

# 部分相干光栅衍射效应和干涉术\*

刘 立 人

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

## 提 要

本文提出一种新的部分相干照明的光栅衍射干涉仪。先分析了光栅的介于 Talbot 和 Lau 效应之间的部分相干衍射效应。部分相干干涉图的特点是条纹由频率成倍的两道光栅状载波所表征。调整光源狭缝, 系统在两相干性极端分别转成 Talbot 和 Lau 干涉仪。理论分析采用了模糊函数方法。最后给出了实验。

关键词: 光栅; 部份相干; 干涉术; Talbot 和 Lau 效应。

## 一、引 言

光栅的自成像效应近些年来已引起广泛注意, 在相干光照明下可构成 Talbot 干涉仪<sup>[1,2]</sup>, 在扩展非相干照明下可构成 Lau 干涉仪<sup>[3~6]</sup>。

介于 Talbot 效应和 Lau 效应之间的部分相干衍射效应已有报道<sup>[7,8]</sup>, 但是, 我们研究了实现介于 Talbot 效应和 Lau 效应之间的部分相干现象的结构和理论<sup>[9]</sup>, 发现了部分相干光栅衍射干涉条纹的剖面分布函数随光栅间的相对位移而变化的新现象, 基此, 本文提出能实现部分相干光栅衍射效应的干涉仪测量法。简单地控制照明狭缝, 在两极端下就是 Talbot 干涉法和广义 Lau 干涉法。

这种新干涉仪的另一显著特点是被测相位物上出现的干涉条纹是以两种频率不同、但成倍的光栅分布状的光栅衍射干涉条纹为表征的。显然是一种完全新型的干涉条纹。此外, 较 Talbot 干涉仪而言, 部分相干干涉法能充分利用非相干光源而增加亮度。比较广义 Lau 干涉法, 则不需要附加第三块光栅进行零级莫尔条纹解调。

## 二、系统原理简介

图1是所建议的结构, 扩展光源与聚焦在狭缝  $SL$  上, 狭缝位于准直镜  $L_1$  的焦点上。由 Van Cittert-Zernike 定律可知这将对光栅  $g_1$  产生部分相干照明。滤色片  $F$  为原理上保证照明的准单色性。被测相位物体  $O$  置于周期相同的两个光栅中间, 并由透镜  $L_2$  成像在观察屏上。显然当狭缝极窄对产生相干照明, 系统为 Talbot 干涉仪。而狭缝趋于无限大时为非相干照明, 这是广义 Lau 干涉仪。狭缝宽度在这两极端之间时为部分相干照明, 为部分相干光栅衍射干涉仪。

收稿日期: 1988年元月19日; 收到修改稿日期: 1988年3月21日

\* 本文工作由国家自然科学基金资助。

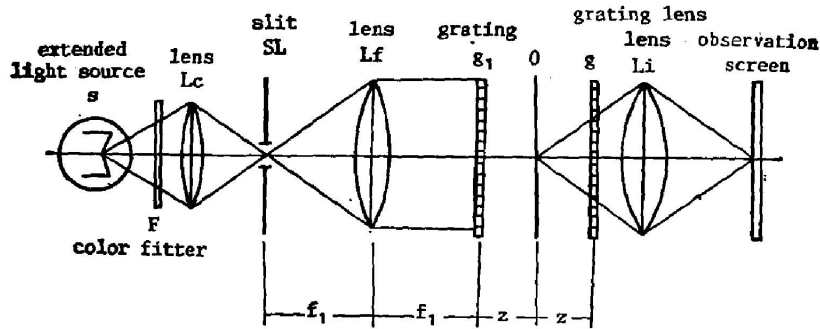


Fig. 1 Basic configuration of the grating-diffraction interferometer with partially coherent illumination.

### 三、理 论

我们采用以空频差  $\Delta\nu$  和坐标位置差  $\Delta x$  表示的模糊函数来分析这种部分相干光学系统<sup>[10~12]</sup>。模糊函数的几何光学传递特性简化了系统分析。但是某些运算可能丢失常数项<sup>[10]</sup>，这并不影响最终结果的正确性。由于光栅栅条方向与狭缝一致，而且均属一维函数，因此系统可作一维分析近似。

设狭缝开口宽度为  $h_0$ ，则可记作

$$I_s(x) = I_0 \text{rect}\left(\frac{x}{h_0}\right). \quad (1)$$

相应的模糊函数为

$$A_s(\Delta\nu, \Delta x) = I_0 h_0 \text{sinc}(h_0 \Delta\nu) \delta(\Delta x). \quad (2)$$

