

# 4F 傅里叶变换系统粒子场测量的探讨

刘志刚 叶梓丰 王家骅  
(南京航空学院)

## 提 要

本文发现在三维粒子场全息测量中,经4F傅里叶变换,位于系统前焦平面前、后的粒子,在后焦平面的光场分布呈共轭关系。对记录景深和确定粒子空间位置不利。当4F系统采用放大形式,可提高粒子的衍射环可辨度和再现边缘的对比度。但放大倍数大于4,会使粒子记录和再现质量下降。

关键词: 粒子; 4F变换系统; 可辨度; 对比度。

在测量粒子场中粒子大小和空间位置时,广泛应用激光全息技术<sup>[1,2]</sup>。为了详细记录粒子场,常采用透镜组把物场转换到试验装置外。4F傅里叶变换透镜组是近几年兴起的测量粒子场常用的转换系统<sup>[3,4]</sup>。但目前利用普通光学平面透射体在4F系统中的变换特性来研究三维粒子场,仅处理焦平面上的一层粒子<sup>[4]</sup>,限制了4F系统在粒子场全息测量中的应用。本文探讨了4F系统在三维粒子场测量中,对粒子记录光强分布,衍射环可辨度及再现过程中粒子边缘对比度的影响。

## 一、粒子在4F系统中的记录过程

从粒子场中取出任一粒子,讨论它所发出的物光波经4F系统后,在系统后焦平面上的分布。如图1所示。

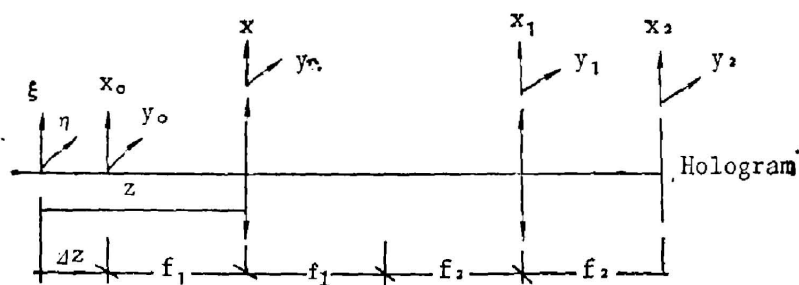


Fig. 1 Configuration of 4F system for holography recording

设记录照明光为平行光,光场振幅为1。并设粒子为透光的薄圆盘。

$$A(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & (\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq a) \\ 0, & (\sqrt{\xi^2 + \eta^2} > a) \end{cases} \quad (1)$$

透过粒子的物光波分布为

$$u_0(\xi, \eta) = \exp(jk2a) A(\xi, \eta) \quad (2)$$

当粒子从 $(\xi, \eta)$ 平面衍射到第一个透镜 $(x, y)$ 平面时, 它的物光场分布为

$$u(x, y) = -\frac{j}{\lambda z} \iint_{\Sigma} u_0(\xi, \eta) \exp\left\{\frac{jk}{2z}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\right\} d\xi d\eta \quad (3)$$

经 4F 系统变换, 在系统后焦平面 $(x_2, y_2)$ 上, 粒子的物光场分布, 经整理为

$$\begin{aligned} u(x_2, y_2) = & -\frac{1}{\lambda^2 f_2 z} \iint_{\Sigma_1} u_0(\xi, \eta) \left[ \iint_{\Sigma} \exp\left\{\frac{j\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f_1}\right) (x^2 + y^2)\right\} \right. \\ & \times \exp\left\{-\frac{2\pi j}{\lambda} \left[\left(\frac{\xi}{z} - \frac{x_0}{f_1}\right)x + \left(\frac{\eta}{z} - \frac{y_0}{f_1}\right)y\right]\right\} dx dy \left. \right] \\ & \times \exp\left\{\frac{j\pi}{\lambda} \left[\frac{1}{z}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{f_1}(x_0^2 + y_0^2)\right]\right\} d\eta d\xi \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_0 = -(f_1/f_2)x_2, \\ y_0 = -(f_1/f_2)y_2. \end{cases} \quad (5)$$

当粒子位于系统前焦平面时,  $z=f_1$ 。注意 4F 系统各坐标系之间的关系, (4) 式正好是粒子透射函数  $A(\xi, \eta)$  的反傅里叶变换

$$u(x_2, y_2) = -\frac{1}{\lambda^2 f_1 f_2} F^{-1} F [A(\xi, \eta)] = -\frac{1}{\lambda^2 f_1 f_2} A(\xi, \eta) \quad (6)$$

