

# 光学双稳性的强迫振动模型

耿 发 吴庭万 张晓东  
(华南工学院)

## 提 要

本文提出一个新的光学双稳性模型。基于平均场近似,慢变振幅近似和绝热近似的思想,把光学双稳系统看成一个“黑箱”,类比非线性振动理论,指出不同的光学双稳过程(包括不同的工作物质和不同的腔(E-P腔或环腔)),能用一个恰当的强迫振动方程统一地描述。方程中所包含的都是可测量的宏观参量,使得可能直接用实验拟合,与理论结果进行定量对照。用振动理论的方法,把方程演变成自治方程组,从而方便地得到光学双稳性稳态和动态解的一般形式。并用若干已报道的具体例子验证了这个模型的普适性。

关键词: 光学双稳性; 光学非线性; 强迫振动。

## 一、方程的建立

人们熟知,激光器的场可以当成服从 Van der Pol 方程的自持振荡。我们认为,光学双稳系统(以下简称 OB 箱,并请参见图 1)的输出场  $E_r$ , 可以看成是入射场  $E_i$  驱动下的强迫振动。问题在于建立与此相应的强迫振动方程。这个方程应是非线性的,这样才有可能发生双(多)稳现象和分岔、自脉动、混沌等等。可以预期,这种非线性来源于 OB 箱中工作物质的光学非线性,即其(复)极化率  $\alpha(I)$  为可观察光强  $I$  的函数,在时空上均为慢变的。设物质的极化  $P$  能及时随场  $E$  而变化,即有

$$P = \epsilon_0 \alpha(I) E, \quad (1)$$

它们服从如下形式的 Maxwell 方程。

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (2)$$

取  $E$  为准平面波,并令  $e$  为偏振单位矢量:

$$E = e E(Z, t) \exp(iKZ), \quad (3)$$

其中  $E(Z, t)$  是沿介质的坐标变量  $Z$  (见图 1) 的慢变函数,但仍为时间  $t$  的快变(光频)函数,考虑到这些因素,方程(2)近似为

$$2iK \frac{\partial}{\partial Z} + K^2 + \frac{1 + \alpha(I)}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(Z, t) = 0. \quad (4)$$

对方程(4)求沿  $Z$  坐标的空间平均,并令

$$\langle E(Z, t) \rangle = E(t), \text{ 而 } \langle \dots \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L \dots dz. \quad (5)$$

在忽略空间相关性的情况下,

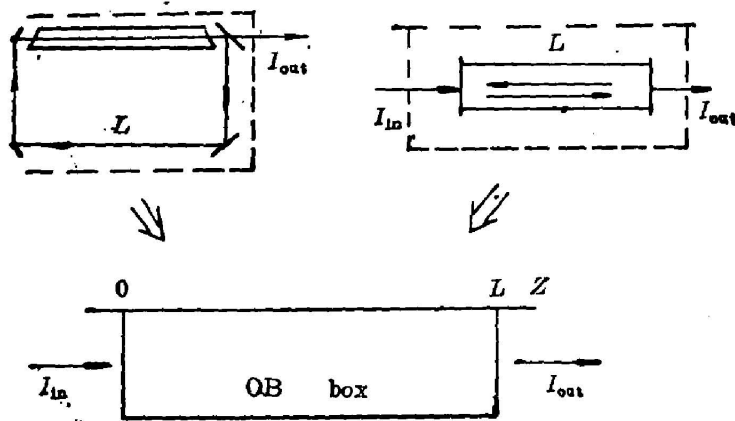


Fig. 1 Box model of optical bistable system

$$\left\langle x(I) \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(Z, t) \right\rangle = \langle x(I) \rangle \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(Z, t) \right\rangle = \langle x(I) \ddot{E}(t) \rangle \quad (6)$$

至于

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z} E(Z, t) \right\rangle = E(L, t) - E(0, t), \quad (7)$$

