

一种实用成像系统像面动态散斑的空-时相关函数

彭 翔 马世宁 叶声华
(天津大学)

提 要

本文根据傅里叶光学和统计理论, 推导了一种实用的成像光学系统像面动态散斑的振幅及强度的空-时相关函数表达式, 并提出利用相干场混合法提取空-时强度相关的信息。
关键词: 动态散斑, 空-时相关函数。

一、引 言

最近, O'Donnell^[1]研究了焦平面附近动态散斑的空-时相关性质, Yoshimura^[2]对具有高斯软瞳的光学系统观察面上动态散斑的统计性质做了更详细的讨论。本文就他们没有涉及到的, 但在实用上又是非常重要的理想成像光学系统的像面动态散斑进行了分析, 推导了这种光学系统的动态散斑的空-时相关函数, 并讨论了强度相关信息的提取方法。

二、基本统计假设

在相干照明条件下, 从散射体上大量散射元反射的光波相互干涉, 由于位相差是一种随机过程, 则在远场形成散斑图样。如果散射体在运动着, 则所形成的是动态散斑, 它包含了物体的运动信息。这里给出目前已经被证实了的, 并与本文有关的几点结论:

1. 在一定的相干光照射下, 散斑的运动依赖于散射体的运动及所用的光学装置。
2. 动态散斑的光场服从圆型高斯统计。
3. 动态散斑的统计性质可由空-时相关函数来表达。

依据这些基本观点, 本文要对所给出的光学成像系统的像面动态散斑讨论其统计性质, 导出空-时相关函数表达式。

三、理想成像光学系统像面动态散斑振幅的空-时相关函数

成像系统如图1所示。令物距为 d_0 , 像距为 d_i , 并且满足透镜定律: $(1/d_0) + (1/d_i) = (1/f)$, 其中, f 是透镜 L 的焦距。

用单色平面波照明物体, 则入射波场可表示为

收稿日期: 1987年8月17日; 收到修改稿日期: 1988年1月3日

$$E(\mathbf{x}, t) = E_0 \exp\{-i[\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}]\}, \quad (1)$$

式中, $\mathbf{x} = (x, y)$ 是物面坐标, ω_0 是照明光波的角频率, \mathbf{k}_0 是照明光波的波矢, E_0 是常数值振幅。设散射体以速度矢 \mathbf{v} 在 XY 平面内运动, 并设散射体的微观结构仅改变照明光波的相位, 由此可以得到从散射体粗糙表面散射的光波场的表达式:

$$E'(\mathbf{x}, t) = E(\mathbf{x}, t) \exp\{i\phi(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)\}, \quad (2)$$

式中, $\phi(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$ 是一个随机函数, 为方便起见, 可令 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t$, 于是(2)式可以写成

$$E'(\mathbf{x}, t) = E(\mathbf{x}, t) \exp\{i\phi(\mathbf{x}')\}, \quad (3)$$

可以把式中的 $\phi(\mathbf{x}')$ 看成是随机的位相调制因子, 它与散射体的表面粗糙度有关。

由傅里叶光学可知, 成像光学系统是一种线性系统, 它的像面波场可以由下列叠加积分表达

$$E''(\mathbf{X}, t) = \int h(\mathbf{x}, \mathbf{X}) E'(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (4)$$

式中 $\mathbf{X} = (X, Y)$ 是像面坐标, $h(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ 是光学系统的脉冲响应。对于理想成像系统, 脉冲响应 $h(\mathbf{x}, \mathbf{X})$, 可以近似地写成^[4]

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \cong K \delta(\mathbf{X} \pm M\mathbf{x}), \quad (5)$$