经透镜傅里叶变换，相当于传递矩阵  $\begin{bmatrix} 0 & 1/\lambda f \\ -\lambda f & 0 \end{bmatrix}$ ，则第一光栅  $g_1$  上的照明为

$$A_1^{(+)}(\Delta\nu, \Delta x) = \frac{I_0 h_0}{\lambda f_1} \text{sinc}\left(\frac{h_0 \Delta x}{\lambda f_1}\right) \delta(\Delta\nu). \quad (3)$$

其实  $g_1$  可放在透镜  $L_f$  后的任何位置上，因为这时照明光仍由 (3) 式描述。

周期为  $T$ ，开口为  $h$  和中心偏移为  $d$  的光栅函数定义为：

$$g(x) = \sum_n \text{rect}\left(\frac{x - nT - d}{h}\right). \quad (4)$$

其模糊函数为<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} A_g(\Delta\nu, \Delta x) = & \sum_n \sum_m \left\{ \frac{h}{T} \Lambda\left(\frac{\Delta x - 2mT}{h}\right) \text{sinc}\left[\Delta\nu h \Lambda\left(\frac{\Delta x - 2mT}{h}\right)\right] \right. \\ & \left. + (-1)^m \frac{h}{T} \Lambda\left(\frac{\Delta x - (2m+1)T}{h}\right) \text{sinc}\left[\Delta\nu h \Lambda\left(\frac{\Delta x - (2m+1)T}{h}\right)\right] \right\} \\ & \times \exp(-2\pi i d \Delta\nu) \delta\left(\Delta\nu - \frac{n}{T}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

照明光通过光栅  $g_1$  相当于卷积操作：

$$\begin{aligned} A_1^{(+)}(\Delta\nu, \Delta x) = & \frac{I_0 h_0}{\lambda f_1} \text{sinc}\left(\frac{h_0 \Delta x}{\lambda f_1}\right) \int \delta(\Delta\nu') A_g(\Delta\nu - \Delta\nu', \Delta x) d\Delta\nu' \\ = & \frac{I_0 h_0}{\lambda f_1} \text{sinc}\left(\frac{h_0 \Delta x}{\lambda f_1}\right) A_g(\Delta\nu, \Delta x). \end{aligned} \quad (6)$$

通过  $z$  距离相当于操作矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda z & 1 \end{bmatrix}$ , 因此在物面上有

$$A_0^{(-)}(\Delta\nu, \Delta x) = \frac{I_0 h_0}{\lambda f_1} \operatorname{sinc}\left(h_0 \frac{\Delta x - \lambda z \Delta\nu}{\lambda f_1}\right) A_p(\Delta\nu, \Delta x - \lambda z \Delta\nu). \quad (7)$$

被测物体的相位变化以准几何光学近似表达<sup>[5]</sup>, 则  $\operatorname{grad}_x(\phi(x, y)) = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_*(x, y) \simeq \frac{2\pi}{\lambda} \theta_*(x, y)$ . 这里  $\theta_*$  代表光线在  $x$  轴向上的偏转角. 因此相位物的模糊函数可以记作

$$\begin{aligned} A_{ob}(\Delta\nu, \Delta x) &= \int \exp\left[j\phi\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \exp\left[-j\phi\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \exp(2\pi i \Delta\nu x) dx \\ &= \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda} i \theta_* \Delta x\right) \delta(\Delta\nu). \end{aligned} \quad (8)$$

则在物体后

$$A_0^{(+)}(\Delta\nu, \Delta x) = \frac{I_0 h_0}{\lambda f_1} \operatorname{sinc}\left(h_0 \frac{\Delta x - \lambda z \Delta\nu}{\lambda f_1}\right) A_p(\Delta\nu, \Delta x - \lambda z \Delta\nu) \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda} i \theta_* \Delta x\right). \quad (9)$$

同样再经过  $z$  距离并且通过第二光栅  $g_2$  后有

$$\begin{aligned} A_2^{(+)}(\Delta\nu, \Delta x) &= \frac{I_0 h_0}{\lambda f_1} \int \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda} i \theta_* (\Delta x - \lambda z \Delta\nu')\right) \operatorname{sinc}\left(h_0 \frac{\Delta x - 2\lambda z \Delta\nu'}{\lambda f_1}\right) \\ &\quad \times A_p(\Delta\nu', \Delta x - 2\lambda z \Delta\nu') A_p(\Delta\nu - \Delta\nu', \Delta x) d\Delta\nu'. \end{aligned} \quad (10)$$