考虑到 OB 箱是内反馈的, 不论是对环腔或 F-P 腔, 下列边界条件总是成立的:

$$\sqrt{T} E(L, t) = E_T, \quad (8a)$$

$$E(0, t) = \sqrt{T} E_T + R E(L, t - \Delta t) \exp(iKL), \quad (8b)$$

其中  $T$  与  $R$  分别为箱两端的透射率与反射率,  $\Delta t$  是光由输出端折回输入端所需时间, 是腔的一个结构常数,  $\Delta t$  显然为微小量, 于是

$$E(L, t - \Delta t) \simeq E(L, t) - \Delta t \frac{dE(L, t)}{dt} \quad (9)$$

设入射场  $E_I$  为一单色波:

$$E_I = y e^{-i(\Omega t + \phi)}, \quad (10)$$

$y$  为常量实振幅, 相应介质中平均场  $E(t)$  也将是准单色的, 即

$$E(t) = X(t) \exp[-i(\Omega t + \phi(t))], \quad (11)$$

其中  $X(t)$  是实振幅 (光强  $I \sim X^2$ ),  $X(t)$  与相位  $\phi(t)$  均应为  $t$  的缓变函数。同时又不难理解, 透射场  $E_T$  应与 OB 箱内介质中的平均场  $E(t)$  成线性关系:

$$E_T = \gamma E(t), \quad (12)$$

$\gamma$  为复常数, 最后, 将 (6) 式中的平均复极化率  $\langle x(I) \rangle$  分解为主色散的实部  $x_1(X)$  与主吸收的虚部  $x_2(X)$ :

$$\langle x(I) \rangle = x_1(X) + i x_2(X). \quad (13)$$

这样, 在对方程 (4) 求空间平均以后, 综合考虑 (5) ~ (13) 式, 并考虑到时间上慢包络近似, 经过简单的运算, 方程 (4) 转变成:

$$(H x_1(x) \ddot{E}_T + (x_2(x) \Omega + 2h_0) \dot{E}_T + \omega_c^2 E_T = a \ddot{E}_I, \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} E_T &= A X(t) \exp[-i(\Omega t + \phi(t))] \\ &= X(t) \exp[-i(\Omega t + \phi(t))], \end{aligned} \quad (15)$$

$$E_T = y e^{-i\omega t}, \quad \Omega = Kc \quad (16)$$

$A$  为  $\gamma$  的模, 在  $E_I$  与  $E_T$  中已略去了无关重要的常数相位因子。方程(14)中实常数  $h_0$ ,  $\omega_c^2$  与  $a$  由下列关系式决定:

$$\left. \begin{aligned} a &= A \frac{2c\sqrt{T}}{L\Omega}, \\ 2h_0 &= a'_1 + b'_2, \quad \omega_c^2 = \Omega^2(1 + a'_2 + b'_1), \\ a'_1 &= 2\Omega c \Delta t a_1 / L\sqrt{T}, \quad b'_1 = 2c \Delta t b_1 / L\sqrt{T}, \\ a'_2 &= 2c a_2 / L\Omega \sqrt{T}, \quad b'_2 = 2c b_2 / L\sqrt{T}, \\ i r R e^{iK L} &= a_1 - i b_1, \quad i r' T e^{iK L} = a_2 - i b_2, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

方程(14)正是我们所预期的 OB 箱输出场  $E_T$  的非线性受迫振动方程, 其中  $\omega_c$  可解释为腔的本征频率,  $a \vec{E}_I$  代表由入射场构成的“驱动力”。当  $x_1$  与  $x_2$  为线性极化率时, 则方程(14)退化为线性受迫振动。对方程(14)在  $\tau = \frac{2\pi}{\Omega}$  时间内取平均, 在此时间内  $X_1(t)$  与  $\phi(t)$  可以看成是不变的, 这样不难将方程(14)转化为两个一阶的自治方程<sup>[1]</sup>:

$$(1 + x_1(x)) \dot{x} = -h_0 [(1 + x_2(x)/d) x - \tilde{y} \sin \phi], \quad (18a)$$

$$(1 + x_1(x)) \dot{\phi} x = -h_0 [(x_1(x)/d - \Theta) x - \tilde{y} \cos \phi]. \quad (18b)$$