式中正负号表示允许像是倒立成正立的; $M = (d_i/d_o)$ 是成像系统的放大率。利用(1)~(4)式, 我们可以得到像面动态散斑振幅的空-时相关函数一般表达式

$$\begin{aligned} & \langle E''(\mathbf{X}_1, t_1) E''^*(\mathbf{X}_2, t_2) \rangle \\ &= \left\langle \iint E'(\mathbf{x}'_1 + \mathbf{v}t_1, t_1) E'^*(\mathbf{x}'_2 + \mathbf{v}t_2, t_2) h(\mathbf{x}'_1 + \mathbf{v}t_1, \mathbf{X}_1) h^*(\mathbf{x}'_2 + \mathbf{v}t_2, \mathbf{X}_2) \right. \\ & \quad \left. \times \exp\{i[\phi(\mathbf{x}'_1) - \phi(\mathbf{x}'_2)]\} d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $\langle \dots \rangle$ 表示集平均。交换求平均与求积分的顺序, 并将(5)式和(1)式代入, 则得到理想成像系统像面动态散斑振幅的空-时相关函数为

$$\begin{aligned} \langle E''_1 E''_2^* \rangle &= \iint E_{01} \exp\{-i[\omega_0 t_1 - \mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{x}'_1 + \mathbf{v}t_1)]\} \\ & \quad \times E_{02} \exp\{i[\omega_0 t_2 - \mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{x}'_2 + \mathbf{v}t_2)]\} \cdot |K|^2 \delta[\mathbf{X}_1 \pm M(\mathbf{x}'_1 + \mathbf{v}t_1)] \delta[\mathbf{X}_2 \pm M(\mathbf{x}'_2 + \mathbf{v}t_2)] \\ & \quad \times \langle \exp\{i[\phi(\mathbf{x}'_1) - \phi(\mathbf{x}'_2)]\} \rangle d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2, \end{aligned} \quad (7)$$

以下要对积分中的 $\langle \exp\{i[\phi(\mathbf{x}'_1) - \phi(\mathbf{x}'_2)]\} \rangle$ 作一些统计分析。此处, 借助于 Karhunen-Loève 定理^[5], 将随机函数 $\phi(\mathbf{x})$ 用一个正交函数集 $\{\varphi_j(\mathbf{x})\}$ 展开成级数形式。于是, 有

$$\begin{aligned} \langle \exp\{i[\phi(\mathbf{x}'_1) - \phi(\mathbf{x}'_2)]\} \rangle &= \langle \exp\{i[\sum_j a_j \varphi_j(\mathbf{x}'_1) - \sum_j a_j \varphi_j(\mathbf{x}'_2)]\} \rangle \\ &= \langle \exp\{i \sum_j a_j [\varphi_j(\mathbf{x}'_1) - \varphi_j(\mathbf{x}'_2)]\} \rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_j \langle a_j^2 \rangle [\varphi_j(\mathbf{x}'_1) - \varphi_j(\mathbf{x}'_2)]^2\right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

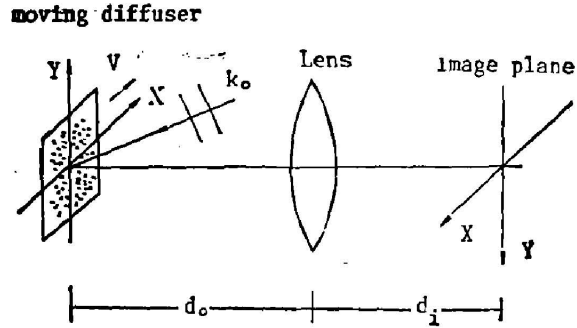


Fig. 1 Optical configuration

同样,还可以证明另一关系式

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_j\langle a_j^2\rangle[\varphi_j(\mathbf{x}'_1)-\varphi_j(\mathbf{x}'_2)]^2\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{2}\langle[\phi(\mathbf{x}'_1)-\phi(\mathbf{x}'_2)]^2\rangle\right\}, \quad (9)$$

将(9)式代入(8)式得到

$$\langle\exp\{i[\phi(\mathbf{x}'_1)-\phi(\mathbf{x}'_2)]\}\rangle=\exp\left\{-\frac{1}{2}\langle[\phi(\mathbf{x}'_1)-\phi(\mathbf{x}'_2)]^2\rangle\right\}. \quad (10)$$