第二光栅到观察屏相当于传递矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M & 1/\lambda f_2 \\ 0 & -1/M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M & 1/\lambda f_2 \\ -M\lambda z & z/f_2 - 1/M \end{bmatrix}.$$

$M$  为成像放大倍数, 则在观察屏上

$$\begin{aligned} A_{obs}(\Delta\nu, \Delta x) &= \frac{I_0 h_0}{\lambda f_1} \int \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda} i \theta_* [(z/f_2 - 1/M) \Delta x - M\lambda z \Delta\nu - 2\lambda z \Delta\nu']\right) \\ &\quad \times \operatorname{sinc}\left(h_0 \frac{(z/f_2 - 1/M) \Delta x - M\lambda z \Delta\nu - 2\lambda z \Delta\nu'}{\lambda f_1}\right) \\ &\quad \times A_p(\Delta\nu', (z/f_2 - 1/M) \Delta x - M\lambda z \Delta\nu - 2\lambda z \Delta\nu') \\ &\quad \times A_p\left(-M\Delta\nu + \frac{\Delta x}{\lambda f_2} - \Delta\nu'(z/f_2 - 1/M) \Delta x - M\lambda z \Delta\nu\right) d\Delta\nu'. \end{aligned} \quad (11)$$

由此可求得观察屏上的光强分布

$$\begin{aligned} I(x) &= \int A_{ob}(\Delta\nu, 0) \exp(2\pi i \Delta\nu x) d\Delta\nu \\ &= \frac{I_0 h_0}{\lambda f_1} \iint \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda} i \theta_* (-M\lambda z \Delta\nu - \lambda z \Delta\nu')\right) \operatorname{sinc}\left(h_0 \frac{-M\lambda z \Delta\nu - 2\lambda z \Delta\nu'}{\lambda f_1}\right) \\ &\quad \times A_p(\Delta\nu', -M\lambda z \Delta\nu - 2\lambda z \Delta\nu') A_p(-M\Delta\nu - \Delta\nu', -M\lambda z \Delta\nu) \\ &\quad \times \exp(2\pi i \Delta\nu x) d\Delta\nu' d\Delta\nu. \end{aligned} \quad (12)$$

由(5)式, 考虑到  $A_p$  不为零的条件, 应使其空频差项满足

$$\Delta\nu' = n/T, \quad -M\Delta\nu - \Delta\nu' = K/T. \quad (13)$$

$n$  和  $K$  为整数.

令传播距离  $z$  满足傅里叶自成像条件, 即

$$z = PT^2/\lambda_0. \quad (14)$$

$P$  为正整数. 这时可见  $A_p$  中的位置差项为  $T$  的整数倍. 其中若为  $T$  的奇数倍时, 取负号,

与  $P$ 、 $n$  和  $K$  值有关。因此 (12) 式可化为级数和的表达形式

$$I(x) = \frac{I_0 h_0}{\lambda f_1} \sum_n \sum_K \sin c \left( \frac{h_0 z}{f_1 T} (n-K) \right) \frac{h_1}{T} \sin c \left( \frac{h_1 n}{T} \right) \exp \left( -2\pi i \frac{d_1 n}{T} \right) (-1)^{n(P)n-K(+2Pn)} \\ \times \frac{h_2}{T} \sin c \left( \frac{h_2 K}{T} \right) \exp \left( -2\pi i \frac{d_2 K}{T} \right) (-1)^{2P(n+K)} \exp \left( 2\pi i \theta_z \frac{K}{T} \right) \\ \times \exp \left( -2\pi i \frac{x}{M} \frac{n+K}{T} \right). \quad (15)$$

其中注意到  $n$  和  $K$  的奇偶数关系, 有

$$(-1)^{n(P)(n+K)-2Pn} (-1)^{K P(n+K)} = (-1)^{n^2 P} (-1)^{K^2 P} = (-1)^{n^2 P} (-1)^{K^2 P} = \theta^{+j} \pi n P \theta^{+j} \pi K P.$$

