

# 反馈调 $Q$ $CO_2$ 激光器的光学 多稳性与不稳性

陈历学 马爱群 李淳飞  
(哈尔滨工业大学应用物理系)

## 提 要

本文发现在  $CO_2$  激光器的腔内插入一个电光调制器, 利用正比于输出光的光电转换信号反馈调节激光器的  $Q$  值, 可以实现光学双稳性与多稳性。文中建立了描述这一系统的数学模型, 它由三个一阶非线性微分方程描述, 其稳态模型显示了光学双稳性和多稳性特点, 理论分析和数值计算都证实了这一结果。

关键词: 反馈调  $Q$ , 光学多稳性, 不稳性。

## 一、引 言

近年来, 许多学者曾经仔细研究过  $CO_2$  激光器的双稳运行<sup>[1~4]</sup>。他们在  $CO_2$  激光器中插入  $SF_6$  可饱和吸收体, 形成了一个被动调  $Q$   $CO_2$  激光器, 在适当的条件下显示了激光器泵浦和输出之间的光学双稳性, 文献[2]和[3]分别给出了这一装置的理论模型和实验观察。

最近, 激光混沌的研究曾经引起广泛的兴趣<sup>[5~9]</sup>。在这一领域内的研究中, 按照极化衰减速率  $\gamma_L$ , 粒子数反转衰减速率  $\gamma_I$  以及场衰减速率  $k$  的相对大小, 人们把激光器分为 A 类 ( $\gamma_L, \gamma_I \gg k$ ), B 类 ( $\gamma_L \gg k \gg \gamma_I$ ) 和 C 类 ( $k \sim \gamma_L \sim \gamma_I$ ) 三类激光器<sup>[5]</sup>。 $CO_2$  激光器是典型的 B 类激光器, 系统由场强和粒子数反转两个非线性常微分方程描述, 一般不会出现倍周期分岔等混沌现象。对这类激光器的混沌研究通常是使系统成为非自治的, 或者设法增加方程的数目。例如, 文献[8]则通过反馈调制腔损耗, 从而增加方程的数目导致自治方程系统的不稳性。

本文在文献[8]提出的反馈调  $Q$   $CO_2$  激光系统基础上作进一步研究, 重新导出了动力学方程, 并通过稳态分析发现这一系统在稳态情况下, 应具有光学双稳性及多稳性。再从线性稳定性分析出发, 发现动力学不稳性不会影响强反馈下光学双稳性的实现, 并指出系统失稳的条件, 从而大大完善了这一系统的双稳性及混沌性研究。

## 二、动力学模型

$CO_2$  激光系统是一种近似的均匀加宽激光系统, 由于  $\gamma_L \gg \gamma_I$ , 极化可以被绝热消除, 系统可由场和粒子数反转的均匀加宽二能级原子系统的麦克斯韦-布洛赫(Maxwell-Bloch)方程描述。假设激光频率  $\omega_L$  与二能级原子的共振跃迁频率  $\omega_0$  之间共振, 即频率牵引效应可以

忽略,用  $I$  和  $D$  分别表示系统的归一化光强参量和布居反转参量,则系统由下述方程描述

$$\frac{dI}{dt} = -kI + G\Delta_0 ID, \quad \frac{dD}{dt} = -\gamma_r(D - 1 + DI), \quad (1)$$

式中  $k$  为腔的强度损耗系数,  $G\Delta_0$  是泵浦速率参量。

由方程(1)可以看出,这一系统并不存在光学双稳性和混沌行为。为了实现激光双稳性我们在激光腔内插入一电光调制器,如图1所示。从激光器的输出端取出一部分光强信号经光电转换之后再经线性放大后加到电光调制器上,反馈调制电光调制器的透射率,从而调制激光器的腔内损耗  $k$ 。用德拜弛豫方程描述反馈系统的弛豫过程,用  $\phi$  表示电光调制器的调制参量得到

$$\frac{d\phi}{dt} = -\beta(\phi + \alpha I - \phi_B), \quad (2)$$

式中  $\beta$  是反馈放大器的频带宽度,其倒数对应于反馈放大系统的德拜弛豫时间,  $\alpha$  为反馈系数,  $\phi_B$  是未加反馈时的初始调制参量。