假定 $\phi(\mathbf{x})$ 是一个平稳过程,则有

$$\langle\phi^2(\mathbf{x}'_1)\rangle=\langle\phi^2(\mathbf{x}'_2)\rangle=\langle\phi^2\rangle,$$

利用这个关系,(10)式可以简单写成

$$\langle\exp\{i[\phi(\mathbf{x}'_1)-\phi(\mathbf{x}'_2)]\}\rangle=\exp\left\{-\langle\phi^2\rangle\left[1-\frac{\langle\phi(\mathbf{x}'_1)\phi(\mathbf{x}'_2)\rangle}{\langle\phi^2\rangle}\right]\right\}, \quad (11)$$

这是一个重要的结果。关于(11)式的两点讨论

(1) 位相调制函数的相关

依赖于 $\langle\phi^2\rangle$ 和 $\langle\phi(\mathbf{x}'_1)\phi(\mathbf{x}'_2)\rangle/\langle\phi^2\rangle$ 前者仅与散射体粗糙表面的方差有关,而后者与粗糙表面的相关函数有关。

(2) 粗糙表面的归一化相关函数 $\langle\phi(\mathbf{x}'_1)\phi(\mathbf{x}'_2)\rangle/\langle\phi^2\rangle$ 可用来表示相关面积,因为

$$[\langle\phi(\mathbf{x}'_1)\phi(\mathbf{x}'_2)\rangle/\langle\phi^2\rangle]=\iint[\phi(\mathbf{x}'_1)\phi^*(\mathbf{x}'_2)/\langle\phi^2\rangle]p_*(\phi_1,\phi_2)d\phi_1d\phi_2,$$

其中,概率密度与归一化函数 $\phi_1\phi_2^*/\langle\phi^2\rangle$ 均无量纲,所以积分结果具有面积的量纲。当散射体的相关面积很小时,可以假定

$$\frac{\langle\phi(\mathbf{x}'_1)\phi(\mathbf{x}'_2)\rangle}{\langle\phi^2\rangle}=\begin{cases} 1, & \text{在相关面积内,} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (12)$$

将这个假设条件代入(11)式,有

$$\langle\exp\{i[\phi(\mathbf{x}'_1)-\phi(\mathbf{x}'_2)]\}\rangle=\begin{cases} 1, & \text{在相关面积内,} \\ \exp[-\langle\phi^2\rangle], & \text{其它.} \end{cases} \quad (13)$$

进而,我们假定散射体表面足够粗糙,即满足 $\langle\phi^2\rangle\gg 1$ 。这个假定对于大多数工程问题是可以满足的。于是有 $\exp[-\langle\phi^2\rangle]\approx 0$, 由此可知,相位调制函数的相关满足条件

$$\langle\exp\{i[\phi(\mathbf{x}'_1)-\phi(\mathbf{x}'_2)]\}\rangle=\begin{cases} 1, & \text{在相关面积内,} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (14)$$

根据上述讨论,我们可以把像面动态散斑的振幅空-时相关函数(7)式简化成

$$\begin{aligned} \langle E_1^* E_2^* \rangle &= \iint E_{01} E_{02} |K|^2 \exp\{i[\omega_0(t_1-t_2) - (\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{x}'_1 + \mathbf{v}t_1) - \mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{x}'_2 + \mathbf{v}t_2))]\} \\ &\quad \times \delta[\mathbf{X}_1 \pm M(\mathbf{x}'_1 + \mathbf{v}t_1)] \delta[\mathbf{X}_2 \pm M(\mathbf{x}'_2 + \mathbf{v}t_2)] d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 \\ &= O \iint \exp\{-i[\omega_0(t_1-t_2) - \mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2) + \mathbf{v}(t_1-t_2)]\} \\ &\quad \times \delta[\mathbf{X}_1 \pm M(\mathbf{x}'_1 + \mathbf{v}t_1)] \delta[\mathbf{X}_2 \pm M(\mathbf{x}'_2 + \mathbf{v}t_2)] d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2, \end{aligned} \quad (15)$$

