

# 由傅里叶功率谱恢复物函数的研究

张 月 庄松林  
(上海光学仪器研究所)

## 提 要

相位恢复工作中, 针对物函数是实函数的情形, Fienup 算法取得了较大的成功。本文给出一新算法, 其收敛程度比 Fienup 算法更优。以天文学中双星情形为例, 比较了两种不同算法的结果。

关键词: 相位恢复; 最佳化; 光学傅里叶变换。

许多领域中, 经常遇到这样的问题: 对一个未知物体的信息知道甚少, 但光的 Fourier 变换的功率谱是知道的。如何从这些已知量来了解未知物体呢? 最先 Gerchberg 和 Saxton 解决了已知物体及其 Fourier 变换的振幅分布的情况下, 恢复物体的相位问题。但对于更普遍的、不知振幅分布的情形, 使用叠代法的 G-S 算法, 常常显得收敛甚慢, 或者根本不收敛。为解决此问题, J. R. Fienup 修正了 G-S 算法中的叠代过程, 使每一步叠代具有松弛的特性, 提高了收敛速度, 从而使这种算法实用得多。但是, 我们找到一种更为优越的新算法。

## 一、原 理

设物函数  $f(x)$  是实函数, 考虑这样的叠代过程(见图 1):

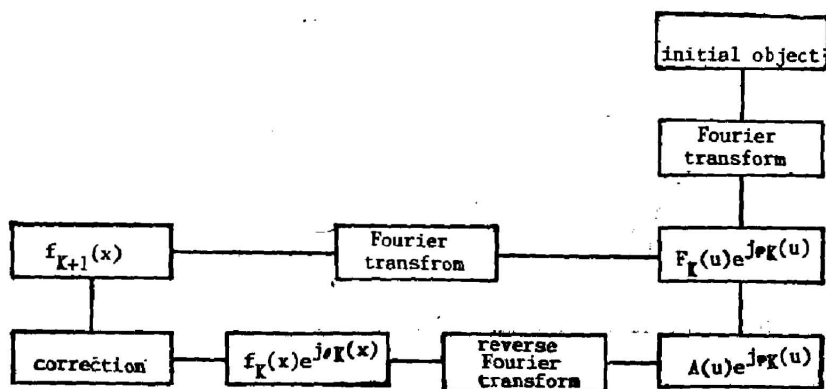


Fig. 1 Block diagram of the iterative transform algorithm

根据对未知物体甚少的信息, 构造一个初始物函数  $f_1(x)$ , 经 Fourier 变换, 得到

$$F_1(u) \exp[j\phi_1(u)] = (\Delta x) \sum f_1(x) \exp[-j2\pi xu]. \quad (1)$$

Fourier 平面上的振幅分布  $A(u)$  是已知的。因此, 保留相位成分  $\phi_1(u)$ , 而替代振幅成分, 变成新的函数  $A(u)\exp[j\phi_1(u)]$ , 再经一次逆 Fourier 变换得到  $f'_1(x)\exp[j\theta'_1(x)]$ :

$$f'_1(x)\exp[j\theta'_1(x)] = (\Delta u) \sum_u A(u)\exp[j\phi_1(u)]\exp(j2\pi ux). \quad (2)$$

再对  $f'_1(x)\exp[j\theta'_1(x)]$  加以约束, 得到的新函数作为下一次循环过程的初始值, 如此循环下去, 直到得到的函数与物函数吻合为止。显然, 如果不对  $f'_R(x)\exp[j\theta'_R(x)]$  加以修正, 则下一次循环的结果, 将不会有什么改变。

物平面的约束条件包括已确知了的物体的信息。此外还有更重要的一点, 就是如何选择新的函数  $f_{R+1}(x)$ , 而使叠代的收敛速度更快。实践中发现, 这样的选择是非常有益的。

取,

$$f_{R+1}(x) = \begin{cases} f'_R(x) + h_R[f'_R(x) - f'_{R-1}(x)], & x \notin \tau, \\ \alpha_R[f'_R(x) - \beta_R f'_R(x)], & x \in \tau. \end{cases} \quad (3)$$

这里,  $\tau$  代表物平面上的信息已被确知了的区域。

以上式看到, 如果  $h_R=0$ ,  $\alpha_R=0$ , 则(3)式还原到 G-S 算法。如果  $h_R=0$ ,  $\alpha_R=1$ , 则变成 Fienup 算法。