由图1可见,光在腔内往返一周时必然两次通过电光调制晶体。用  $I_1$  表示进入电光调制器的光强,  $I_2$  表示在腔内往返一次之后再次进入电光调制器之前的光强。不考虑腔内其它的损耗和增益作用,电光调制器将导致光强的衰减

$$I_2 = (I_1 \tau_0 / 2) (1 + M \cos \phi), \quad (3)$$

式中  $\tau_0$  是电光调制器的峰值透射率,  $M$  为电光调制器的调制深度。如果用指数衰减系数  $k_M$  表示电光调制器导致的场的衰减,则  $I_1$  和  $I_2$  之间具有如下的关系

$$I_2 = I_1 \exp(-k_M l) = I_1 \exp(-2k_M l / c), \quad (4)$$

式中  $c$  为光速,  $l$  为激光器的长度。比较(3)式和(4)式我们得到调制参量  $\phi$  与指数衰减系数  $k_M$  之间具有下述关系

$$k_M = -\frac{c}{2l} \ln \left[ \frac{\tau_0}{2} (1 + M \cos \phi) \right]. \quad (5)$$

再考虑到腔内用衰减系数  $k_0$  描述的其它损耗,可以得到腔内的总损耗系数  $k$

$$k = k_0 + k_M = k_0 - \frac{c}{2l} \ln \left[ \frac{\tau_0}{2} (1 + M \cos \phi) \right]. \quad (6)$$

这样整个反馈调 Q CO<sub>2</sub> 激光器将由(1)式、(2)式和(6)式组成的三个一阶非线性微分方程组描述。它不仅可以在光学双稳性和光学多稳性,而且若考虑到其动力学行为时将存在混沌行为。

### 三、稳态下的光学多稳性

为了求解反馈调 Q CO<sub>2</sub> 激光器的稳态行为,可以令联立方程组中各时间微分项为零

$$\left. \begin{aligned} k_s &= k_0 - \frac{c}{2l} \ln \left[ \frac{\tau_0}{2} (1 + M \cos \phi_s) \right] = G\Delta_0 D_s, \\ D_s &= (1 + I_s)^{-1}, \quad \phi_s = \phi_B - \alpha I_s, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

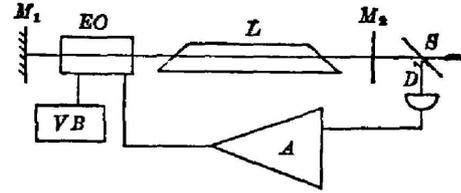


Fig. 1 Experimental setup of CO<sub>2</sub> laser with feedback Q-switching  
EO: Electro-optic crystal, VB: basic voltage, D: detector, A: D. C. Amplifier

式中  $I_s$ 、 $D_s$  和  $\phi_s$  表示光强、粒子数反转和调制参量的相应稳定值。将(7)式中  $D_s$  和  $\phi_s$  消去之后得到描述泵浦参量  $G\Delta_0$  与光强  $I_s$  之间关系的状态方程为

$$G\Delta_0 = (1 + I_s) \left( k_0 - \frac{c}{2l} \ln \left\{ \frac{\tau_0}{2} [1 + M \cos(\phi_B - \alpha I_s)] \right\} \right). \quad (8)$$

引进新的变量  $X = G\Delta_0$ 、 $Y = (1 + I_s)$  分别对应于泵浦与光强参量。根据文献 [10] 的描述, 任何光学双稳系统可以看成调制系统与反馈系统的合成系统。在本文中对应的调制函数和反馈函数分别为

$$\left. \begin{aligned} \eta_M(\phi) &= \left\{ k_0 - \frac{c}{2l} \ln \left[ \frac{\tau_0}{2} (1 + M \cos \phi) \right] \right\}^{-1}, \\ \eta_F(\phi) &= \frac{\phi - (\phi_B + \alpha)}{-\alpha X}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