利用 δ 函数的定标性质和筛选性质,经运算和整理后得到

$$\langle E_1^* E_2^* \rangle = \frac{O}{M^2} \exp\left\{-i\left[\omega_0\tau - 2\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{v}\tau \pm \frac{1}{M}\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}\right]\right\} \quad (16)$$

$$\tau = t_1 - t_2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2, \quad M = (d_1/d_0).$$

(16) 式就是最后得到的理想成像光学系统像面动态散斑的振幅空-时相关函数。可见 $\langle E_1^* E_2^{**} \rangle$ 仅是与 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 有关的函数。由此可知, 像面的散斑振幅涨落仍保持“平稳过程”条件。

四、像面动态散斑的归一化强度空-时相关函数及其信息提取方法

在实际应用中, 更感兴趣的是强度的空-时相关, 因为它是一个直接可测量的量。为了使理想光学系统像面动态散斑的强度涨落直接反映出散射体产生的位相起伏(这里包含了运动散射体的动态信息), 本文考虑光与相干光束混合的情况, 利用外加一个参考相干光场的方法提取像面动态散斑强度空-时相关函数的信息。

当振幅为 V_0 而强度为 $I_0 = |V_0|^2$ 的相干场同强度为 I_s 的相位起伏场 $V_s \exp[-i\phi(\mathbf{X}, t)]$ 相混合时, 其合成光场和瞬时强度是

$$V(\mathbf{X}, t) = V_0 + V_s \exp[-i\phi(\mathbf{X}, t)], \quad (17)$$

$$I(\mathbf{X}, t) = I_0 + I_s + 2\sqrt{I_0 I_s} \cos \phi(\mathbf{X}, t), \quad (18)$$

强度相关为

$$\begin{aligned} & \langle I(\mathbf{X}_1, t_1) I(\mathbf{X}_2, t_2) \rangle \\ &= \langle (I_0 + I_s) + 2\sqrt{I_0 I_s} \cos \phi(\mathbf{X}_1, t_1), (I_0 + I_s) + 2\sqrt{I_0 I_s} \cos \phi(\mathbf{X}_2, t_2) \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

因为求相关可以看成一种内积运算。因此, 由内积的性质, 并假定 $\phi(\mathbf{X}, t)$ 是平稳随机过程, 则有 $\langle \cos \phi(\mathbf{X}_2, t_2) \rangle = \langle \cos \phi(\mathbf{X}_1, t_1) \rangle$, 于是(19)式被简化成

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{X}_1, t_1) I(\mathbf{X}_2, t_2) \rangle &= (I_0 + I_s)^2 + 4I_0 I_s \langle \cos \phi(\mathbf{X}_1, t_1), \cos \phi(\mathbf{X}_2, t_2) \rangle \\ &+ 4(I_0 + I_s) \sqrt{I_0 I_s} \langle \cos \phi(\mathbf{X}_1, t_1) \rangle, \end{aligned} \quad (20)$$

定义归一化强度相关函数

$$\mathcal{J}_I(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, t_1, t_2) = \frac{\langle I(\mathbf{X}_1, t_1) I(\mathbf{X}_2, t_2) \rangle}{\langle I \rangle^2}, \quad (21)$$

可以证明^[7]

$$\mathcal{J}_I(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; t_1, t_2) = 1 + \frac{2I_0 I_s}{\langle I \rangle^3} \mathcal{J}_V(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; t_1, t_2), \quad (22)$$

式中, $\mathcal{J}_V(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; t_1, t_2)$ 是像面动态散斑的归一化振幅空-时相关函数

$$\mathcal{J}_V(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; t_1, t_2) = \frac{\langle E_1^* E_2^{**} \rangle}{(\langle |E_1^*|^2 \rangle \langle |E_2^*|^2 \rangle)^{1/2}}. \quad (23)$$