其中

$$\tilde{y} = \frac{a\Omega}{2h_0} y, \quad d = 2h_0/\Omega, \quad \Theta = \frac{\omega_c - \Omega}{h_0}. \quad (19)$$

$\Theta$  代表入射场与腔之间的失谐,  $h_0$  则可解释为腔衰变率, 而  $h_0 \ll \Omega$ 。因为  $x_1(x) \ll 1$  (18a, 18b) 等式中因子  $(1 + x_1(x))$  一般可近似地取为 1<sup>[2]</sup>。

## 二、稳态解

在方程(18a, b)中令  $\dot{x} = \dot{\phi} = 0$ , 即可得一般形式的光学双稳性稳态解<sup>[3a]</sup>:

$$I_j = I [(1 + x_2(x)/d)^2 + (x_1(x)/d - \Theta)^2], \quad (20)$$

其中  $I_j \propto \tilde{y}^2$ ,  $I \propto x^2$ , 均为无量纲化光强。(20)式与文献[3a]从二能级原子环腔系统得到的结果完全相同, 但已具更广泛的含义, 因为其中的  $x_1(x)$  和  $x_2(x)$  原则上可以代表任何形式物质的非线性极化率, 而且不限于环形腔。如用文献[3b]所给的双光子 F-P 腔近共振情形的  $x_j^{\pm}$  代入(20)式亦得与之完全相同的稳态方程。

## 三、瞬态解

要描述光学双稳系统的动态, 必须求方程组(18a, 18b)的含时解, (18a, 18b)是一个自治的刚性方程组, 通常只能用数值方法求解。但我们看到, (18a)主要体现吸收作用, 而(18b)主要体现色散作用, 考虑在纯吸收型和纯色散型两种极端情况下, 把非主要的方程“消除”掉而求得近似解折解。对于纯吸收光双稳, 这相当于“锁定”相位而求得振幅的动力学方程; 对于纯色散光双稳系统, “消除”(18a)限制了振幅(光强)——相位关系, 而得到相位动力学方

程, 相当于该系统的响应主要是相位的响应。但由上述关系, 我们可把相位响应过程表为振幅或光强的变化, 使之可直接测量。下面给出这两种光学双稳瞬态解的一般形式。

若  $x = x(I)$ , 采用无量纲时间  $\tau = h_0 t$ , 可将式(18a, 18b)化成:

$$\dot{I} = -2(1 + x_2(I)/d)I + 2\sqrt{II_{op}} \sin \phi, \quad (21a)$$

$$I\dot{\phi} = (\Theta - x_1(I)/d)I + \sqrt{II_{op}} \cos \phi. \quad (21b)$$

其中  $I_{op}$  是对应于一定稳态的入射光强。

a) 吸收型  $x_1 = 0$ , 在  $\Theta$  不太大时, 令  $\phi = 0$ , 由(21a)即得光强动力学方程:

$$\dot{I} = -2(1 + x_2/d)I + 2\sqrt{I}\sqrt{I_{op} - I\Theta^2}, \quad (22)$$

失谐与光强的关系为:

$$\Theta^2 I \leq I_{op}. \quad (23)$$

作变换  $u\sqrt{I} = \sqrt{I_{op} - \Theta^2 I}$ , (22)式成为:

$$u\dot{u} = (\Theta^2 + u^2) [(1 + x_2(u)/d) - u]. \quad (22')$$

积分:

$$\tau = \int_{u_0}^u \frac{u du}{(\Theta^2 + u^2) [(1 + x_2(u)/d) - u]}. \quad (24)$$

b) 色散型  $x_2 = 0$ , 令  $\dot{I} = 0$ , 得相位-光强关系:

$$\sin \phi = \sqrt{I/I_{op}} \quad (25)$$

和相位动力学方程:

$$\dot{\phi} = (\Theta - x_1(\phi)/d) + \text{ctg} \phi. \quad (26)$$

作变换:  $u = \text{ctg} \phi$  或即  $u\sqrt{I} = \sqrt{I_{op} - I}$ , 便有

$$\dot{u} = -(1 + u^2) [\Theta - x_1(u)/d + u]. \quad (26')$$

积分:

$$-\int_{u_0}^u \frac{du}{(1 + u^2) [\Theta - x_1(u)/d + u]} = \tau. \quad (27)$$