用傅里叶级数合成, 显然存在

$$\sum_n \frac{h_1}{T} \sin c \left( \frac{h_1 n}{T} \right) \exp \left( -2\pi i d_1 \frac{n}{T} \right) \exp(\pm \pi i n P) \exp \left( -2\pi i \frac{x}{M} \frac{n}{T} \right) \\ = \sum_n \operatorname{rect} \left( \frac{-\frac{x}{M} - nT - d_1 \pm \frac{PT}{2}}{h_1} \right), \\ \sum_n \sin c \left( \frac{h_0 z}{f_1 T} (n-K) \right) \exp \left( -2\pi i \frac{x}{M} \frac{n}{T} \right) \\ = \frac{T}{h'_0} \sum_n \operatorname{rect} \left( \frac{-\frac{x}{M} - nT}{h'_0} \right) \exp \left( -2\pi i \frac{x}{M} \frac{n}{T} \right).$$

这里  $h'_0$  表示等效光源宽度

$$h'_0 = h_0 z / f_1. \quad (16)$$

由周期函数傅里叶变换的卷积定理, (15) 式为

$$I(x) = \frac{I_0}{\lambda z} \int_{c-\frac{T}{2}}^{c+\frac{T}{2}} \sum_n \operatorname{rect} \left( \frac{-\frac{\alpha}{M} - nT}{h_0} \right) \sum_n \operatorname{rect} \left( \frac{-\frac{x-\alpha}{M} - nT - d_1 \pm \frac{PT}{2}}{h_1} \right) \\ \times \sum_K \left\{ \frac{h_1}{T} \sin c \left( \frac{h_2 K}{T} \right) \exp \left( -2\pi i \frac{d_2 K}{T} \right) \exp \left( 2\pi i \theta_z \frac{z K}{T} \right) \right. \\ \left. \times \exp \left( -2\pi i \frac{\alpha}{M} \frac{K}{T} \right) \exp \left( -2\pi i \frac{x}{M} \frac{K}{T} \right) \right\} d \frac{\alpha}{M}.$$

最终的光强表达式为三函数的联合相关-卷积积分:

$$I(x) = \frac{I_0}{\lambda z} \int_{c-\frac{T}{2}}^{c+\frac{T}{2}} \sum_n \operatorname{rect} \left( \frac{-\alpha - nT}{h'_0} \right) \sum_n \operatorname{rect} \left( \frac{-\frac{x}{M} + \alpha - nT - d_1 \pm \frac{PT}{2}}{h_1} \right) \\ \times \sum_n \operatorname{rect} \left( \frac{-\frac{x}{M} - \alpha - nT - d_2 \pm \frac{PT}{2} + \theta_z z}{h_2} \right) d \alpha. \quad (17)$$

其中  $c$  为任意实数。

#### 四、介于 Talbot 和 Lau 效应之间的部分相干效应

若不考虑被测物体, 本系统事实上也是一种实现介于 Talbot 效应和 Lau 效应之间部分相干光栅衍射干涉效应的装置。

### 1. Talbot 效应

若狭缝无限窄, 则

$$\lim_{h_0 \rightarrow 0} \sum_n \frac{1}{h_0} \text{rect}\left(\frac{-\alpha - nT}{h_0}\right) = \sum_n \delta(-\alpha - nT).$$

则光强分布成为

$$I(x) = \frac{I_0 h_0}{\lambda f_1} \sum_n \text{rect}\left(\frac{-\frac{x}{M} - nT - d_1 \pm \frac{PT}{2}}{h_1}\right) \sum_n \text{rect}\left(\frac{-\frac{x}{M} - nT - d_2 \pm \frac{PT}{2}}{h_2}\right). \quad (18)$$

相当于两个光栅分别通过  $z$  传播后自成像的乘积。自成像光栅的周期为

$$T_i = MT. \quad (19)$$

### 2. Lau 效应

若狭缝无限大, 则产生广义 Lau 条纹

$$I(x) = \frac{I_0}{\lambda z} \int \sum_n \text{rect}\left(\frac{-\frac{x}{M} + \alpha - nT - d_1 \pm \frac{PT}{2}}{h_1}\right) \sum_n \text{rect}\left(\frac{-\frac{x}{M} - \alpha - nT - d_2 \pm \frac{PT}{2}}{h_2}\right) d\alpha. \quad (20)$$