假定 $\langle |E_1^*|^2 \rangle = \langle |E_2^*|^2 \rangle = \langle I \rangle$, 则(22)式变成

$$\mathcal{J}_V(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; t_1, t_2) = \frac{\langle E_1^* E_2^{**} \rangle}{\langle I \rangle}. \quad (24)$$

将上式及(16)式代入(22)式, 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_I(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; t_1, t_2) &= 1 + \frac{2I_0 I_s}{\langle I \rangle^3} \langle E_1^* E_2^{**} \rangle \\ &= 1 + \frac{C}{M^2} \frac{2I_0 I_s}{\langle I \rangle^3} \exp\left\{-\delta \left[\omega_0 \tau - 2\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{V} \tau \pm \frac{1}{M} \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} \right]\right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

(25)式就是与相干场混合后的像面动态散斑的强度空-时相关函数表达式。

五、讨 论

根据与相干场混合后的像面动态散斑的强度空-时相关函数(25)式,可以得出几点讨论:

(1) 从归一化强度相关函数(25)式可以明显看出, \mathcal{S}_I 仅是时间差 τ 和坐标差 \boldsymbol{r} 的函数, 即 $\mathcal{S}_I = \mathcal{S}_I(\boldsymbol{r}, \tau)$ 。这个事实说明了像面波场的强度涨落是一个平稳随机过程。

(2) 当 $\boldsymbol{r} = 0$ 时, 即 $\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2 = 0$, 像面上的探测点变成空间一个点: $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}$ 。此时, $\mathcal{S}_I(\boldsymbol{r}, \tau) = \mathcal{S}_I(0, \tau)$ 退化完全的时间强度相关函数

$$\mathcal{S}_I(0, \tau) = 1 + \frac{C}{M^2} \frac{2I_0 I_s}{\langle I \rangle^3} \exp\{-\delta[(\omega_0 - 2\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{V})\tau]\}, \quad (26)$$

由(26)式可知: 对于不同的时间延迟 τ , 测出强度相关 $\mathcal{S}_I(0, \tau)$, 就可以从(25)式中反演出被测对像的运动速度。

(3) 当 $\tau = 0$ 时 ($t_1 - t_2 = 0$), 有 $\mathcal{S}_I(\boldsymbol{r}, \tau) = \mathcal{S}_I(\boldsymbol{r}, 0)$ 。此时, 空-时相关函数退化完全的空间强度相关函数。利用这个相关函数, 可以研究空间结构的粗糙度。

(4) 当 \boldsymbol{r} 和 τ 均不为零时, (25)式在像面动态散斑的空-时相关中, 同时包含了时间和空间信息。因此, 利用动态散斑的空-时相关函数可以研究动态散射体的动态特性。

参 考 文 献

- [1] K. A. O'Donnell; *J. O. S. A.*, 1982, **72**, No. 2 (Feb), 191~197.
- [2] T. Yoshimura; *J. O. S. A.*, 1986, **3**, No. 7 (Jul), 1032~1053.
- [3] T. Yoshimura; *J. O. S. A.*, 1984, **1**, No. 11 (Nov), 1078~1084.
- [4] J. W. Goodman; 《傅里叶光学导论》, (科学出版社, 1979), 102~110.
- [5] J. D. Gaskill; 《线性系统·傅里叶变换·光学》, (人民教育出版社, 1985), 58, 163.
- [6] W. B. Davenport Jr.; *An Introduction to the Theory of Random Signals & Noise* (McGraw-Hill B. Co. Inc., 1958), 93~99.
- [7] B. Saleh; 《光电子统计学》, (科学出版社, 1985); 153, 351.

Space-time correlation of dynamic speckle in image plane for optical imaging system

PENG XIANG, MA SHINING AND YIE SHENGHUA
(*Tianjin University*)

(Received 17 August 1987; revised 3 January 1988)

Abstract

By virtue of Fourier optics and statistical theory the amplitude and intensity space-time correlation of dynamic speckle in image plane for optical imaging system have been developed. In the meantime, a novel method for extracting intensity correlation information by mixing up a coherent light field has been proposed.

Key words: dynamic speckle, space-time correlation; imaging system.