通过多次尝试, 证实了这个方法更加有效。

## 二、讨 论

我们所要考察的物函数如图 2 所示, 这是一种双星模型。与其对应的 Fourier 平面上的振幅分布示于图 3, 这是完全确知了的信息。我们的目的是利用图 3 的知识来得到图 2 的物函数。当然, 要从物体 Fourier 谱的振幅分布来直接得到物函数是办不到的。事实上, 在缺少 Fourier 平面的相位成分的情况下, 从逆 Fourier 变换, 根据图 3 只能得到图 4 中的曲线。这与物函数相差甚远。



Fig. 2 Object function

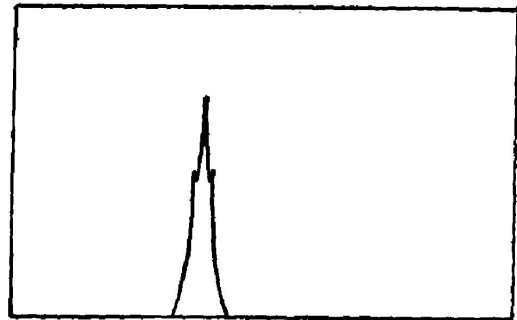


Fig. 3 Fourier modulus

由于振幅与相位存在着固有的内在联系, 尽管对相位信息一无所知, 只要经过有效的运算, 还是能够将物函数恢复出来的。

在运算过程中, 我们的采样点取为  $N=128$ , 用 FFT 进行。

物函数区域的大小, 可以根据其自相关函数的尺寸得到。而其自相关函数是可以简单地求得的, 只要对 Fourier 平面上的强度分析作一次 Fourier 变换即可。至于物体在物平

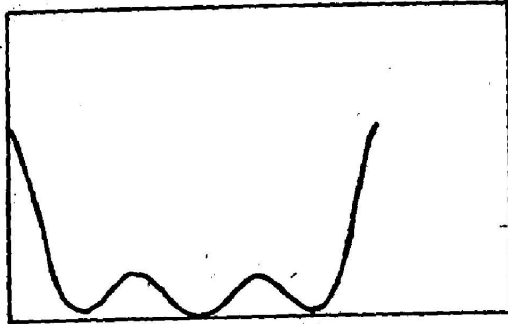


Fig. 4 The amplitude distribution of inverse Fourier transform without phase factor



Fig. 5 Output after one iteration

面上的具体位置是无关紧要的,它对恢复物函数形状是没有影响的。因为物体在物平面上的位置的移动,其结果只相当于 Fourier 平面上增加一常数相位因子,而相位因子在测量强度分布时总要消失掉。

为了比较,把初始物函数  $f_1(x)$  限制在和真实物函数相对应的位置。假设在此区域,物函数的大小是随其坐标位置成正比。利用这样的  $f_1(x)$ ,作第一次循环运算,得到图 5 中的曲线。与图 2 相比,虽然具备一些基本的特征,但相差还是很远。为体现新算法比 Fienup 算法的优越性,在以后的每次叠代中,分别使用两种算法作比较。图 6 所示的结果,“F”、“N”分别表示 Fienup 算法和新算法的结果。由图看出,每经过数次循环,无论是利用新算法,还是 Fienup 算法,结果都会得到不同程度的改善。然而改善的程度不一样。新算法只要 15 次循环就可接近真实物函数;而 Fienup 算法经过 20 次后还存在畸变。

需要说明的是,这里的目的是说明新算法对于 Fienup 算法的优越性。为比较起见,在使用这两种算法时,其相应的松弛因子保持相同,并在整个叠代过程中保持不变。然而对于一个实际的问题,采取的方法并不是这样。如何选取松弛因子的大小呢?对于通常的松弛叠代法,估计参数的数值是有规律可循的;但现在的问题与前者并不同,利用那样方法得出的松弛因子数值,对于现在叠代问题的收敛性,没有任何积极意义,而且还要花费大量的计算时间。因此,更为实用的方法还是凭经验,这也是许多其他学者所遵循的道路。亦即根据先前数次叠代的结果及松弛因子的大小,来决定下几次的  $h_k$  与  $\beta_k$  的数值,但有一点是明确的,即  $h_k$  与  $\beta_k$  的取值范围在  $(0, 1)$  之间。

