第8卷 第2期
1988年2月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 8, No. 2
February, 1988

光压缩态的相位涨落

孙万钧 马爱群
(哈尔滨工业大学应用物理系)

提 要

本文对光场压缩态的相位涨落进行了计算，得出$(\Delta\cos\phi)^2$和$(\Delta\sin\phi)^2$的表达式。压缩分量的涨落与相位涨落同时压缩。

关键词：压缩态；相位涨落；相位算符。

一、引 言

压缩态的一些特性已被广泛地研究[1~4]，并在实验上实现了压缩态的观察与测量[5]。它的特性是电场的一个正交分量的涨落产生压缩，伴随另一个正交分量的涨落产生膨胀。这一特性预示了它的应用前景[6]。

本文采用Susskid等和Loudon[7]关于相位算符的定义及公式，讨论了压缩态的相位涨落，得出相位涨落的表达式。发现相应于电场的压缩分量的相位涨落也压缩，膨胀分量的相位涨落也膨胀。我们认为光的压缩态相位涨落的压缩与电场分量涨落的压缩有联系。

二、压缩算符与压缩真空态

压缩态可由平移算符与压缩算符作用于真空态而构成[1,3]。

$$|\alpha,\ \xi\rangle=D(\alpha)S(\xi)|0\rangle,\ D(\alpha)=\exp(\alpha a^{+}-\alpha^{*}a),$$

$$S(\xi)=\exp\left(\frac{1}{2}\xi^{*}a^{2}-\frac{1}{2}\xi a^{+2}\right)。\tag{1}$$

其中$\xi=r\exp(i\theta)$是压缩参量，r为大于零的实数。a和a^{+}是光子的湮灭与产生算符，满足玻色对易关系，

$$[a,\ a^{+}]=1。\tag{2}$$

(1)式还可以表示为[4]：

$$S(\xi)=\exp\left(-\frac{i\theta N}{2}\right)S(r)\exp\left(\frac{i\theta N}{2}\right),$$

$$S(r)=\exp\left(\frac{r}{2}a^{2}-\frac{r}{2}a^{+2}\right),$$

$$|\alpha,\ \xi\rangle=D(\alpha)\exp\left(-\frac{i\theta N}{2}\right)S(r)|0\rangle。$$

其中$N=a^{+}a$是粒子数算符。S为幺正算符，即$S^{+}=S^{-}$，$S^{+}S=1$。

收稿日期：1986年12月19日；收到修改稿日期：1987年4月24日

定义：

$$|0,\ \xi\rangle=\exp\left(-\frac{i\theta N}{2}\right)S(r)\,|0\rangle \tag{3}$$

为压缩真空态。其中[4]

$$\begin{aligned}S(r)\,|0\rangle&=\exp\left(\frac{r}{2}a^2-\frac{r}{2}a^{+2}\right)|0\rangle\\&=\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\operatorname{th}r)^n(2n)\,!^{1/2}}{n\,!\,2^n}\,|2n\rangle。\end{aligned} \tag{4}$$

单模光子场的电场算符为[3]：

$$\begin{aligned}E&=E_0a\exp(-i\omega t+i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x})+E_0a^+\exp(i\omega t-i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x})\\&=E^+\cos(\omega t-\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x})+E_-\sin(\omega t-\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x})。\end{aligned} \tag{5}$$

$$\left(E_+=E_0(a^++a),\ \ E_-=iE_0(a^+-a),\ \ E_0=\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0V}\right)^{1/2}。\right.$$

ω 是单模光子场的频率，ε_0 是真空电容率，V 为光子场空间体积。E_+ 与 E 分别为电场的两个正交分量的振幅算符。由(2)式可得出对易关系 $[E_+,\ E_-]=E_+E_--E_-E_+=2iE_0^2$, E_+ 与 E_- 的测不准关系为：$(\varDelta E_+)(\varDelta E_-)\geqslant E_0^2$。其中 $(\varDelta E_\pm)^2=\langle E_\pm^2\rangle-\langle E_\pm\rangle^2$ 为电场正交分量的涨落。如果有：

$$(\varDelta E_+)(\varDelta E_-)=E_0^2,\quad 且\quad \varDelta E_+<E_0\quad 或\quad \varDelta E_-<E_0。 \tag{6}$$