显然,  $\eta_F(\phi)$  是一直线簇, 其直线斜率取决于  $-(\alpha X)^{-1}$ , 而直线截距为  $(\phi_B + \alpha)$ 。而  $\eta_M(\phi)$  则由于余弦函数  $\cos \phi$  存在, 呈现周期变化特点。图 2 给出了典型的  $\eta_M(\phi)$  和  $\eta_F(\phi)$  曲线。

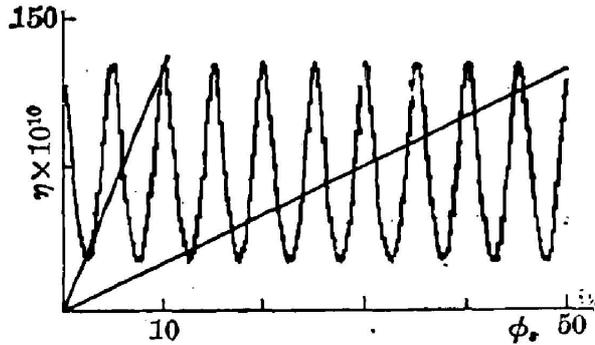


Fig. 2 Modulation and feedback curves of  $\text{CO}_2$  laser with feedback Q-switching

如同文献 [10] 引入的光学双稳性的稳定参量  $S$ , 来判断光学双稳性的存在并描述其稳态行为, 反馈调 Q  $\text{CO}_2$  激光系统的稳定参量  $S$  为

$$S = 1 - \left[ \frac{(d\eta_M/d\phi_s)}{(d\eta_F/d\phi_s)} \right] = 1 - \frac{(c/2l) \alpha M \sin \phi_s [\phi_B + \alpha - \phi_s]}{(1 + M \cos \phi_s) \left\{ k_0 - (c/2l) \ln \left[ (\tau_0/2) (1 + M \cos \phi_s) \right] \right\}}. \quad (10)$$

容易导出  $S < 0$  的双稳性存在条件为

$$\frac{(c/2l) M \alpha \sin \phi_s (\phi_B + \alpha - \phi_s)}{(1 + M \cos \phi_s) \left\{ k_0 - (c/2l) \ln \left[ (\tau_0/2) (1 + M \cos \phi_s) \right] \right\}} \geq 1. \quad (11)$$

显然, 只要选择适当的参量, 总可以使(11)式成立。图 3 给出了根据(10)式计算的  $S(\phi)$  曲线。由图 3 可见, 在强反馈的情况下, 总是存在着相当多的  $S < 0$  区域, 从而可以实现光学多稳性。图 4 是根据(8)式计算得到的激光光强参量  $Y$  与泵浦参量  $X$  之间的关系曲线, 由图 4 可以看到在弱反馈的情况下, 系统的双稳态上跳阈值较高, 各级输出光强之间的阶跃差较大, 而在强反馈的情况下, 产生双稳态的阈值较低, 容易实现光学双稳性及多稳性, 各级激光光强之间的阶跃差亦较小。