叠代过程的收敛特性,一般是用误差因子来表示的。误差因子定义为:

$$\epsilon_k = \frac{\sum |f_k(x)|}{\sum |f_0(x)|} \quad (4)$$

Fourier 平面上的振幅分布是由物平面上  $\omega \in r$  区域的信息,与  $\omega \notin r$  区域的信息共同作用的结果。因此一般来说,在运算过程中, $\omega \in r$  区域的结果与  $\omega \notin r$  区域的结果是相互联系着的。当把一个区域的结果确定下来以后,另一个区域的结果也就随之真实地被确定。我们知道, $\omega \notin r$  区域安置的是物函数;而  $\omega \in r$  区域的函数大小为零,这是事先知道的。因此按照 (4) 式定义的误差因子的大小,真实地描述了恢复了的物函数与真实函数的差别。

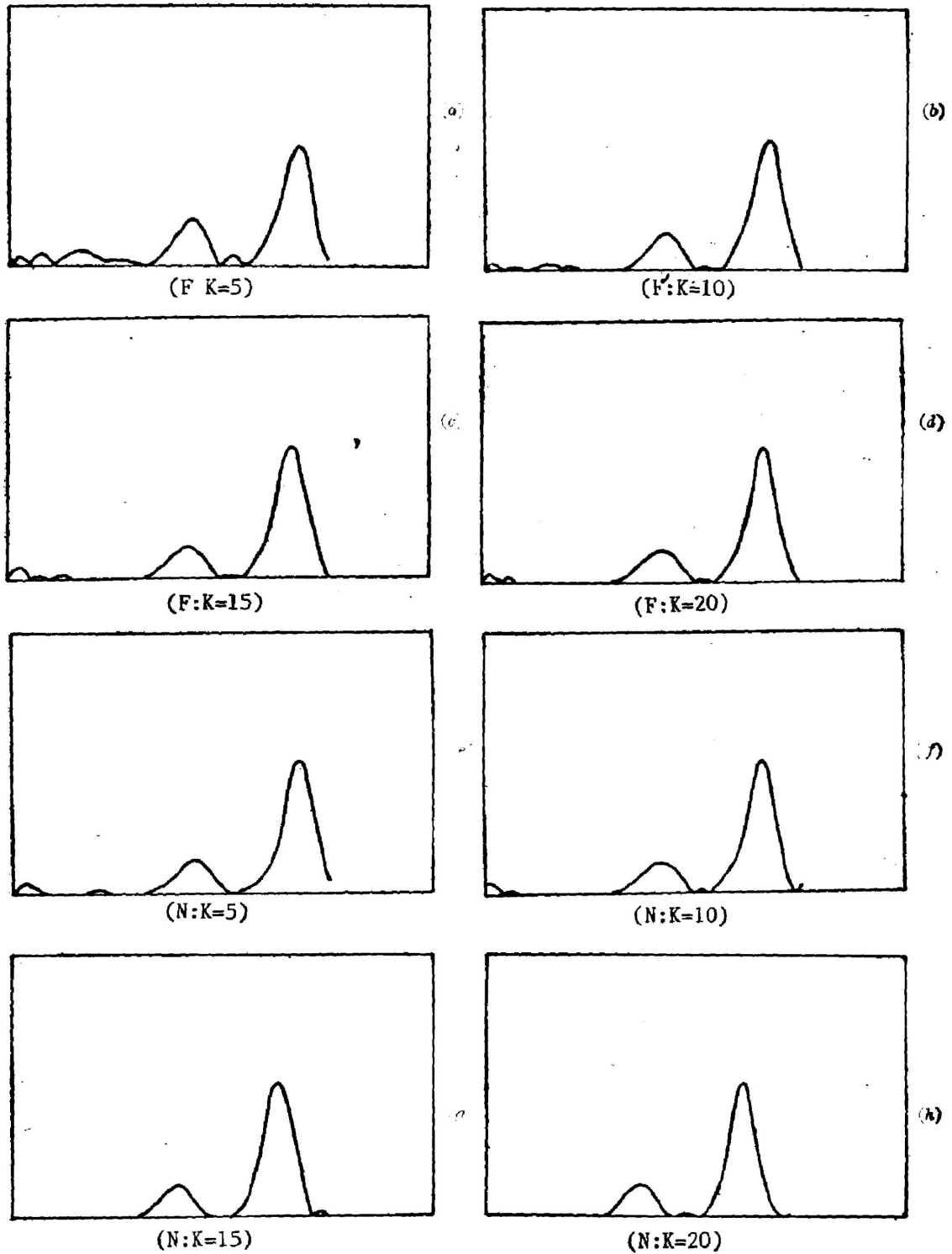


Fig. 6 Comparison between new algorithm and Fienup algorithm.  
 (a)~(d) output image after 5, 10, 15, 20 iterations using Fienup algorithm. (e)~(h) output image after 5, 10, 15, 20 iterations using new algorithm. (N: new; F: Fienup)