表明在 4F 系统后焦平面上, 物光场的分布是原来粒子放大或缩小  $f_1/f_2$  倍的倒立实像。但它的光场振幅减弱了  $1/\lambda^2 f_1 f_2$  倍。

当粒子不在 4F 系统前焦平面时, (4) 式中

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \exp\left\{\frac{j\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f_1}\right) (x^2 + y^2)\right\} \exp\left\{-\frac{2\pi j}{\lambda} \left[\left(\frac{\xi}{z} - \frac{x_0}{f_1}\right)x + \left(\frac{\eta}{z} - \frac{y_0}{f_1}\right)y\right]\right\} dx dy \\ & = -\frac{f_1 z \lambda}{j(f_1 - z)} \exp\left\{-\frac{j\pi f_1 z}{\lambda(f_1 - z)} \left[\left(\frac{\xi}{z} - \frac{x_0}{f_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{z} - \frac{y_0}{f_1}\right)^2\right]\right\} \quad (7) \end{aligned}$$

若粒子位于 4F 系统前焦平面以外

$$z - f_1 = \Delta z > 0 \quad (8)$$

(7) 式代回 (4) 式, 则 4F 系统后焦平面上的物光场分布为

$$u(x_2, y_2) = \frac{j f_1}{\lambda^2 |f_1 - z|} \iint_{\Sigma} A(\xi, \eta) \exp\left\{\frac{j\pi}{\lambda |\Delta z|} [(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2]\right\} d\xi d\eta \quad (9)$$

比较在此条件下, 4F 系统前焦平面上的物光场分布

$$u(x_0, y_0) = \frac{-j}{\lambda \Delta z} \iint_{\Sigma} A(\xi, \eta) \exp\left\{\frac{j\pi}{\lambda \Delta z} [(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2]\right\} d\xi d\eta \quad (10)$$

可见 4F 系统后焦平面的粒子物光场是前焦平面的倒立物光场, 但光场振幅受到放大形式  $f_1/f_2$  的制约。

当粒子位于系统前焦平面之内,  $\Delta z < 0$ , 后焦平面的粒子物光场分布为

$$u(x_2, y_2) = -\frac{j f_1}{\lambda f_2 |\Delta z|} \iint_{\Sigma} A(\xi, \eta) \exp\left\{\frac{-j\pi}{\lambda |\Delta z|} [(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2]\right\} d\xi d\eta \quad (11)$$

比较(9)、(11)式可知,位于系统前焦平面前、后的粒子,当它们距前焦平面的距离  $\Delta z$  相同时,它们之间的物光场分布呈共轭复数关系。

## 二、讨 论

### 1. 4F 系统对三维粒子场记录的影响

光场振幅为 1 的参考光经 4F 系统变换

$$u_r(x_2, y_2) = (f_1/f_2)^2. \quad (12)$$

于是在系统后焦平面的全息干板上,参考光与物光干涉,其光场分布为

$$u_0(x_2, y_2) = u(x_2, y_2) + u_r(x_2, y_2). \quad (13)$$

所记录的粒子光强分布

$$\begin{aligned} I(x_2, y_2) &= u_0(x_2, y_2)u_0^*(x_2, y_2) \\ &= \left[ (f_1/f_2)^2 + \frac{jf_1}{\lambda f_2 |\Delta z|} \right] \iint_{-\infty}^{\infty} A(\xi, \eta) \exp\left\{ \frac{j\pi}{\lambda |\Delta z|} [(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2] \right\} d\xi d\eta \\ &\quad \times \left[ (f_1/f_2)^2 - \frac{jf_1}{\lambda f_2 |\Delta z|} \right] \iint_{-\infty}^{\infty} A(\xi, \eta) \exp\left\{ \frac{-j\pi}{\lambda |\Delta z|} [(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2] \right\} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (14)$$

因此,对于位于系统前焦平面前、后相同距离的粒子,由(9)、(11)、(14)式可知,它们的光强分布相同。若用再现平面波照射全息图,它们的再现波场分布在距全息干板  $z_0$  处为

$$u(x_3, y_3) = -\frac{j}{\lambda z_0} \iint_{-\infty}^{\infty} I_2(x_2, y_2) \exp\left\{ \frac{j\pi}{\lambda z_0} [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2] \right\} dx_2 dy_2. \quad (15)$$