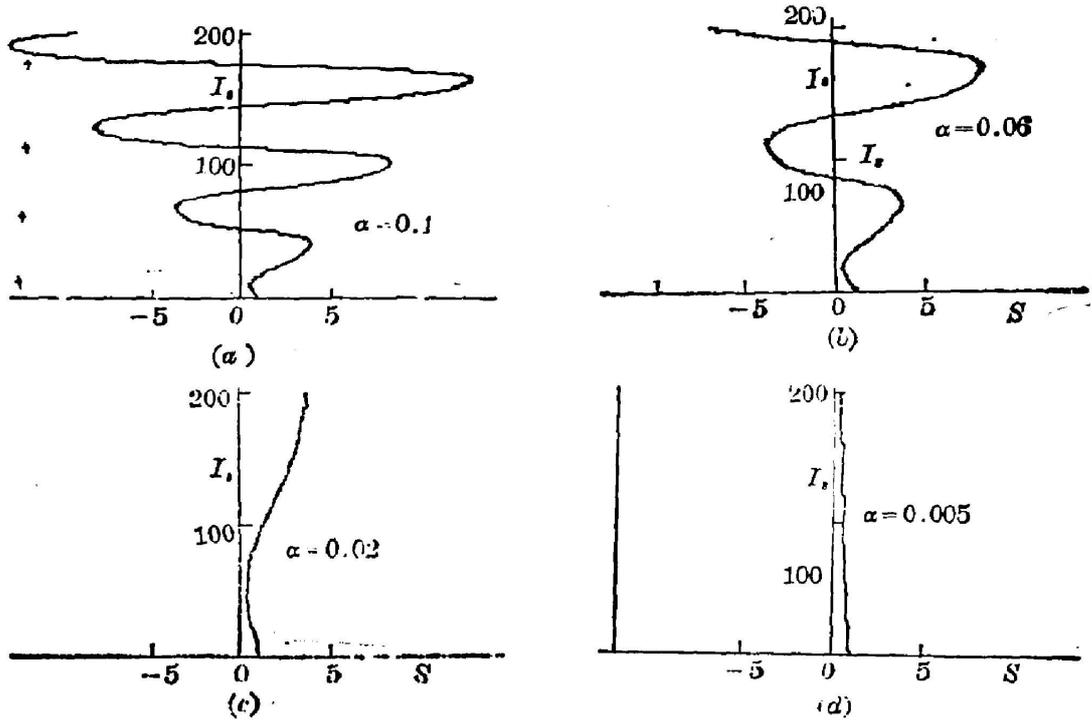


Fig. 3 Curves of stability parameter  $S$  versus intensity  $I_s$  for CO<sub>2</sub> laser with feedback Q-switching

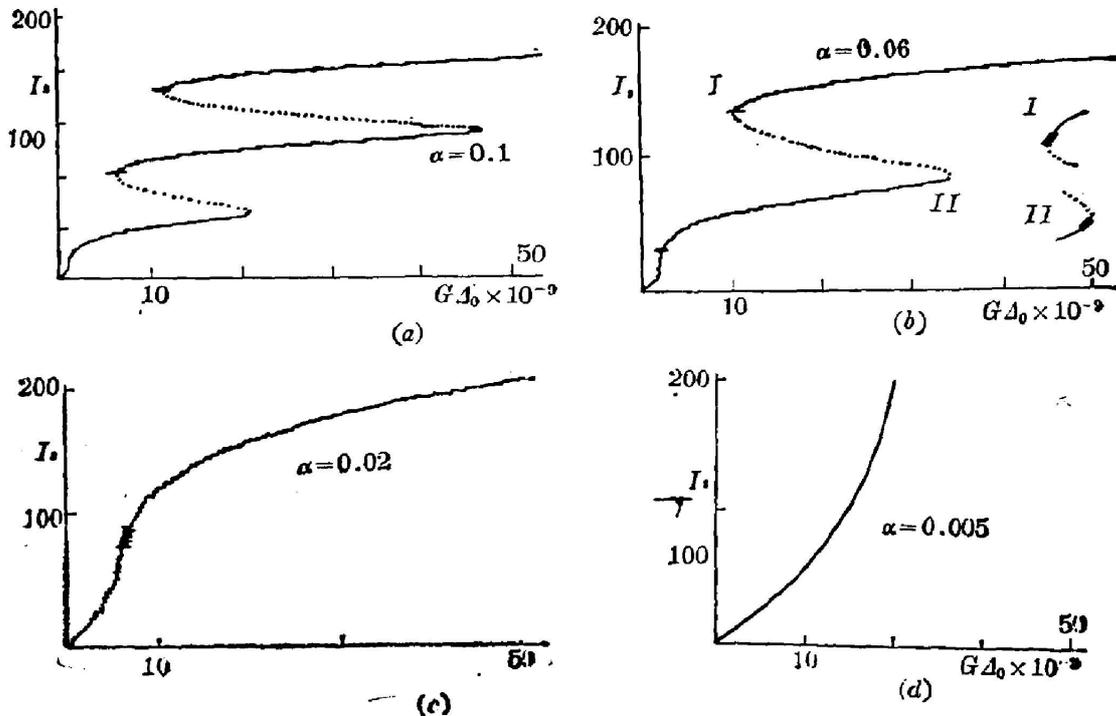


Fig. 4 Curves of pumping parameter  $G$  versus intensity  $I_s$  and unstable range for CO<sub>2</sub> laser with feedback Q-switching (heavy solid line denotes the dynamic unstable range, broken line denotes static steady range)

