如脉冲加宽与平均到达时间等问题。激光在传播方向上不均匀随机媒质中传播时，相干光波的矩方程已由 Mitsuo Tateiba 给出如下[2]:

不均匀随机媒质可由下列物理参数来描述:

$$\varepsilon=\varepsilon_0[1+\delta\varepsilon(\boldsymbol{r},\ Z)],\ \mu=\mu_0,\ \sigma=0。$$

这里 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$, ε_0 和 μ_0 都是常数，ε 是介电常数，μ 是导磁系数，σ 是电导率，$\delta\varepsilon(\boldsymbol{r},\ Z)$ 是高斯随机函数。

$$\langle\delta\varepsilon(\boldsymbol{r},\ Z)\rangle=0,$$

$$\langle\delta\varepsilon(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}',\ z+z')\delta\varepsilon(\boldsymbol{r}',\ Z')\rangle=B\left(\boldsymbol{r},\ \frac{Z}{2}+Z',Z\right)。\tag{1}$$

这里 B 是相关函数。如果 $u(\boldsymbol{r},\ z,\ \omega_a)$ 是一个沿 z 方向传播的光波，如图1所示，则 $u(\boldsymbol{r}, Z, \omega_a)$ 的 $m-n$ 阶矩被定义为:

收稿日期：1986年8月12日；收到修改稿日期：1986年12月2日

* 中国科学院科研基金资助的项目。

$$\Gamma_{mn}(Z,\omega_a)=\left\langle\prod_{l=1}^{m}u(s_l,Z,\omega_{2l-1})\prod_{j=1}^{n}u^*(t_j,Z,\omega_{2j})\right\rangle。\tag{2}$$

这里 $\omega_a=(\omega_1,\omega_3,\cdots,\omega_{2m-1},\omega_2,\omega_4,\cdots,\omega_{2n})$，$s_l$，$t_j$ 是在垂直于波传播方向平面内的二维矢径，u^* 是 u 的复共轭量。媒质如满足以下条件：在任意 Z 处有，$B(O,Z,O)\ll1$，$k_al(Z)\gg1$，其中 k_a 是波数，$k_a=\omega_a(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$，$l(Z)$ 定义为

$$l^2(Z)=n_0B(O,Z,O)/[-\nabla_r^2B(O,Z,O)],\tag{3}$$

其中 $\nabla_r^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$，$n_0$ 是量级为 1 的正数。则在不均匀随机媒质中，多点多频的 $m-n$ 阶矩方程为：

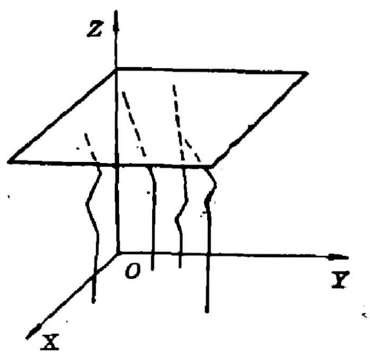

Fig. 1　The sketch of the wave which was scattered different times in the medium arrived the plane at Z perpendicular to the Z axis

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial z}-i\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{\nabla_{s_l}^2}{2k_{2l-1}}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\nabla_{t_j}^2}{2k_{2j}}\right)-i\left(\sum_{l=1}^{m}k_{2l-1}-\sum_{j=1}^{n}k_{2j}\right)\right]\\&\times\Gamma_{mn}(Z,\omega_a)\\&=-\left\{\frac{1}{4}\int_0^Z dZ'\left[\left(\sum_{l=1}^{m}k_{2l-1}-\sum_{j=1}^{n}k_{2j}\right)^2B\left(O,Z-\frac{Z'}{2},Z'\right)\right.\right.\\&+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k_{2l-1}k_{2j}D\left(s_l-t_j,\ Z-\frac{Z'}{2},Z'\right)-\sum_{l=1}^{m}\sum_{p>l}^{m}k_{2l-1}k_{2p-1}D\left(s_l-s_p,\ Z-\frac{Z'}{2},Z'\right)\\&\left.\left.-\sum_{q=1}^{n}\sum_{j>q}^{n}k_{2q}k_{2j}D\left(t_q-t_j,\ Z-\frac{Z'}{2},Z'\right)\right]\right\}\Gamma_{mn}(Z,\omega_a)。\end{aligned}\tag{4}$$