则光子场处于压缩态[3]。不难验证压缩真空是光子场的一种压缩态。

利用变换关系[1]：$S^+(\xi)aS(\xi)=a\operatorname{ch}r-a^+e^{i\theta}\operatorname{sh}r$, $S^+(\xi)a^+S(\xi)=a^+\operatorname{ch}r-ae^{-i\theta}\operatorname{sh}r$；可得

$$\begin{aligned}&\langle 0,\ \xi\,|E_+|\,0,\ \xi\rangle=\langle 0,\ \xi\,|E_-|\,0,\ \xi\rangle=0,\\&\langle 0,\ \xi\,|E_+^2|\,0,\ \xi\rangle=E_0^2\left(e^{2r}\sin^2\frac{\theta}{2}+e^{-2r}\cos^2\frac{\theta}{2}\right),\\&\langle 0,\ \xi\,|E_-^2|\,0,\ \xi\rangle=E_0^2\left(e^{2r}\cos^2\frac{\theta}{2}+e^{-2r}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)。\end{aligned}$$

E_+ 与 E_- 的涨落为：

$$\begin{aligned}(\varDelta E_+)^2&=E_0^2\left(e^{2r}\sin^2\frac{\theta}{2}+e^{-2r}\cos^2\frac{\theta}{2}\right),\\(\varDelta E_-)^2&=E_0^2\left(e^{2r}\cos^2\frac{\theta}{2}+e^{-2r}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)。\end{aligned} \tag{7}$$

真空态的正交分量的涨落为：$(\varDelta E_+)_0^2=(\varDelta E_-)_0^2=E_0^2$。由(7)式可见，$\theta=0,\ 2\pi$ 时，

$$(\varDelta E_+)^2=E_0^2e^{-2r},\ (\varDelta E_-)^2=E_0^2e^{2r},\ (\varDelta E_+)(\varDelta E_-)=E_0^2,\ \varDelta E_+<E_0,\ \varDelta E_->E_0。 \tag{8}$$

由(6)式可知，此时压缩真空态是压缩态，且 E_+ 分量压缩，E_- 分量膨胀。

$\theta=\pi$ 时，

$$(\varDelta E_+)^2=E_0^2e^{2r},\qquad (\varDelta E_-)^2=E_0^2e^{-2r}。 \tag{9}$$

同样是压缩态，E_- 分量压缩，E_+ 分量膨胀。当 $\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$ 时

$$(\varDelta E_+)^2=(\varDelta E_-)^2=\frac{1}{2}E_0^2(e^{2r}+e^{-2r}),$$

不出现压缩。由此可见压缩参量的模 r 及相位角 θ 在压缩态形成中的作用。同时由式(8)、(9)也可看出，压缩分量的涨落低于真空态电场正交分量的涨落。

三、相位算符与压缩真空的相位涨落

采用 Susskid 和 Loudon[7]关于光子场相位算符的定义，

$$\begin{aligned}\cos\phi&=\frac{1}{2}[\exp(i\phi)+\exp(-i\phi)],\\ \sin\phi&=\frac{1}{2i}[\exp(i\phi)-\exp(-i\phi)]。\end{aligned}\tag{10}$$

其中

$$\exp(i\phi)=(N+1)^{-\frac{1}{2}}a,\quad \exp(-i\phi)=a^{+}(N+1)^{-\frac{1}{2}}。\tag{11}$$

(11)对粒子数态的作用结果是[8]

$$\left.\begin{aligned}\exp(i\phi)|n\rangle&=|n-1\rangle\quad(n\neq0),\\ &=0\qquad\quad(n=0);\\ \exp(-i\phi)|n\rangle&=|n+1\rangle。\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

由(12)可证

$$\exp(i\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n+1|,\quad \exp(-i\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}|n+1\rangle\langle n|。\tag{13}$$

利用(10)、(13)各式容易证明相位算符的对易关系$[\cos\phi,\ \sin\phi]=\frac{i}{2}|0\rangle\langle0|$，测不准关系：

$$\Delta\cos\phi\,\Delta\sin\phi\geqslant\frac{1}{4}|\langle\psi|0\rangle\langle0|\psi\rangle|,\tag{14}$$