#### 四、动力学不稳定性及其对双稳运行的影响

反馈调  $Q$   $\text{CO}_2$  激光系统三个一阶非线性微分方程组描述, 一般存在不稳定行为甚至混沌行为。下面将用线性稳定性分析技术考察系统的动力学失稳, 从而判断该系统出现不稳定性的条件, 考察在双稳回线上的什么样位置可能发生动力学不稳而使光学双稳的运行失效。

用  $\Delta I$ 、 $\Delta D$  和  $\Delta\phi$  分别表示相对于稳定值  $I_s$ 、 $D_s$  和  $\phi_s$  的小扰动。由(1)、(2)式容易得到在线性近似下小扰动  $\Delta I$ 、 $\Delta D$  和  $\Delta\phi$  应满足的方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta I}{dt} &= G\Delta_0 I_s \Delta D - I_s \frac{c}{2l} \frac{M \sin \phi_s}{1 + M \cos \phi_s} \Delta\phi, \\ \frac{d\Delta D}{dt} &= -\gamma_l D_s \Delta I - \gamma_l (1 + I_s) \Delta D, \\ \frac{d\Delta\phi}{dt} &= -\beta\alpha \Delta I - \beta \Delta\phi. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

令  $\Delta I$ 、 $\Delta D$  和  $\Delta\phi$  分别具有下述形式的解

$$\Delta I = I_1 \exp(\lambda t) + c.c., \quad \Delta D = D_1 \exp(\lambda t) + c.c., \quad \Delta\phi = \phi_1 \exp(\lambda t) + c.c. \quad (13)$$

代入方程(12)中可以得到下述本征值方程

$$\left. \begin{aligned} \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 &= 0, \\ a_1 &= \beta + \gamma_l (1 + I_s), \\ a_2 &= \gamma_l (1 + I_s) \beta + G\Delta_0 \gamma_l I_s D_s - \beta\phi \frac{c}{2l} I_s \frac{M \sin \phi_s}{1 + M \cos \phi_s}, \\ a_3 &= \beta G\Delta_0 \gamma_l I_s D_s - \gamma_l \beta \alpha \frac{c}{2l} (1 + I_s) I_s \frac{M \sin \phi_s}{1 + M \cos \phi_s}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

此三次方程的解一般为复数, 但是由于方程的系数皆为实数, 因此即使有复根必然为一对共轭复根, 而另外一个根则为实根。我们的目的是判断系统的稳定性, 因此我们可以假设其复根为一纯虚根  $\lambda = ih$ , 其中  $h$  为实数。当  $\lambda$  的解为纯虚根时, 本征值的实部为零, 系统已经失去稳定性, 因此系统的失稳条件转化为本征值方程(14)存在纯虚根的条件。令  $\lambda$  为纯虚根后由(14)式分解实部和虚部之后得到

$$h^2 = a_2 = (a_3/a_1). \quad (15)$$

由于  $h$  为实数, 因此  $h^2$  必然大于零, 因此上式成立的条件必为

$$a_1 a_3 = a_2, \quad a_2 \geq 0, \quad (a_3/a_1) \geq 0. \quad (16)$$

现在我们来讨论上述纯虚根条件导致的不稳定条件。由(16)式并利用(14)式的各系数及稳态关系(7)式, 可以得到

$$\beta^2 \gamma_l (1 + I_s) + \gamma_l^2 \beta (1 + I_s)^2 + \gamma_l^2 G\Delta_0 I_s = \beta\alpha I_s \frac{c}{2l} \frac{M \sin \phi_s}{1 + M \cos \phi_s}, \quad (17)$$

从上式可以看到, 由于方程左端恒大于零, 若取  $\alpha > 0$ , 则必存在下述条件

$$\sin \phi_s \geq 0, \quad (\alpha \geq 0) \quad (18)$$

即  $\phi_s$  必须选择在第一、第二象限。

考虑到  $a_1$  恒大于零, (16)式的第三式可简化为  $a_3 \geq 0$ 。由于  $\beta G\Delta_0 \gamma_l I_s D_s$  恒大于零, 再