$$\Gamma_{mn}(O,\omega_a)=\Gamma_{mn}^{in}(O,\omega_a)\equiv\prod_{l=1}^{m}u_{in}(s_l,O,\omega_{2l-1})\prod_{j=1}^{n}u_{in}^*(t_j,O,\omega_{2j})。\tag{5}$$

这里结构函数

$$D(r,z_1,z_2)=2[B(O,Z_1,Z_2)-B(r,Z_1,Z_2)]。\tag{6}$$

但到目前为止，四阶矩及更高阶矩(在不同地点有不同波数方程的一般形式)的解析解被认为是难于给出的。本文将用格林函数方法导出不均匀随机媒质中 $m-n$ 阶矩方程的一般形式的解析解。对方程的解进行一些讨论，应用于光波在不均匀随机媒质中传播的一些问题。

二、不均匀随机媒质中 $m-n$ 阶矩方程的解

我们用格林函数方法来求不均匀随机媒质中 $m-n$ 阶矩方程(4)的柯西问题的解。

对线性算子 L：

$$L=\frac{\partial}{\partial Z}-a_1^2\nabla_1^2-a_2^2\nabla_2^2-\cdots-a_N^2\nabla_N^2。\tag{7}$$

这里 $\nabla_j^2=\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$，$a_1^2\cdots a_N^2$ 是可以为复数的常数。我们可以有如下格林函数[3]。

$$\begin{cases}L_G^1(Z,r_1\cdots r_N/Z',r_1'\cdots r_N')=\delta(Z-Z')\delta(r_1-r_1')\cdots\delta(r_N-r_N'),\ (Z>Z');\\G^1(O,r_1\cdots r_N)=0\end{cases}\tag{8}$$

$$G^1(Z,r_1\cdots r_N/Z',r_1'\cdots r_N')=\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2a_j\sqrt{\pi(Z-Z')}}\right)^2\exp\left[-\sum_{j=1}^{N}\frac{(r_j-r_j')^2}{4a_j^2(Z-Z')}\right],\ (Z>Z'),\tag{9}$$

和

$$\begin{cases} LG^{\text{II}}(Z, \boldsymbol{r}_1\cdots\boldsymbol{r}_N/O,\ \boldsymbol{r}'_1\cdots\boldsymbol{r}'_N)=0; \\ G^{\text{II}}(O,\ \boldsymbol{r}_1\cdots\boldsymbol{r}_N/O,\ \boldsymbol{r}'_1\cdots\boldsymbol{r}'_N)=\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}'_1)\cdots\delta(\boldsymbol{r}_N-\boldsymbol{r}'_N), \end{cases} \tag{10}$$

$$G^{\text{II}}(Z,\ \boldsymbol{r}_1\cdots\boldsymbol{r}_N/O,\ \boldsymbol{r}'_1\cdots\boldsymbol{r}'_N)=\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2a_j\sqrt{\pi Z}}\right)^2\exp\left[-\sum_{j=1}^{N}\frac{(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}'_j)^2}{4a_j^2 Z}\right],\ (Z>0), \tag{11}$$