一般地说, 如果  $x(I)$  是有理函数, (24)、(27)就可以解析地积出来。下面给出两个具体例子。

二能级系统吸收型, (24)式简化为:

$$\tau = - \int_{x_0}^x \frac{(1 + x^2) dx}{x^3 - y_{op} x^2 + (1 + 2c)x - y_{op}}, \quad (24')$$

其中  $c$  为合作参量。对应的微分方程是

$$\dot{x} = y_{op} - x \left( 1 + \frac{2c}{1 + x^2} \right). \quad (22'')$$

(22'')也可由动力学方程组锁定  $\phi = \pi/2$  直接得到, 与文献[4]差一相位(锁定  $\phi = 0$ ), 但在此处并不重要。(24')可写成:

$$\tau = - \int_{x_0}^x \left( \frac{D}{x - x_1} + \frac{Ex + F}{x^2 + Ax + B} \right) dx, \quad (24'')$$

$x_1$  代表  $y = y_{op}$  时的一个稳态。当  $A^2 - 4B < 0$ , 且  $x_1$  在高透支时, (24'')式给出与文献[5]相同的结果:

$$\left. \begin{aligned} A &= x_1 - y_{op}, & B &= y_{op}/x_1, \\ D &= \frac{1+x^2}{y_{op}/x_1 + 2x_1^2 - y_{op}x_1} = \frac{1+x^2}{x_1^2 + Ax_1 + B}, \\ E &= \frac{y_{op}/x_1 + x_1^2 - y_{op}x_1 - 1}{y_{op}/x_1 + 2x_1^2 - y_{op}x_1} = \frac{(1-x_1^2)(y_{op}/x_1 - 1)}{x_1^2 + Ax_1 + B}, \\ F &= \frac{2(x_1 - y_{op})}{y_{op}/x_1 + 2x_1^2 - y_{op}x_1} = \frac{-2A}{x_1^2 + Ax_1 + B} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

积分为:

$$\begin{aligned} -\tau &= D \ln \left| \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \right| + \frac{E}{2} \ln \left| \frac{x^2 + Ax + B}{x_0^2 + Ax_0 + B} \right| \\ &+ \frac{2F - AE}{\sqrt{4B - A^2}} \left[ \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{2x + A}{\sqrt{4B - A^2}} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{2x_0 + A}{\sqrt{4B - A^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

图 2 给出数值计算结果。由此可见(29)式恰当地描述了二能级原子系统光学双稳瞬态过程。

作为第二个对照例子, 我们研究克尔介质光学双稳系统的瞬态。通常略去吸收效应(色散型), 即  $x = x_1 = -\alpha_1 - \beta_1 x^2$ , (27)式现在为

$$-\tau = \int_{u_0}^u \frac{du}{u^3 + (d_1/d + \Theta)u^2 + u + [\alpha_1/d + \Theta + (\beta_1/d)I_{op}]}, \quad (29')$$

或

$$\tau = - \int_{u_0}^u \left( \frac{\mathcal{A}}{u-u_1} + \frac{\mathcal{X}u + \mathcal{F}}{u^2 + \mathcal{B}u + \mathcal{D}} \right) du. \quad (29'')$$

$u_1$  代表  $I_1 = I_{op}$  时之稳态。对此系数可得:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A} &= -\mathcal{X}, \quad \mathcal{B} = v_1 + \alpha_1/d + \Theta, \quad \mathcal{D} = \mathcal{B}u_1 + 1, \\ \mathcal{X} &= \frac{-1}{u_1^2 + \mathcal{B}u_1 + \mathcal{D}}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{X}(\mathcal{B} + u_1). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