考虑到(19)式给出的条件,由方程(14)的第四式可以导出下述纯虚数解存在条件为

$$0 < \frac{M\alpha(c/2l)(1+I_s)^2 \sin \phi_s}{G\Delta_0(1+M \cos \phi_s)} \leq 1. \quad (19)$$

现在再来考察方程(16)的第二式给出的条件。由方程(14)第三式得到

$$\frac{I_s M\alpha(c/2l) \sin \phi_s}{1+M \cos \phi_s} \leq \gamma_l(1+I_s) + \frac{G\Delta_0 \gamma_l I_s}{\beta(1+I_s)}. \quad (20)$$

用(17)式的左端项替代方程(20)的左端,容易得到下述纯虚数解存在条件

$$\frac{\gamma_l}{\beta}(1+I_s) + \frac{\gamma_l(1+I_s)^3}{G\Delta_0 I_s} \leq 1. \quad (21)$$

方程(20)的两端同乘以 $[(1+I_s)^2/I_s G\Delta_0]$ 之后我们得到

$$0 < \frac{M\alpha(c/2l)(1+I_s)^2 \sin \phi_s}{G\Delta_0(1+M \cos \phi_s)} \leq \frac{\gamma_l(1+I_s)^3}{G\Delta_0 I_s} + \frac{\gamma_l}{\beta}(1+I_s) \leq 1. \quad (22)$$

上式即是本征值方程(14)存在纯虚数解的条件,也就是反馈调 Q CO<sub>2</sub> 激光系统的失稳条件。

将不稳定条件(22)式与稳定参量  $S$  的(10)式相比较,容易看到,系统的稳定参量  $S$  在上述范围内才会导致动力学不稳定性

$$0 < (1-S) \leq \frac{\gamma_l(1+I_s)^3}{G\Delta_0 I_s} + \frac{\gamma_l}{\beta}(1+I_s) \leq 1, \quad (23)$$

即在  $0 < S < 1$  的范围内才会出现动力学不稳定性。正如文献[10]所述,  $0 < S < 1$  的区域在  $X \sim Y$  曲线上对应于曲线斜率从 1 到  $\infty$  的区域。在微分放大工作条件下,则对应于微分放大区域,在多稳态工作条件下,则对应于多稳回线上各级稳态曲线上跳或下跳临域曲线斜率较大的变曲区。

图 4 是根据(23)式的数值计算结果,加粗线对应于系统的动力学不稳区,虚线对应于系统的负斜率静态不稳区。在弱反馈的情况下(图 4(d)),由于系统的稳定参量  $S$  的值比较小,因而在图示的整个泵浦区都显示了不稳定性。适当增加反馈强度(增大  $\alpha$ )时,如图 4(e)所示当  $\alpha=0.02$  时,在图示的泵浦范围内,系统进入放大工作状态,整个曲线上的稳定参量  $S$  的值都相应增大,只有微分放大区域的稳定参量  $S$  仍处在  $0 < S < 1$  的范围而导致不稳定性。在图 4(b)的情况下,随着  $\alpha$  值的进一步增加反馈强度进一步加强,系统进入到双稳工作状态,除负斜率区之外,由线上各位置对应的稳定参量  $S$  的值都大于 1,因而不易出现不稳定性。由于初相位的原因,在低输出的区域,尚存在小区域的微分放大区,可以存在不稳定性,而在高输出区,只有在从正斜率到负斜率的转变区,才存在稳定参量  $S$  处在  $0 < S < 1$  的范围,而这一范围是非常窄小的,通常在双曲线上是在下支上,从下支向上支跳跃的临域内或者在上支上,从上支向下支跳跃的临域内。当  $\alpha=0.1$  的更强反馈时(图 4(a)),在给定泵浦范围内,系统进入多稳态运行,如图 4(b)的情形一样,只有在各支线上向上跳跃临域或向下跳跃临域内,才会出现不稳,其余区域都是稳定的。

从图 4 的结果可以看到,在强反馈下,由于系统的稳定参量值一般较大,因而不易导致动力学不稳定性。一般稳定的双稳运行及多稳运行常常远离向上跳跃或向下跳跃临域,因此动力学不稳定性不会对光学双稳性的稳定运行产生太大的不良影响。