表明位于系统前焦平面前、后的粒子,由于再现波场相同,它们的实际空间位置在再现过程中被混淆。

由以上分析可知,采用 4F 变换系统,所记录的是系统前焦平面上以及以前焦平面为中心的前、后一定空间范围的粒子。但是,粒子经变换所具有的共轭关系,相对地加大了同一记录空间范围内的粒子密度,使记录的粒子景深和分辨率受粒子密度加大的影响而下降。

比较(6)、(9)、(11)式可知,前焦平面上的粒子的光场振幅经转换衰减了  $1/\lambda f_1 f_2$  倍,与放大形式无关,而非前焦平面的粒子光场振幅经转换的变化,则与放大形式有关。4F 系统的这些性质,不仅可利用放大来改变粒子记录和再现的质量,也造成全息图上光强分布差别较大的现象。

### 2. 粒子在 4F 系统中的远场衍射模式

当位于系统非前焦平面上的粒子满足远场衍射条件时,粒子在系统后焦平面上的物光场

$$u(x_2, y_2) = \frac{jkf_1}{f_2 \Delta z} \exp\left[ \frac{jkR^2}{2\Delta z} \right] \left( \frac{d}{2} \right)^2 \left[ \frac{J_1\left( \frac{kdR}{2\Delta z} \right)}{\frac{kdR}{2\Delta z}} \right]. \quad (16)$$

$$R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \quad (17)$$

由(14)式,全息干板所记录的光场强度为

$$I(x_2, y_2) = (f_1/f_2)^4 + (f_1/f_2)^3 \frac{d^2 \pi}{2\lambda \Delta z} \sin\left(\frac{\pi R^2}{\lambda \Delta z}\right) \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi d R}{\lambda z}\right)}{\frac{\pi d R}{\lambda z}} \right] \\ + (f_1 \pi / f_2 \lambda \Delta z)^2 (d/2)^4 \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi d R}{\lambda z}\right)}{\frac{\pi d R}{\lambda z}} \right]^2. \quad (18)$$

可见经4F系统变换后,全息记录的背景和粒子衍射的光强分布以及所记录的粒子空间频率发生变化。 $x_2$ 方向的空间频率

$$\xi_2 = -\frac{x_0}{\Delta z \lambda} = \frac{f_1 x_0}{f_2 \Delta z \lambda}. \quad (19)$$

采用放大形式后,空间频率下降,对提高记录分辨率、减缓对记录材料的要求,起到了积极的作用。此外,在全息记录材料所允许的空间频率内,采用放大形式也相应地扩大粒子与记录干板之间所允许的距离,增大了所记录的景深。但从(16)式可知,为了不损失所能记录的信息,要求记录干板的面积也相应地增大。

当4F系统采用缩小的形式,空间频率增大,降低了分辨率。

### 3. 粒子在4F系统中衍射环的可辨度

全息记录小粒子,主要是记录粒子的衍射环。而且所记录的衍射环的质量决定了再现粒子的质量。当衍射环的可辨度与噪声相比而不充分时,要改变粒子大小的信息。

由粒子衍射环可辨度的定义

$$V(z_2) = |I_{\max} - I_{\min}| / (I_{\max} + I_{\min}). \quad (20)$$

$$I_{\max} = 1/\alpha^4 + (1/\alpha^3) \frac{\pi}{2N} \left[ \frac{2J_1(\pi z_2)}{\pi z_2} \right] + (1/\alpha^2) \frac{\pi^2}{16N^2} \left[ \frac{2J_1(\pi z_2)}{\pi z_2} \right]^2, \quad (21)$$

$$I_{\min} = 1/\alpha^4 - (1/\alpha^3) \frac{\pi}{2N} \left[ \frac{2J_1(\pi z_2)}{\pi z_2} \right] + (1/\alpha^2) \frac{\pi^2}{16N^2} \left[ \frac{2J_1(\pi z_2)}{\pi z_2} \right]^2. \quad (22)$$

$$\begin{cases} N = \lambda \Delta z / d^2, \\ z_2 = dR / \lambda \Delta z, \\ \alpha = f_2 / f_1. \end{cases} \quad (23)$$

因此,4F系统变换下的粒子衍射环可辨度

$$V(z_2) = \frac{1}{\alpha} \frac{\pi}{2N} \left[ \frac{2J_1(\pi z_2)}{\pi z_2} \right] / \left( 1/\alpha^2 + \frac{\pi^2}{16N^2} \left[ \frac{2J_1(\pi z_2)}{\pi z_2} \right]^2 \right). \quad (24)$$