积分结果为(当  $\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{D} < 0$ ,  $u_1$  在高透支):

$$\begin{aligned} -\tau &= \mathcal{A} \ln \frac{u-u_1}{u_0-u_1} + \frac{\mathcal{X}}{2} \ln \frac{u^2 + \mathcal{B}u + \mathcal{A}}{u_0^2 + \mathcal{B}u_0 + \mathcal{A}} \\ &+ \frac{2u_1 + \mathcal{B}}{\sqrt{4\mathcal{D} - \mathcal{B}^2}} \cdot \mathcal{X} \left( \operatorname{tg}^{-1} \frac{2u + \mathcal{B}}{\sqrt{4\mathcal{D} - \mathcal{B}^2}} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{2u_0 + \mathcal{B}}{\sqrt{4\mathcal{D} - \mathcal{B}^2}} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

与文献结果一致<sup>[9]</sup>。图 3 给出数值计算结果。

值得指出: 1. 此二例中均可明显地看到临界慢变效应; 2. 纯色散光学双稳动态过程中有过冲现象。这些与光学双稳性作为一阶相变模型的特征相符。

此二例还表明, 纯吸收和纯色散两种极端情况的光学双稳瞬态行为有大致相同的函数形式, 而与其为环腔或 F-P 腔并无关系, 这与我们前面的推断相符。此外, 可据此断定, 对一般情况, 我们的动力学方程组也是适用的。但不一定能求得解析解。计算表明, 一般情况

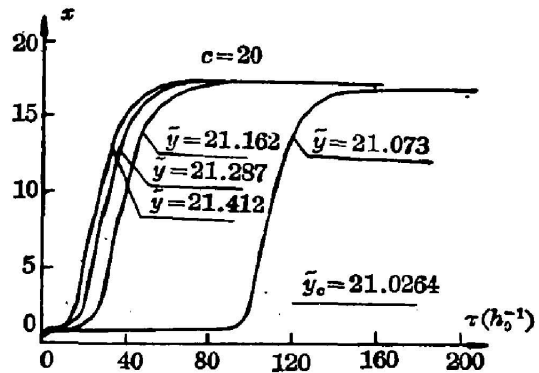


Fig. 2 Transient behaviour of transmission field  $x$  when the incident field  $\tilde{y}$  is suddenly increased from  $\tilde{y}_0 = 0$  to  $\tilde{y} = 21.412; 21.287; 21.162$  and  $21.037$ , with threshold of  $\tilde{y}_c = 21.0264$ , operative parameter  $c=20$ , for the absorptive optical bistability of 2-level system

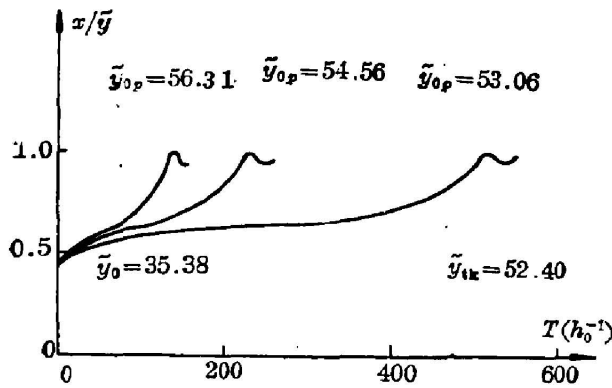


Fig. 3 Transient behaviour of the rate  $x/\bar{y}$  when the incident field  $\bar{y}$  is suddenly increased from  $\bar{y}_0=35.38$  to  $\bar{y}=56.31, 54.56$  and  $53.06$ , with the threshold of  $\bar{y}_{th}=52.40$ , for dispersive optical bistability of Keer medium system. The relevant parameters we  $\alpha_1/d=3.2$ ;  $\beta_1/d=9 \times 10^{-4}$ ;  $\Theta=-1$

