第8卷 第11期 光 学 学 报 Vol. 8, No. 11
1988年11月 ACTA OPTICA SINICA November, 1988

光学系统超分辨的光源编码技术*

郭斌均 庄松林
(上海光学仪器研究所)

提 要

本文从 Wolf 的部分相干理论出发，提出了采用编码光源照明的新的光学像超分辨方法，并用实验证实了这种方法的正确性。它克服了以往超分辨术的一些缺点，为超分辨的实用化研究展现了新的途径。
关键词：超分辨，光学系统。

一、引 言

高分辨率一直是光学工作者所追求的目标。目前，传统的光学仪器已不能满足现代检测的要求，所以，对超经典分辨极限(简称超分辨)的研究一直没有间断。于是，产生了一些获得超分辨的方法。例如 Lukoz 的方法[1]，这种方法利用两块完全相同的光栅，分别对物面和谱面作两次衍射，使确定方向上的有效光瞳扩大近两倍；Gartner 和 Lohmann 方法则是由 Wollaston 棱镜产生两束偏振方向互相垂直的斜光束照明物体，然后对叠合的两种偏振态的物谱作重新安排，这样可使有效光瞳扩大约一倍。国内已有人利用这种方法制成了叠频显微镜[2]；此外，Blanc 等人利用莫尔条纹方法，使用预调制和解调制两块光栅，亦使有效光瞳扩大了一倍，不过这种方法得到的超分辨图像上叠合着余弦函数[3]。Freiden 则是利用适当的光瞳滤波器来改变爱里斑的光强分布，从而提高通常意义下的分辨极限，这就是人们所谓的变迹术。

以上所有的方法都有使用光栅或 Wollaston 棱镜进行预处理和解调两个过程。对物面进行预处理的光栅，不可避免地要遮挡部分物体；在解调过程中，由于光栅或棱镜在成像系统中引入了附加像差，使像质变差；Freiden 的变迹术因为增大了爱里斑中次极大光强，因此，像质也较差。此外，Wollaston 棱镜主光轴之间，以及主光轴与入射光偏振方向之间必须保证的精确角度关系很难调准。有鉴于此，以上的方法一直没有得到推广应用。

近代光学的研究已经表明，光的相干性对成像系统有重大影响[4,5,6]。本文建议一种采用编码光源照明的超分辨方法，理论和实验证明了这种超分辨方法的有效性。因为物面和像面之间没有增设任何元件，所以此方法可望成为一种实用的超分辨术而得到广泛的应用。

二、理 论 分 析

为简明起见，这里仅研究一维情况下的超分辨；讨论只限于衍射受限的成像系统。如图

收稿日期：1987年9月27日；收到修改稿日期：1988年2月1日
* 国家自然科学基金资助课题。

1, 假设物体是最一般的线对情况, 并设它们透光强度相等, 即:

$$O_{(x)}=\delta\left(x-\frac{l}{2}\right)+\delta\left(x+\frac{l}{2}\right), \tag{1}$$

记物前表面上的相互强度为 $J_{1(x_1,x_2,\lambda)}$, 成像系统的脉冲响应函数 $K_{(x,x',\lambda)}$。这里 λ 是准单色光照明的中心波长, l 是两点的间距。如果 l 远远小于由光谱宽度决定的相干长度, 那么, 由广义惠更斯原理知, 传播到像面上的相互强度函数为

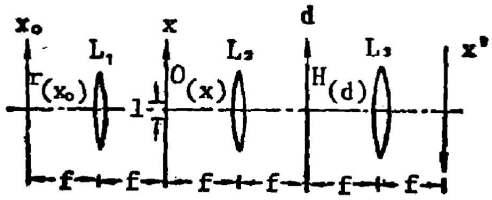

Fig. 1 One-dimension partially coherent processing system

$$J_{4(x_1',x_2',\lambda)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}J_{(x_1,x_2,\lambda)}\left[\delta\left(x_1-\frac{l}{2}\right)+\delta\left(x_1+\frac{l}{2}\right)\right]^*\left[\delta\left(x_2-\frac{l}{2}\right)+\delta\left(x_2+\frac{l}{2}\right)\right]$$
$$\times K^*_{(x_1,x_1',\lambda)}\cdot K_{(x_2,x_2',\lambda)}\,dx_1\,dx_2。 \tag{2}$$