根据(13)、(3)、(4)各式可得

$$\left.\begin{aligned}&\langle0,\ \xi|\exp(i\phi)|\xi,\ 0\rangle=\langle0,\ \xi|\exp(-i\phi)|0,\ \xi\rangle=0,\\ &\langle0,\ \xi|\exp(i\phi)\exp(-i\phi)|0,\ \xi\rangle=1,\\ &\langle0,\ \xi|\exp(-i\phi)\exp(i\phi)|0,\ \xi\rangle=1-\mathrm{sech}\,r;\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}&\langle0,\ \xi|\exp(-i\phi)\exp(-i\phi)|0,\ \xi\rangle=-\mathrm{sech}\,re^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{th}\,r)^{2n+1}(2n)!^{\frac{1}{2}}(2n+2)!^{\frac{1}{2}}}{n!\,(n+1)!\,2^{2n+1}},\\ &\langle0,\ \xi|\exp(i\phi)\exp(i\phi|0,\ \xi\rangle=-\mathrm{sech}\,re^{-i\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{th}\,r)^{2n+1}(2n)!^{\frac{1}{2}}(2n+2)!^{\frac{1}{2}}}{n!\,(n+1)!\,2^{2n+1}}。\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

(16)式中的无穷级数相邻项之比的极限为

$$q=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{th}^2 r}{2}\sqrt{1+\frac{n}{n+1}+\frac{2n+1}{n+2}}\right)<1。\tag{17}$$

故无穷级数收敛，可用一公比为$\beta\,\mathrm{th}^2 r$的等比级数表示

$$\sum\frac{(\mathrm{th}\,r)^{2n+1})2n)!^{\frac{1}{2}}(2n+1)!^{\frac{1}{2}}}{n!\,(n+1)!\,2^{2n+1}}=\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{th}\,r}{2(1-\beta\,\mathrm{th}^2 r)}。\tag{18}$$

其中β为一参数，由(17)式可确定$0.612<\beta<1$。

根据定义式(10)，利用(15)、(16)及(18)式可得

$$\left.\begin{aligned}&\langle 0,\ \xi|\cos\phi|0,\ \xi\rangle=\langle 0,\ \xi|\sin\phi|0,\ \xi\rangle=0,\\&\langle 0,\ \xi|(\cos\phi)^2|0,\ \xi\rangle=\frac{1}{4}\left[2-\operatorname{sech}r\left(1+\frac{\sqrt{2}\,\operatorname{th}r}{1-\beta\,\operatorname{th}^2r}\cos\theta\right)\right],\\&\langle 0,\ \xi|(\sin\phi)^2|0,\ \xi\rangle=\frac{1}{4}\left[2-\operatorname{sech}r\left(1-\frac{\sqrt{2}\,\operatorname{th}r}{1-\beta\,\operatorname{th}^2r}\cos\theta\right)\right]。\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

由(19)式得压缩真空态的相位涨落为

$$\left.\begin{aligned}&(\varDelta\cos\phi)^2=\frac{1}{4}\left[2-\operatorname{sech}r\left(1+\frac{\sqrt{2}\,\operatorname{th}r}{1-\beta\,\operatorname{th}^2r}\cos\theta\right)\right],\\&(\varDelta\sin\phi)^2=\frac{1}{4}\left[2-\operatorname{sech}r\left(1-\frac{\sqrt{2}\,\operatorname{th}r}{1-\beta\,\operatorname{th}^2r}\cos\theta\right)\right]。\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

四、压缩态相位涨落的性质

虽然(20)式是压缩真空态的相位涨落的表达式，但是当 $\theta=0,\ \pi,\ 2\pi$ 时，由(8)、(9)式可知压缩真空处于压缩态。因而可根据(20)式的结果讨论压缩态相位涨落的性质。

当 $\theta=0,\ 2\pi$ 时，由(8)式知 E_+ 分量压缩，E_- 分量膨胀，由(20)式得

$$\left.\begin{aligned}&(\varDelta\cos\phi)^2=\frac{1}{4}\left[2-\operatorname{sech}r\left(1+\frac{\sqrt{2}\,\operatorname{th}r}{1-\beta\,\operatorname{th}^2r}\right)\right],\\&(\varDelta\sin\phi)^2=\frac{1}{4}\left[2-\operatorname{sech}r\left(1-\frac{\sqrt{2}\,\operatorname{th}r}{1-\beta\,\operatorname{th}^2r}\right)\right]。\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