## 五、讨 论

上述理论分析和数值计算结果都表明, 反馈调 Q CO<sub>2</sub> 激光器在一定条件下具有光学多稳性, 这一现象是讨论动力学方程在静态条件下的结果, 没有考虑动力学过程对这一系统的影响。实际上, 动力学方程是三个一阶的非线性微分方程, 系统可能存在动力学不稳性甚至混沌行为。动力学不稳性自然会对系统的双稳及多稳运行的稳定运行产生一定的影响, 有的甚至会严重破坏双稳运行。分析表明, 动力学不稳性仅仅影响弱反馈下的反馈调 Q 激光系统的稳定运行; 对于强反馈系统, 动力学不稳性不会严重影响系统的多稳性运行。

本文提出的反馈调 Q CO<sub>2</sub> 激光系统有着一定的实际意义, 特别是, 它可以大大降低泵浦扰动对于激光输出的影响。从(10)式可以看到, 光学双稳性的稳定参量  $S$  实际上定义为输入信号的相对变化率与输出信号的相对变化率之比。参照文献[10]进行的工作可以看到,  $S$  越大则系统抗扰动能力越强。如图 3 所得到的计算结果可以看到, 当  $\alpha$  小时, 即弱反馈的情况下,  $S$  的值比较小; 而在  $\alpha$  大时, 即强反馈的情况下,  $S$  的值比较大, 激光系统抗扰动本领较强, 结果激光器的功率稳定特性将显著提高, 从图 3(a) 可以看到, 当  $\alpha=0.1$  时, 得到的稳定参量  $S$  可以高达 12, 即输入相对扰动为 5% 时, 输出激光的相对变化小于 0.5%。同时由于激光器的多稳特性, 可以按照需要使激光系统在不同的稳态上工作, 因而可以按需要选择不同的激光功率输出。

按照本文提出的物理模型所对应的实验研究工作正在进行中。

## 参 考 文 献

- [1] S. Ruschin *et al.*; *Appl. Phys. (B)*, 1981, **24**, No. 1 (Jan), 45~48.
- [2] A. Jacques *et al.*; *Opt. Commun.*, 1982, **40**, No. 6 (Dec), 455~460.
- [3] E. Arimondo; *Opt. Commun.*, 1983, **41**, No. 4 (Feb), 277~282.
- [4] E. Arimondo *et al.*; *Appl. Phys. (B)*, 1983, **30B**, No. 2 (Feb), 57~77.  
E. Arimondo *et al.*; *J. O. S. A. (B)*, 1985, **2**, No. 1 (Jan), 193~198.
- [5] F. T. Arecchi *et al.*; *Opt. Commun.*, 1984, **51**, No. 5 (Sep), 308~314.
- [6] F. T. Arecchi *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **49**, No. 17 (Oct), 1217~1220.
- [7] W. Gadamski *et al.*; *«International Topical Meeting on Optical Bistability»*, (Tucson, Arizona, Dec 2~4, 1985).
- [8] T. Midavaine *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **55**, No. 20 (Nov), 1989~1992.
- [9] 陈历学等; 《中国激光》待发表。
- [10] 陈历学等; 《光学学报》, 1985, **5**, No. 2 (Feb), 128~134.

## Optical multi-stability and instability for $\text{CO}_2$ laser with feedback $Q$ -switching

CHEN LIXUE, MA AIQUN AND LI CHUNFEI

*(Department of Applied Physics, Harbin Institute of Polytechnlogy)*

(Received 25 February 1987; revised 25 May 1987)

### Abstract

It has been found that the optical bistability and multi-stability of  $\text{CO}_2$  laser can be realized when an electro-optical modulator is inserted into the cavity of the laser to change the  $Q$ -value of the laser by opto-electric signal proportional to output intensity of the laser. The mathematic model for the laser has been set up which is described by three nonlinear first-order differential equations. Its steady state model shows the characteristics of bistability and multi-stability which is confirmed by theoretical analysis and numerical calculation.

**Key words:** feedback  $Q$ -switching, optical multi-stability, instability.