粒子衍射模式的第一环内占有大部分的衍射光能,反映了所记录的粒子信息质量。由(24)式得第一环的衍射可辨度

$$V(0) = \pi / 2N\alpha / (1/\alpha^2 + \pi^2 / 16N^2). \quad (25)$$

图2表示了中心亮环可辨度在不同的放大倍数下,随远场数的变化。当放大倍数 $\alpha=1$ ,可辨度随远场数增大而迅速下降,只有当远场数 $N>\delta$ ,下降趋势才平稳。 $\alpha>1$ 时,在一定的小远场数范围内可辨度小于 $\alpha=1$ 的可辨度。但随远场数增大,粒子可辨度迅速增加,并超出 $\alpha=1$ 的可辨度,下降趋势也较平稳。中心亮环可辨度在不同 $\alpha$ 的变化,解释了未放大时,粒子远场数稍大,衍射环就不易分辨的原因。也表明采用放大后,可分辨的粒子远场数增

大,所记录的粒子景深增加。但  $\alpha$  过大, (18) 式中第三项的影响增大,可辨度低的小远场数范围扩大,而且下降幅值较大,这对粒子的记录不利。因为经 4F 系统的变换,许多粒子是在小远场数范围被记录的。增大  $\alpha$ , 就减弱了这部分粒子的信息。

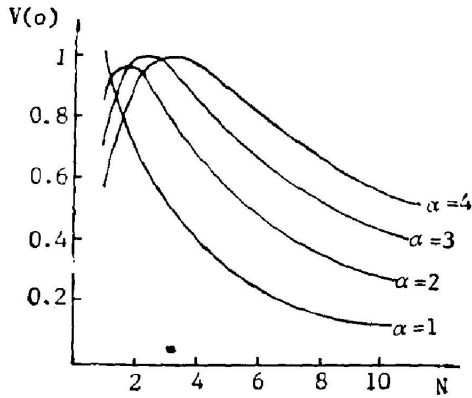


Fig. 2 The visibility of the first fringe with amplifying

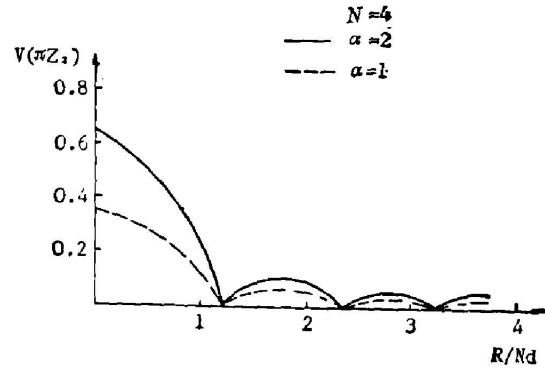


Fig. 3 The visibility of diffracted fringes with amplifying

图 3 是衍射环可辨度在不同  $\alpha$  下的变化。可见在一定的远场数内,  $\alpha$  大, 可辨度总是提高的。

#### 4. 粒子的再现过程

粒子记录的光强分布可整理为

$$I(x_2, y_2) = (1/\alpha^4) I_1(x_2, y_2), \quad (26)$$

$$I_1(x_2, y_2) = 1 + \frac{\alpha\pi}{2N} \sin\left(\frac{\pi R^2}{\lambda\Delta z}\right) \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi dR}{\lambda\Delta z}\right)}{\lambda\Delta z} \right] + \left(\frac{\alpha\pi}{4N}\right)^2 \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi dR}{\lambda\Delta z}\right)}{\frac{\pi dR}{\lambda\Delta z}} \right]^2, \quad (27)$$

以平行光照射记录干板。再现过程如图 4 所示。

设振幅透射率呈线性变化

$$t(x_2, y_2) = t_B - K I_1(x_2, y_2). \quad (28)$$

$t_B$  是  $t-E$  曲线上线性部分的截距。

当成像平面在  $\Delta z = z_0$  时, 它的光强分布为

$$\begin{aligned} u(x_3, y_3) &= -\frac{j}{\lambda z_0} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_2, y_2) \exp\left\{-\frac{jk}{2z_0} [(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2]\right\} dx_0 dy_0 \\ &= P + \alpha \text{circ}\left(\frac{r}{a}\right) - \exp[j(\pi r^2/2\lambda z_0 + \pi/2)] \frac{\alpha\pi}{8N} \left[ \frac{2J_1\left(\frac{kar}{z_0}\right)}{\frac{kar}{z_0}} \right] \\ &\quad - \frac{\alpha^2\pi^2}{16N^2} \left[ \frac{2J_1\left(\frac{kar}{z_0}\right)}{\frac{kar}{z_0}} \right]^2, \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$\begin{cases} P = \left(\frac{t_B}{k} - 1\right), \\ r = (x_3^2 + y_3^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (30)$$