当 $\theta=\pi$ 时，由(9)式知 E_- 分量压缩，E_+ 分量膨胀，由(20)式得

$$\left.\begin{aligned}&(\varDelta\cos\phi)^2=\frac{1}{4}\left[2-\operatorname{sech}r\left(1-\frac{\sqrt{2}\,\operatorname{th}r}{1-\beta\,\operatorname{th}^2r}\right)\right],\\&(\varDelta\sin\phi)^2=\frac{1}{4}\left[2-\operatorname{sech}r\left(1+\frac{\sqrt{2}\,\operatorname{th}r}{1-\beta\,\operatorname{th}^2r}\right)\right]。\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

由(21)、(22)式明显看出，E_+ 分量的压缩与膨胀伴随 $\cos\phi$ 的压缩与膨胀。E_- 分量的压缩与膨胀伴随 $\sin\phi$ 的压缩与膨胀。根据电场算符表达式(5)，可以认定 $\cos\phi$ 是 E_+ 分量的相位，$\sin\phi$ 是 E_- 分量的相位。由此可认为压缩态出现时，电场的压缩分量的相位涨落也压缩，而膨胀分量的相位涨落也膨胀。压缩态是相位敏感的量子态，相位的压缩是产生压缩态的因素。

五、相位压缩态

根据(14)式，取 $|\psi\rangle=|0,\ \xi\rangle$ 可得 $\varDelta\cos\phi\,\varDelta\sin\phi\geqslant\frac{1}{4}\operatorname{sch}r$；当取 $r\ll1$，二级近似下，$\varDelta\cos\phi\,\varDelta\sin\phi\geqslant\frac{1}{4}\left(1-\frac{r^2}{2}\right)$。同样由(22)式得

$$\left.\begin{aligned}&(\varDelta\cos\phi)^2=\frac{1}{4}\left[1-\sqrt{2}\,r+\frac{r^2}{2}\right]<\frac{1}{4}\left(1-\frac{r^2}{2}\right),\\&(\varDelta\sin\phi)^2=\frac{1}{4}\left[1+\sqrt{2}\,r+\frac{r^2}{2}\right]>\frac{1}{4}\left(1-\frac{r^2}{2}\right)。\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

由(23)式得

$$\Delta\cos\phi\,\Delta\sin\phi=\frac{1}{4}\left(1-\frac{r^2}{2}\right) \tag{24}$$

根据(23)、(24)式可得出结论，弱压缩真空态($r\ll1$)不仅是电场的压缩态，而且也是相位压缩态。

六、结 论

压缩真空是一种压缩态，对压缩真空的相位涨落的讨论有助于对压缩态相位涨落行为的认识。根据本文计算的压缩真空相位涨落的公式，得出压缩态电场正交分量的压缩与膨胀伴随相应的相位的压缩与膨胀的结论。并指出弱压缩真空态不仅是电场正交分量的压缩态，也是相位的压缩态，相位涨落的压缩与电场正交分量涨落的压缩有联系。

参 考 文 献

[1] J. N. Hollenhorst; *Phys. Rev. D*, 1979, **19**, No. 6 (Mar), 1669～1679.
[2] H. P. Yuen; *Phys. Rev. A*, 1976, **13**, No. 6 (Jun), 2226～2243.
[3] D. F. Walls; *Nature*, 1983, **306**, No. 5939 (Nov), 141～146.
[4] 范洪义，郭光灿；《光学学报》，1985, **5**, No. 9 (Sep), 804～811.
[5] R. E. Slusher, *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **55**, No. 22 (Nov), 2409～2412.
[6] B. G. Levi; *Phys. Today*, 1986, **39**, No. 3 (Mar), 17～19.
[7] R Loudon; "*The Quantum Theory of Light*", (Clarendon Press., Oxford, 1973), 140～143.

Phase fluctuation in squeezed states of light

SUN WANJUN AND MA AIQUN

(*Department of Applied Physics, Harbin Institute of Polytechnology*)

(Received 19 December 1986; revised 24 April 1987)

Abstract

The phase fluctuation in squeezed states of light are calculated and formulas of $(\Delta\cos\phi)^2$ and $(\Delta\sin\phi)^2$ are obtained. It has been found that the reduced fluctuation in squeezed quandrature of field are accompanied by the reduced fluctuation in phase.

Key words: squeezed state; phase fluctuation; phase operator.