这里 $\boldsymbol{r}_1,\ \cdots,\boldsymbol{r}_N$ 是横向二维矢径。

应用格林函数,方程(4)在初始条件(5)下可变为下列积分方程:

$$\begin{aligned} \Gamma_{mn}=&(-1)^m\left(\frac{i}{2\pi Z}\right)^{m+n}\prod_{l=1}^{m}k_{2l-1}\prod_{j=1}^{n}k_{2j}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_{mn}(O,\ \boldsymbol{s}'_1\cdots\boldsymbol{s}'_m,\ \boldsymbol{t}'_1\cdots\boldsymbol{t}'_n,\ \omega_a) \\ &\times\exp\left[\sum_{l=1}^{m}ik_{2l-1}\frac{(\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{s}'_l)^2}{2Z}-\sum_{j=1}^{n}ik_{2j}\frac{(\boldsymbol{t}_j-\boldsymbol{t}'_j)^2}{2Z}\right]\prod_{l=1}^{m}d\boldsymbol{s}'_l\prod_{j=1}^{n}d\boldsymbol{t}'_j \\ &+\frac{(-1)^m}{4}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{m+n}\int_0^{Z}dZ'\int_{-\infty}^{\infty}A_{mn}\Gamma_{mn}\left(\frac{1}{ZZ'}\right)^{m+n}\prod_{l=1}^{m}k_{2l-1}\prod_{j=1}^{n}k_{2j} \\ &\times\exp\left[\sum_{l=1}^{m}ik_{2l-1}\frac{(\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{s}'_l)^2}{2(Z-Z')}-\sum_{j=1}^{n}ik_{2j}\frac{(\boldsymbol{t}_j-\boldsymbol{t}'_j)^2}{2(Z-Z')}\right]\prod_{l=1}^{m}d\boldsymbol{s}'_l\prod_{j=1}^{n}d\boldsymbol{t}'_j, \end{aligned} \tag{12}$$

式中:

$$\begin{aligned} A_{mn}=&4i\left(\sum_{l=1}^{m}k_{2l-1}-\sum_{j=1}^{n}k_{2j}\right)-\int_0^{Z'}dZ''\left[\left(\sum_{l=1}^{m}k_{2l-1}-\sum_{j=1}^{n}k_{2j}\right)^2B\left(O,\ Z'-\frac{Z''}{2},Z''\right)\right. \\ &+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k_{2l-1}k_{2j}D\left(\boldsymbol{s}'_l-\boldsymbol{t}'_j,Z'-\frac{Z''}{2},Z''\right)-\sum_{l=1}^{m}\sum_{p>l}^{m}k_{2l-1}k_{2p-1}D\left(\boldsymbol{s}'_l-\boldsymbol{s}'_p,Z'-\frac{Z''}{2},Z''\right) \\ &\left.-\sum_{q=1}^{n}\sum_{j>q}^{n}k_{2q}k_{2j}D\left(\boldsymbol{t}'_q-\boldsymbol{t}'_j,Z'-\frac{Z''}{2},Z''\right)\right]。 \end{aligned} \tag{13}$$

积分方程(12)是相干光波在不均匀连续随机媒质中传播时矩的积分方程，此方程与相干光被随机颗粒散射时的 Foldy-Twersky 积分方程[4] 十分相似，包括前向多重散射效应。积分方程(12)的解可写成:

$$\Gamma_{mn}=\sum_{p=0}^{\infty}\Gamma_{mn}^{(p)}。 \tag{14}$$

应用叠代法求得:

$$\begin{aligned} \Gamma_{mn}^{(0)}=&(-1)^m\left(\frac{i}{2\pi Z}\right)^{m+n}\prod_{l=1}^{m}k_{2l-1}\prod_{j=1}^{n}k_{2j}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_{mn}(O,\ \boldsymbol{s}'_1\cdots\boldsymbol{s}'_m,\ \boldsymbol{t}'_1\cdots\boldsymbol{t}'_N,\ \omega_a) \\ &\times\exp\sum_{l=1}^{m}ik_{2l-1}\frac{(\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{s}'_l)^2}{2Z}-\sum_{j=1}^{n}ik_{2j}\frac{(\boldsymbol{t}_j-\boldsymbol{t}'_j)^2}{2Z}\Bigg]\prod_{l=1}^{m}d\boldsymbol{s}'_l\prod_{j=1}^{n}d\boldsymbol{t}'_j, \end{aligned} \tag{15}$$