Lau 条纹周期为

$$T_i = MT/2. \quad (21)$$

### 3. 部分相干效应

随等效宽度  $h_0'$  变化将出现多种部分相干条纹, 几种典型情况讨论如下:

a. 当  $h_0'$  是  $T$  整数倍时 (17) 式定积分相当于 (20) 式在有限个整数周期内积分。此时部分相干条纹剖面与 Lau 条纹的相同, 不过强度很低且与  $h_0'$  的  $T$  周期数成正比。

b. 当  $h_0' = T/2$  时 随光栅间相对应位移  $d_2 - d_1$  将出现不同的部分相干条纹。图 2 所示  $h_0' = h_1 = h_2 = \frac{T}{2}$  条件下  $|d_2 - d_1| = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}$  的三种典型条纹剖面分布。即随光栅相对位移增加, 周期性平行条纹中将出现第二组周期性条纹, 直至成为频率增加一倍的新条纹。这里, 部分相干条纹的周期分别为

$$T_p = MT, MT/2. \quad (22)$$

由此可见, 当  $h_0'$  为  $T$  整倍加上  $T/2$  时, 产生弱光强 Lau 条纹与上述典型的部分相干条纹的叠加。

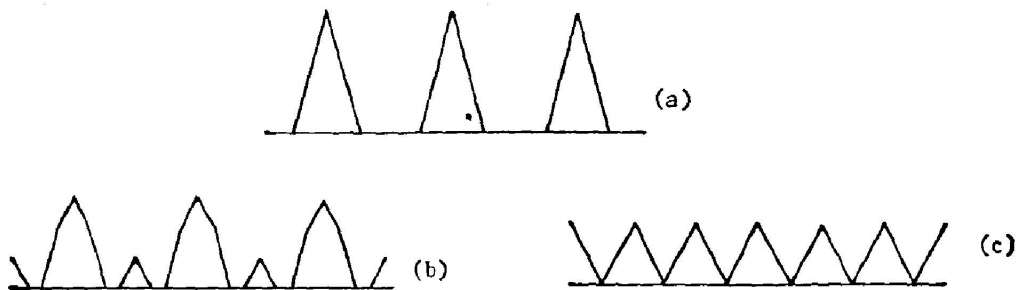


Fig. 2 Profiles of typical partially coherent diffraction fringes with  $h_0' = T/2$

(a)  $|d_2 - d_1| = 0$ , (b)  $|d_2 - d_1| = T/4$  and (c)  $|d_2 - d_1| = T/2$

## 五、部分相干光栅衍射干涉法

由(17)式可见,被测物的相位变化等效于使第二等效光栅产生  $\theta_{az}$  的相对位移。对相位梯度产生等位线条纹,相当于横向剪切干涉。

当狭缝无限窄时,由(18)式代入  $\theta_{az}$  项。就是 Talbot 干涉法。相位梯度条纹以莫尔差频条纹表现。

当狭缝无限大时,由(20)式代入  $\theta_{az}$  项。就是 Lau 干涉法。相位梯度引起平行 Lau 条纹的变形。零级条纹能用附加光栅以莫尔差频条纹的形式解调出来。

由上节分析可知,部分相干时选择  $h'_0 = \frac{T}{2}$  将产生最易观察的、随光栅间相对位移的变化的频率成倍的两组衍射干涉条纹。这时相位梯度的等位线条纹将由频率成倍的两组衍射干涉细条纹表征。

## 六、实 验

实验采用图 1 的布置。滤色片产生中心  $\sim 6000 \text{ \AA}$  的红光,准直镜  $f=185 \text{ mm}$ , 成像镜  $f=135 \text{ mm}$  且放大 2 倍。两光栅均为  $T=0.2 \text{ mm}$  和  $h=0.1 \text{ mm}$ 。由此设计  $P=1$ , 即  $z \approx 66 \text{ mm}$ 。等效光源宽度  $h'_0=0.1 \text{ mm}$ , 则相应狭缝宽度  $h=0.28 \text{ mm}$ 。

图 3(a), (b), (c) 分别为  $|d_2-d_1|=0, T/4, T/2$  时的光栅衍射干涉条纹。与理论预言图 2 所示完全一致。其它预言的现象也能正确地观察到。

被测物如玻璃管。图 4 是  $h'_0=T/2$  时部分相干照明产生的物体干涉图。显然可见物体的干涉图是以两种频率成倍的细条纹所构成。当  $h_0 \rightarrow 0$  时的 Talbot 莫尔干涉图和当  $h_0 \rightarrow$