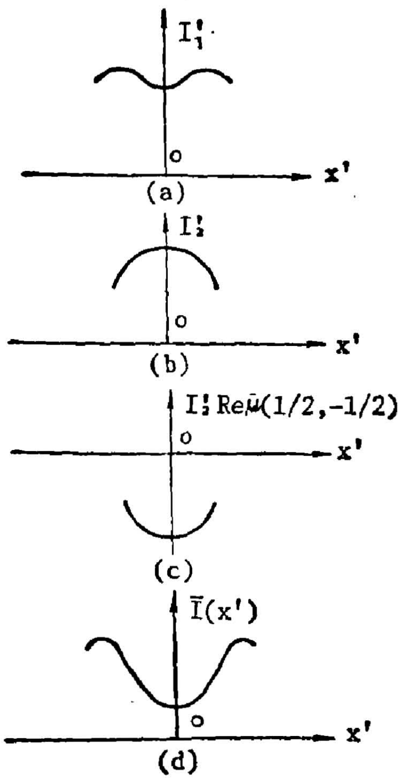

Fig. 2 The principle of superresolution described in this paper

对于空间不变衍射系统

$$\left.\begin{aligned}K_{(x_1,x_1',\lambda)}&=\operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta H(x_1'-x_1)}{f\lambda}\right],\\ K_{(x_2,x_2',\lambda)}&=\operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta H(x_2'-x_2)}{f\lambda}\right]。\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

这里 x' 为规化坐标, 其值为实际坐标除以成像系统放大率; ΔH 是空间滤波器的尺寸, 像面规格化强度分布为:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{(x')}=&\operatorname{sinc}^2\left[\frac{\Delta H\left(x'-\frac{l}{2}\right)}{f\lambda}\right]\\&+\operatorname{sinc}^2\left[\frac{\Delta H\left(x'+\frac{l}{2}\right)}{f\lambda}\right]\\&+2\mathrm{Re}\left[\mu_1\left(\frac{l}{2},-\frac{l}{2}\right)\right]\\&\times\operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta H\left(x'-\frac{l}{2}\right)}{f\lambda}\right]\operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta H\left(x'+\frac{l}{2}\right)}{f\lambda}\right]。\end{aligned} \tag{4}$$

这里 $\mu_1\left(\frac{l}{2},-\frac{l}{2}\right)$ 是规格化相互强度。$\mu_1\left(\frac{l}{2},-\frac{l}{2}\right)=1$ 或 0 就相当于相干或非相干成像情况。

我们知道, 在图 1 那样一个 $6f$ 系统中, 物表面相互强度函数是光源强度分布的准确的傅里叶变换, 物面上相互强度只是两点间距的函数, 而与坐标无关。由于相互强度应为实偶函数, 即 $\mu_{1(l)}=\mu_{1(-l)}$, (4)式可写成

$$\bar{I}_{(x')}=\operatorname{sinc}^2\left[\frac{\Delta H\left(x'-\frac{l}{2}\right)}{f\lambda}\right]+\operatorname{sinc}^2\left[\frac{\Delta H\left(x'+\frac{l}{2}\right)}{f\lambda}\right]$$

$$+2\mu_1(l)\operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta H\left(x'-\frac{l}{2}\right)}{f\lambda}\right]\cdot\operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta H\left(x'+\frac{l}{2}\right)}{f\lambda}\right]。\tag{5}$$