....

$$\begin{aligned} \Gamma_{mn}^{(p)}=&\frac{(-1)^m}{4}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{m+n}\prod_{l=1}^{m}k_{2l-1}\prod_{j=1}^{n}k_{2j}\int_0^{Z}dZ'\int_{-\infty}^{\infty}A_{mn}(Z',\ \boldsymbol{s}'_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{s}'_m,\ \boldsymbol{t}'_1,\ \cdots\boldsymbol{t}'_n,\ \omega_a) \\ &\times\Gamma_{mn}^{(p-1)}(Z',\ \boldsymbol{s}'_1\cdots,\ \boldsymbol{s}'_m,\ \boldsymbol{t}'_1\cdots,\ \boldsymbol{t}'_n,\ \omega_a)\left(\frac{1}{Z-Z'}\right)^{m+n} \\ &\times\exp\left[\sum_{l=1}^{m}ik_{2l-1}\frac{(\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{s}'_l)^2}{2(Z-Z')}-\sum_{j=1}^{n}ik_{2j}\frac{(\boldsymbol{t}_j-\boldsymbol{t}'_j)^2}{2(Z-Z')}\right]\prod_{l=1}^{m}d\boldsymbol{s}'_l\prod_{j=1}^{n}d\boldsymbol{t}'_j;\quad (p\geqslant 1), \end{aligned} \tag{16}$$

(16)式中 A_{mn} 由(13)式给出。显然 $\Gamma_{mn}^{(0)}$ 是 $Z=0$ 处的入射波的矩在 Z 处的距离效应，$\Gamma_{mn}^{(p)}$ 是经过 p 次散射的波对矩的贡献。 我们求得了在不均匀随机媒质中传播的光波的矩方程(4)在初始条件(5)下的解。 该解也可用 Uscinski 的接连散射方法求得[5]，两种方法得到的结

果完全一样。

当 $\Gamma_{mn}(O,\omega_a)$ 和 A_{mn} 在 A_{mn} 在垂直于波传播方向的平面上是二维矢径的缓变函数时，对高频波，可以用稳相法来计算(15)，(16)式中关于 s_i'，t_j' 的积分[10]，得：

$$\Gamma_{mn}^{(0)}=\Gamma_{mn}^{t_0}(O,\omega_a), \tag{15'}$$

....

$$\Gamma_{mn}^{(p)}=\left(\frac{1}{4}A_{mn}\right)^p\frac{Z^p}{p!}\Gamma_{mn}^{t_0}(O,\ \omega_a)。 \tag{16'}$$

由(15')、(16')和(14)，可以得方程(4)的渐近解：

$$\Gamma_{mn}=\Gamma_{mn}^{t_0}(O,\ \omega_a)\exp\left(\frac{1}{4}A_{mn}Z\right), \tag{17}$$

这一渐近解非常便于数值计算。

三、矩方程解的应用

矩方程的解在研究波在随机媒质中传播的问题，诸如光点跳动，波束展宽，脉冲展宽等等是很有用的。如果光脉冲的频谱为 $f(\omega)$，光波场可以表示为

$$U(\boldsymbol{r},\ Z,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)u_0(r,\ Z,\ \omega)\exp[-i(\omega t-kZ)]d\omega。 \tag{18}$$

在稳定随机媒质中，光强可表示为

$$\langle I\rangle=\langle uu^*\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i\Omega(t_1-t_2)d\Omega\Big[\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega_1)f^*(\omega_2)\langle u_0(Z,\ \boldsymbol{r},\ \omega_1)u_0^*(Z,\ \boldsymbol{r},\ \omega_2)\rangle$$

$$\times\exp(ik_1Z-ik_2Z)\,d\omega_2\Big]\Big|_{\omega_1=\omega_2=\Omega}。 \tag{19}$$