$P$  是全息记录的平均曝光值。

由于 4F 系统的全息记录是靠近粒子场工作的, 许多小远场数的粒子都被记录下来。由文献 [5] 可知, 再现光强应考虑 (29) 式的所有项

$$\begin{aligned} I(x_3, y_3) = & \left[ P + \alpha \operatorname{circ}\left(\frac{r}{a}\right) \right]^2 + \left[ P + \alpha \operatorname{circ}\left(\frac{r}{a}\right) \right] \frac{\alpha\pi}{4N} \sin\left(\frac{\pi r}{8Na}\right) \\ & \times \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi r}{2Na}\right)}{\frac{\pi r}{2Na}} \right] - \left[ P + \alpha \operatorname{circ}\left(\frac{r}{a}\right) \right] \frac{\alpha^2\pi^2}{8N^2} \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi r}{2Na}\right)}{\frac{\pi r}{2Na}} \right]^2 \\ & + \frac{\alpha^2\pi^2}{64N^2} \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi r}{2Na}\right)}{\frac{\pi r}{2Na}} \right]^2 + \frac{\alpha^4\pi^4}{16^2N^4} \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi r}{2Na}\right)}{\frac{\pi r}{2Na}} \right]^4 \\ & - \frac{\alpha^3\pi^3}{64N^3} \sin\left(\frac{\pi r}{8Na}\right) \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi r}{2Na}\right)}{\frac{\pi r}{2Na}} \right]^3. \end{aligned} \quad (31)$$

在图像处理中, 粒子边缘对比度  $\theta = I_{\text{im}}/I_{\text{back}}$  具有很大意义, 尤其在采用图像自动识别粒子的处理过程中, 大的  $\theta$  有助于提高粒子处理的精度和速度。

4F 系统记录下的粒子再现背景光强为

$$\begin{aligned} I_{\text{back}} = & P^2 + P \frac{\alpha\pi}{4N} \sin\left(\frac{\pi}{8N}\right) \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{\frac{\pi}{2N}} \right] - P \frac{(\alpha\pi)^2}{8N^2} \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{\frac{\pi}{2N}} \right]^2 \\ & + \frac{(\alpha\pi)^2}{64N^2} \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{\frac{\pi}{2N}} \right]^2 + \left(\frac{\alpha\pi}{4N}\right)^4 \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{\frac{\pi}{2N}} \right]^4 \\ & - \frac{\alpha^3\pi^3}{4^3N^3} \sin\left(\frac{\pi}{8N}\right) \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{\frac{\pi}{2N}} \right]^3. \end{aligned} \quad (32)$$

粒子再现光强为

$$I_{\text{im}} = I_{\text{back}} + 2\alpha P + \alpha^2 + \frac{\alpha^2\pi}{4N} \sin\left(\frac{\pi}{8N}\right) \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{\frac{\pi}{2N}} \right] - \frac{\alpha^3\pi^3}{8N^2} \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{\frac{\pi}{2N}} \right]^2. \quad (33)$$

图 5 是远场数  $N=3$  的  $\theta$  随因子  $P$  的变化。可见  $\alpha=1$ ,  $\theta$  随  $P$  增加而急剧下降。 $\alpha=2$ ,  $\theta$  随  $P$  增大, 呈上升又下降的趋势。但  $\theta$  不如未放大的变化大, 且它的值较大。在  $P=0.1 \sim 0.3$  范围内,  $\alpha=4$  的  $\theta$  一直在增加, 但值较小。从小远场数下  $\theta$  与  $\alpha$  的关系, 采用放大形