图 2(a)示出了(5)式前两项的图形，它对应于两点的非相干成像，图中画的是瑞利分辨极限时的情况。图 2(b)和(c)则示出了(5)式后一项的图形，(b)图对应于 $\mu_1\left(\frac{l}{2},-\frac{l}{2}\right)=1$，(c) 图对应于 $\mu_1\left(\frac{l}{2},-\frac{l}{2}\right)<0$。附录给出了图 2(b)的证明；图(d)示出了 $\mu_1\left(\frac{l}{2},-\frac{l}{2}\right)<0$ 时的像面上相对光强分布，和(a)图比，两点像的分辨情况得到了明显改善。因此，物点间存在负的相干度是有利于提高分辨率的。当然，两点像要实现由不可分辨到可分辨，所需负相干度的数值是随两点间距而不同的，按以下条件：(1) $\mu_{1(l)}=\mu_{1(-l)}$；(2) $\mu_{1(0)}\leqslant\mu_{1(l)}$；(3) $\mu_{1(l)}=F_{(\gamma_{(x_0)})}$；(4) $I_{(0)}/I_{(l/2)}\leqslant c$。其中，$\gamma_{(x_0)}$ 为光源强度分布，是正实函数；c 是分辨常数，对于瑞利极限 $c=0.81$。由此可以得到相干度所需满足的条件为

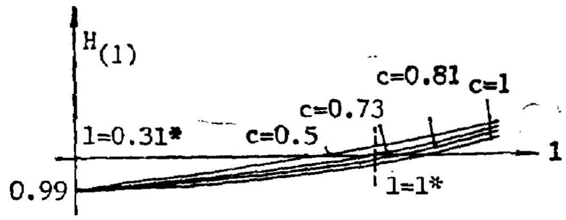

Fig. 3 The relation between $\mu(e)$ necessary for resolving and the distance of two points

$$\mu_1\left(\frac{l}{2},-\frac{l}{2}\right)\leqslant\frac{c+c\cdot\operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta H\cdot l}{f\lambda}\right]-2\operatorname{sinc}^2\left[\frac{\Delta H\cdot l}{f\lambda}\right]}{2\operatorname{sinc}^2\left[\frac{\Delta H\cdot l}{f\lambda}\right]-2c\cdot\operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta H\cdot l}{f\lambda}\right]}。\tag{6}$$

图 3 按不同的 c 值，画出了满足分辨要求的规化相互强度函数曲线，凡对应于某一间距处线对的规化相互强度在曲线以下位置，则都是可以分辨的。

三、超分辨的实现及实验结果

从数学的角度来说，我们只要按图 3 所示满足(6)式的规化相互强度函数作一次逆傅里叶变换，就得到了理想的超分辨编码光源强度函数，但必需满足光源强度为非负实函数的要求。

如果照明系统如图 4 所示，由一个栅状发光面和透镜列阵组成，又光栅状发光面的栅缝绝不出现在系统光轴上，并且关于光轴对称分布，即发光面和透镜列阵的复透过率分别是

$$\gamma_{1(x_0)}=\operatorname{rect}\left(\frac{x_0}{h}\right)*\operatorname{comb}\left(\frac{x_0-\frac{d}{2}}{d}\right),\tag{7}$$

$$\gamma_{2(\beta)}=\left[\operatorname{rect}\left(\frac{\beta}{D}\right)\cdot\exp\left(-\frac{ik\beta^2}{2f}\right)\right]*\operatorname{comb}\left(\frac{\beta}{D}\right)。\tag{8}$$

Fig. 4 Encoding source system

则物面上的互相干度为

$$J_{1(x_1,x_2)}=c\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_{1(x_0)}\cdot\gamma^*_{1(x_0)}\cdot\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_{2(\beta)}\cdot\exp\left[\frac{i\pi(\beta-x_0)^2}{d_0\lambda}+\frac{i\pi(x_1-\beta)^2}{d_1\lambda}\right]d\beta\right\}^*$$
$$\times\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_{2(\beta)}\cdot\exp\left[\frac{i\pi(\beta-x_0)^2}{d_0\lambda}+\frac{i\pi(x_2-\beta)^2}{d_1\lambda}\right]d\beta\right\}dx,\tag{9}$$