激光脉冲在随机媒质中传播，到达位置在 Z 的平面的平均时间 t_r 为[7]：

$$\langle t_r\rangle=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}t\langle I\rangle dt}{\int_{-\infty}^{\infty}\langle I\rangle dt}。 \tag{20}$$

激光脉冲的平均平方宽度为：

$$\langle\tau^2\rangle=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}t^2\langle I\rangle dt}{\int_{-\infty}^{\infty}\langle I\rangle dt}-\frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty}t\langle I\rangle dt\right]^2}{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\langle I\rangle dt\right]^2}。 \tag{21}$$

由(18)，(19)式，根据 Fourier 变换的理论有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\langle I\rangle dt=\int_{-\infty}^{\infty}[f(\omega_1)f^*(\omega_2)\langle u_0(\boldsymbol{r},\ Z,\ \omega_1)u_0^*(\boldsymbol{r},\ Z,\ \omega_2)\rangle]\big|_{\omega_1=\omega_2}d\omega_2, \tag{22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}t\langle I\rangle dt=-\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\omega_1}-iZ\frac{dk_1}{d\omega_1}\right)[f(\omega_1)f^*(\omega_2)\Gamma_{11}(\omega_1,\ \omega_2)]\right\}\Big|_{\omega_1=\omega_2}d\omega_2, \tag{23}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^2\langle I\rangle dt=-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\omega_1}-iZ\frac{dk_1}{d\omega_1}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial\omega_1}-iZ\frac{dk_1}{d\omega_1}\right)[f(\omega_1)f^*(\omega_2)\Gamma_{11}(\omega_1,\ \omega_2)]\right\}\Big|_{\omega_1=\omega_2}d\omega_2。 \tag{24}$$

这样，已知激光脉冲的频谱及波束的表示后，利用(14)、(17)，就可以用(20)、(21)、(22)、

(23)、(24)来研究激光波束脉冲通过不均匀随机媒质传播的平均到达时间与脉冲展宽。

以上矩方程解的应用的讨论中没有涉及媒质的湍流谱分布，也没有涉及波束的形态特性。这些将另文详细讨论。

作者感谢吕保维先生的热情鼓励以及与马晓非博士的有益讨论。

参 考 文 献

[1] V. I. Tatarskii; *"The Effects of a Turbulent Atmosphere on Wave Propagation"* (U. S. Dept. of Commerce, TT-68-50464, Springfield Virginia, 1971), 335~347.

[2] Mitsuo Tateiba; *Radio Science*, 1982, **17**, No. 1 (Jan), 205~210.

[3] 谷超豪等;《数学物理方程(第二版)》,(复旦大学数学系主编,上海科学技术出版社,1961, October), 219。

[4] A. Ishimaru; *"Wave Propagation and Scattering in Random Media"*, (Academic Press, New York, 1978), 437.

[5] B. J. Uscinski; *Proc. R. Soc. Lond*, 1982, **A380**, No. 1778 (Mar), 137~169.

[6] K. G. Budden; *"The Propagation of Radio Waves"*, (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1985), 247.

[7] D. Anderson and J. I. H. Askne; *Proceeding of the IEEE*, 1974, **62**, No. 12 (Dec), 1518~1523.

[8] R. Fante; *Proceedings of the IEEE*, 1975, **63**, No. 12 (Dec), 1669~1692.

Optical wave propagation through inhomogeneous random medium——The solution of the $m-n$ th moment equation of multiple scattering

WANG ZHENSONG

(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing)

(Received 12 August 1986; revised 2 December 1986)

Abstract

The analytic solution of the multiple scattering $m-n$ th moment equation with different wave numbers and different positions is given in the small angle scattering approximation for optical wave propagated through such a random medium, that the material parameter fluctuates inhomogeneoursly in the dirction of propagation and homogeneously in the direction transverse to the propagation path. The applications of the solution to the problems related with the optical beam propagation are discussed.

Key words: optical wave propagation; inhomogeneous random medium.