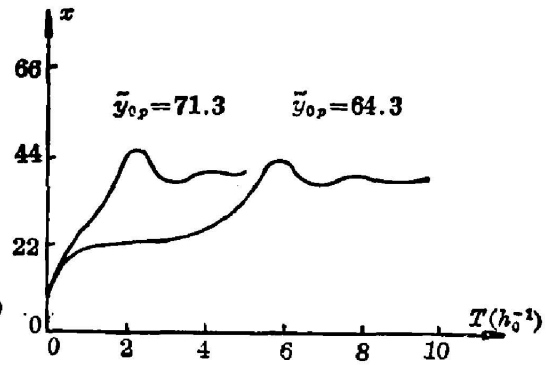


Fig. 4 Transient behaviours of mixed (absorptive and dispersive) optical bistability of 2-level system. When  $\bar{y}$  is increased suddenly from  $\bar{y}_0=25.2$  to  $\bar{y}=71.3$  and  $64.3$ . Operation parameter  $c=600$ ; atomic detuning  $\delta=60$  and detuning of cavity  $\Theta=15$

下, 开关后系统可能振荡地趋于稳态, 并且临界慢变同样存在(图 4)。

#### 四、结 论

光学双稳系统可看成是一个“黑箱”(OB 箱), 其出射场在入射场驱动下作非线性强迫振动。建立了相应的动力学方程组。给出了一般形式的稳态解, 用以描述光学双稳态是成功的: 给出了纯吸收和纯色散情况的瞬态解的一般积分形式, 对二能级系统和克尔介质系统动态给出了解析解。能描述一般 OB 动态的特征。所给结果均与文献一致。在此意义上证明本模型具有一定的普遍性。进而还可指出, 用我们的模型研究实际的 OB 系统的时候, 对动力学方程中的参数  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  和  $h_0$ , 既可用理论推导的结果, 也可直接用实验测量结果来计算确定 OB 稳态和动态特性。最后要指出的是由于方程 (1) 只适用于极化弛豫率远大于腔弛豫率的情况, 则方程 (14) 或 (18a, 18 b) 限于优质腔条件下适用。对于模型的推广, 解的稳定性问题及能否描述混沌现象等尚待进一步研究。

#### 参 考 文 献

- [1] P. Hagedorn; «Nonlinear Oscillation», (Oxford, N. Y.), 1981, 25~27, 135~137.
- [2] G. P. Agrawal et al.; Phys. Rev. A, 1979, 19, No. 5 (May), 2074~2086.
- [3a] R. Bonifacio et al.; Lett. AL Nuo. Cim., 1978, 21, No. 15 (Apr), 517~521.
- [3b] Li Fu Li; Acta Phy. (Sin.), 1983, 82, No. 1 (Jan), 71~83.
- [4] F. Casa granle et al.; «Quant. Opt.», Springer-Verlag Berlin Heidelberg, N. Y., 1982, 53~102.
- [5] V. Benza et al.; Lett. AL Nuo. Cim., 1979, 26, No. 13 (Apr), 405~409.
- [6] G. Grynberg et al.; Appl. Phys., 1981, B26, No. 3 (Nov), 155~160.

## Forced oscillation model of optical bistability

OU FA, WU TINGWAN AND ZHANG XIAODONG

*(Department of Physics, South China Institute of Technology)*

(Received 3 January 1987; revised 3 August 1987)

### Abstract

This paper presents a new model of optical bistability (OB). In view of the ideas of the mean field approximation, the slow envelope approximation and the adiabatic approximation, the OB system can be regarded as a "box". Comparing with the theory of nonlinear oscillation, we find that the courses in different OBS's—including different substances and different cavities (E-P. C. or R. C.)—can be described consistently, in both steady state and temporal respect, with an appropriate nonlinear forced oscillation equation, in which the coefficients are measurable macroscopical parameters. Using the method of slowly changing phase and amplitude in oscillation theory, we develop the equation into a coupling and autonomous dynamic equation set of phase and amplitude. The general solutions of the equation set for OB steady state and transient behavior are obtained conveniently from this form. Several concrete results in literature are compared as the examples for the verification of the widely applicability of this model.

**Key words:** optical bistability; optical nonlinear; forced oscillation.