在图 7 中, 给出了分别使用 G-S 算法, Fienup 算法以及新算法所得到的误差因子  $\epsilon_k$  随叠代次数的关系曲线。

图 7 中的曲线是用对数表示的。曲线(i) G-S 算法, 在  $k=10$  以后  $\epsilon_k^{G-S}$  就变化缓慢了, 基本上停滞在  $10^{-3}$  数量级上; 曲线(ii) Fienup 算法,  $\epsilon_k^F$  在  $k>5$  以后便小于  $\epsilon_k^{G-S}$  一倍以上, 但当  $k=10$  以后,  $\epsilon_k^F \sim k$  的关系呈现出曲折性的特性。这就是说, Fienup 算法在此方法开始实行以后的数次叠代中是行之有效的, 但当叠代次数增多以后, 优势便逐渐丧失。这就注定了 Fienup 算法的使用特性: 不能长期使用, 必须与 G-S 算法交替使用; 然而新算法在很大程度上克服了这些缺点,  $\epsilon_k^N$  开始便迅速下降, 经过  $k=8$  到  $k=12$  这段平缓期后, 再一次迅速下降至  $10^{-5}$  量级。只是在  $k>17$  以后, 才又略有回升, 并趋向平稳。这一点实际上是松弛叠代方法中共有的不足。然而叠代过程中松弛因子的适当选择, 原则上可使误差因子下降到极限值。

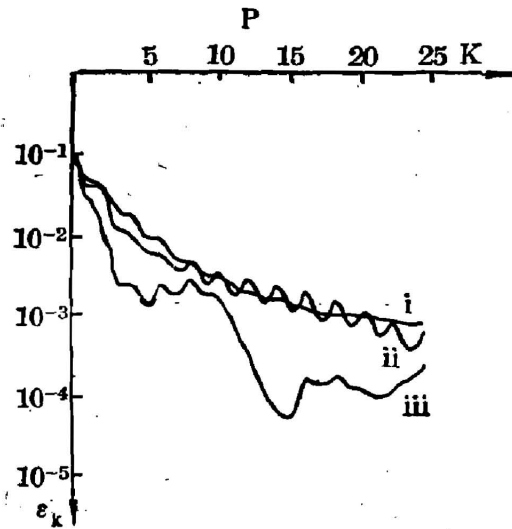


Fig. 7 Error curves

### 三、结 论

物函数的恢复问题实际上就是相位的恢复问题。本文中所讨论的实际上就是在只对光场的强度作一次测量的前提下, 如何高精度并且是迅速地来恢复光场的相位分布。实际上, 收敛速度的提高必然会提高恢复的精度。对于实际问题, 由于其复杂性, 为了得到完好的结果, 单单靠运算速度的提高是不能解决问题的。最重要的是使一些看起来不收敛, 或收敛很慢的问题变得收敛, 这才是解决问题的关键。

### 参 考 文 献

- [1] J. R. Fienup; *Opt. Lett.*, 1978, 3, No. 1 (Jul), 27~29.
- [2] J. R. Fienup; *ICO-13 Conference Digest*, (Sapporo, Japan 1984), 606~609.

## **A study on reconstruction of the object function from Fourier power spectrum**

ZHANG YUE AND ZHUANG SONGLIN  
(*Shanghai Institute of Optical Instruments*)

(Received 19 June 1987; revised 14 December 1987)

### **Abstract**

Phase retrieval problem is one of the most important projects in modern optics. Among many iterative methods, Fienup algorithm had made a great success. In present paper we describe a new method which has been demonstrated to be more practical than Fienup algorithm, by which an original object can be reconstructed from a single intensity measurement—the modulus of Fourier-transform. Precisely like Fienup algorithm, the new algorithm is still an iterative Fourier-transform method, however, the convergence of the new method is much faster than that of the previous method. The two-star model is adopted as the example of object function, and the calculation results obtained by using two different algorithms have been compared in detail.

**Key words:** phase retrieval; optimization; optical Fourier transform.