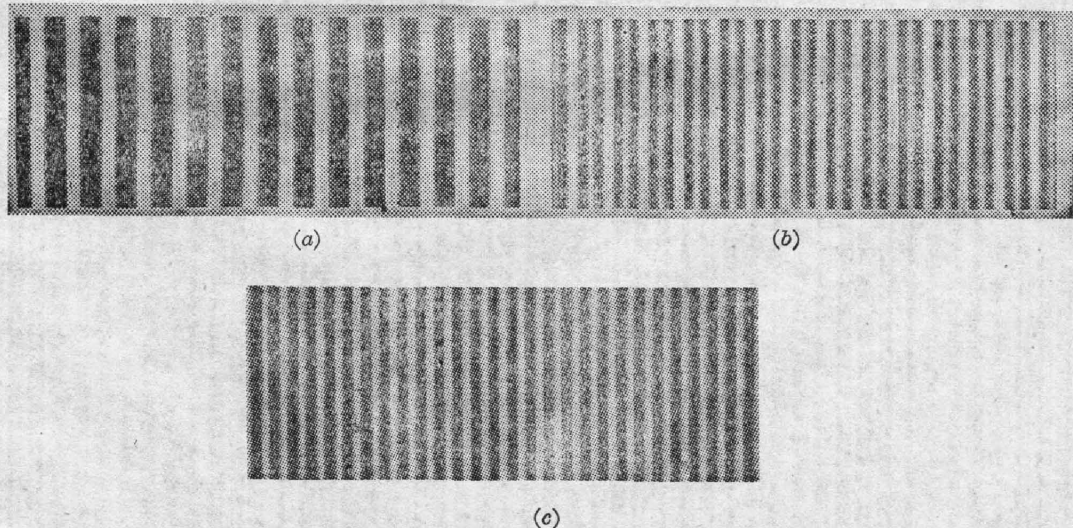


Fig. 3 Experimental verifications of the predictions shown in Fig. 2 (a), (b) and (c), respectively

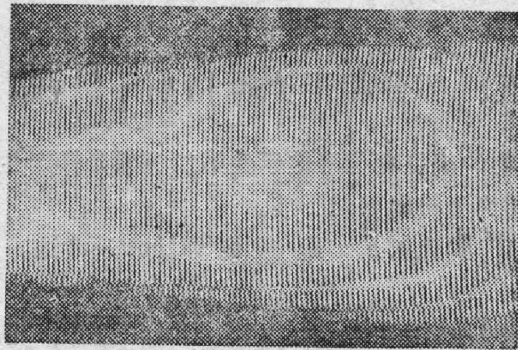


Fig. 4 Interferograms of a tested glass tube in the partially coherent diffraction interferometer when  $h'_0 = T/2$

$\infty$  时的零级解调广义 Lau 干涉图, 都具有相同的结果。

采用白光源时, 能观察到带彩色的干涉图。

#### 参 考 文 献

- [1] D. E. Silva; *Appl. Opt.*, 1972, **11**, No. 11 (Nov), 2613~2624.
- [2] H. J. Rabal *et al.*; *Opt. Comm.*, 1986, **57**, No. 2 (Feb), 81~83.
- [3] H. O. Bartelt, J. Jahns; *Opt. Comm.*, 1979, **30**, No. 3 (Sep), 268~274.
- [4] S. Cartwright, J. Lightman; *Appl. Opt.*, 1986, **25**, No. 18 (Sep), 3141~3145.
- [5] 刘立人;《物理学报》, 1986, **35**, No. 12 (Dec), 1556~1566.
- [6] L. Liu; *Appl. Opt.*, 1983, **22**, No. 19 (Oct), 3024~3030.
- [7] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castaneda; *Optica Acta*, 1983, **30**, No. 4 (Apr), 457~479.
- [8] G. Indebetow; *Optica Acta*, 1984, **31**, No. 5 (May), 531~539.
- [9] 刘立人; 待发表。
- [10] A. Papoulis; *J. Opt. Soc. Am.*, 1974, **64**, No. 6 (Jun), 779~788.
- [11] K. H. Brenner, J. Ojeda-Castaneda; *Optica Acta*, 1984, **31**, No. 2 (Feb), 213~225.
- [12] 刘立人;《光学学报》, 1987, **7**, No. 6 (June), 501~510.

## Grating-diffraction effect and interferometry with partially coherent illumination

LIU LIREN

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*)

(Received 19 January 1988; revised 21 March 1988)

### Abstract

In this paper, a new grating-diffraction interferometry with partially coherent illumination is proposed. As a foundation, the partially coherent diffraction effect of gratings between the Talbot and the Lau effects is firstly treated. A new type of interferogram is resulted in such a new interferometer, that is characterized by two gratinglike carriers of doubled spatial frequency. Simply by the adjustment of the source slit the interferometer will become the Talbot interferometer and the Lau interferometer, respectively, at the two extremes of illumination coherence. The performance of the system is analysed by the ambiguity function. Experiments are given too.

**Key words:** grating; partial coherence; interferometry; Talbot and Lau effects.