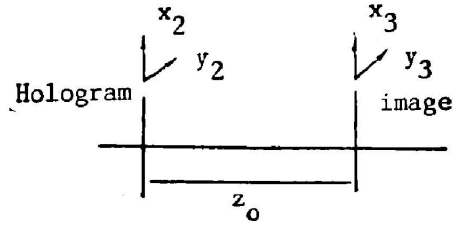


Fig. 4 Configuration of the holography reconstruction

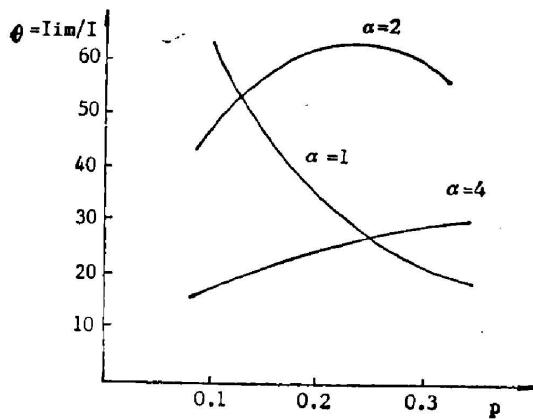


Fig. 5 Image-to-background intensity ratio with amplifying for  $N=3$

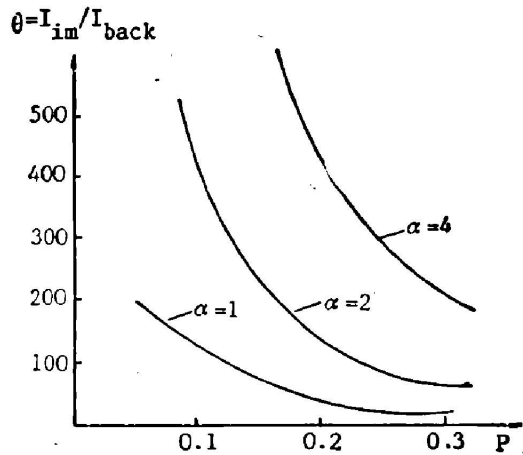


Fig. 6 Image-to-background intensity ratio with amplifying for  $N>8$

式对加大  $\theta$  值有好处, 工作范围可扩大。但  $\alpha>4$ ,  $\theta$  值下降较大, 不利于再现处理。 $\theta$  与  $\alpha$  的关系, 与记录过程中  $\alpha$  对粒子衍射环的影响是一致的。因此, 4F 系统选择  $\alpha$  值对粒子记录和再现都产生很大的影响。综合粒子记录和再现与  $\alpha$  值的关系, 建议在粒子场记录中,  $\alpha$  值宜选择 2~4。

当粒子的远场数大于 8, (31) 式可简化为

$$I(x_3, y_3) = \left[ P + \alpha \text{circ}\left(\frac{r}{a}\right) \right]^2. \quad (34)$$

图 6 表明在大远场数下,  $\alpha$  愈大,  $\theta$  愈大, 愈有利于图像识别。因此, 粒子远场数较大时, 采用大的  $\alpha$  值是有益的。

### 三、结 论

当用 4F 系统来记录粒子场, 位于系统前焦平面前的粒子经转换呈共轭关系, 对粒子记录景深和确定空间位置产生不利影响。当采用放大的 4f 系统, 提高了记录的分辨率和粒子衍射环的可辨度, 也加大了所记录的粒子景深, 使再现粒子的对比度有所改善。但放大倍数过大, 对粒子场记录, 再现都不利。在实际应用中, 应根据粒子场的特点, 采用合适的 4F 系统。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] B. J. Thompson; *J. Phys. (E)*, 1974, 7, No. 5 (Oct), 781~788.
- [ 2 ] Ewan; *Appl. Opt.*, 1980, 19, No. 8 (Apr), 1368~1372.
- [ 3 ] 何万祥; 《内燃机学报》, 1984, 2, No. 3 (July), 215~229.
- [ 4 ] 何万祥; 《内燃机学报》, 1985, 3, No. 1 (Feb), 49~62.
- [ 5 ] Chan S. Vikram; *Appl. Opt.*, 1984, 23, No. 18 (Sep), 3091~3094.

## Further analysis of 4F Fourier transform lens in holography measurement of particle field

LIU ZHIKANG, YE ZIFENG AND WANG JIAHUA  
(*Nanjing Aeronautical Institute*)

(Received 25 January 1988; revised 21 March 1988)

### Abstract

It has been found that the field distribution of the particles located between the back and front positions of the front focal plane of the 4F system has conjugate relationship with the back focal plane of the system through transformation of 4F Fourier lens system. This relationship has unfavourable effect on depth of field and determination of the particle position. The fringe visibility and edge contrast of the particles are improved by the amplifying of the lens system. However, the quality of the particle recording and reconstruction will be reduced if the amplifying of the system is beyond 4 times.

**Key words:** particle; 4F transformation system; Fringe visibility; edge contrast.