其中 h 是发光面栅缝的缝宽; d 是栅缝周期; D 是透镜列阵中各透镜口径; f 为焦距; d_0 是发光面与列阵面的间距; d_1 是后者到物面的距离; c 是对后面讨论并非重要的常数。

经整理,原式成为

$$J_{1(x_1,x_2)}=c\sum_l\sum_m\sum_n\int_{a_{(l)}-\frac{h}{2}}^{a_{(l)}+\frac{h}{2}}\exp\left[\frac{i\pi c_{mn}}{\lambda}\right]\times\{[C(b^1_{+n})-C(b^1_{-n})]-i[S(b^1_{+n})-S(b^1_{-n})]\}^*\times\{[C(b^2_{+m})-C(b^2_{-m})]-i[S(b^2_{+m})-S(b^2_{-m})]\}dx。\tag{10}$$

其中

$$\begin{cases}C_{(x)}=\int_0^x\cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt,\ S_{(x)}=\int_0^x\sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt,\\ a_{(l)}=x_0-\frac{d}{2}-\frac{ld}{2},\\ b^n_{\pm m}=\sqrt{\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f}}\left(mD\pm\frac{D}{2}+\dfrac{\frac{mD}{f}-\frac{x_0}{d_0}-\frac{x_n}{d_1}}{\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f}}\right),\\ c_{mn}=\frac{D\cdot(m^2-n^2)}{f}-\frac{x_2^2-x_1^2}{d_1}+\left[\frac{2x_0(x_2-x_1)}{d_0d_1}\right.\\ \qquad-\frac{D\cdot(m+n)(x_2-x_1)+D\cdot(m-n)(x_2-x_1)}{d_1f}-\frac{2x_0D(m-n)}{d_0f}\\ \qquad\left.+\frac{D^2(m^2-n^2)}{f^2}+\frac{x_2^2-x_1^2}{d_1^2}\right]\Big/\left(\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f}\right)。\end{cases}\tag{11}$$

当 $d_0=f$, 并且 $D=kd$(k 是整数)时

$$J_{1(x_1,x_2)}=C'\sum_l\int_{a(l)-\frac{h}{2}}^{a(l)+\frac{h}{2}}\exp\left[\frac{i2\pi x_0(x_2-x_1)}{f}\right]\times\{[C(b^1_+)-C(b^1_-)]-i[S(b^1_+)-S(b^1_-)]\}^*\times\{[C(b^2_+)-C(b^2_-)]-i\{S(b^2_+)-S(b^2_-)]\}dx,\tag{12}$$

其中

$$b^n_\pm=\frac{1}{\sqrt{d_1}}\left(\pm\frac{D}{2}-\frac{d_1x_0+fx_n}{f}\right)。\tag{13}$$

若不考虑透镜口径对复可干度的影响,则规一化互相干度为

$$\mu_{1(l)}=\frac{\sin\left(\frac{Nld\pi}{f\lambda}\right)}{N\sin\left(\frac{ld\pi}{f\lambda}\right)}\cdot\operatorname{sinc}\left(\frac{hl}{f\lambda}\right),\tag{14}$$

N 为发光缝数, $l=|x_2-x_1|$。

上式表示一系列的窄脉冲,它们发生在

$$l=\pm n\frac{f\lambda}{d}\quad n=0,\ 1,\ 2\cdots。\tag{15}$$

当满足

$$l=\pm n\frac{f\lambda}{Nd}\quad n/N\neq\text{整数}\tag{16}$$

时, $\mu_{1(l)}=0$。

由上两式可以知道,相干峰的间距与光栅常数成反比,各相干峰的宽度与整块光栅的尺

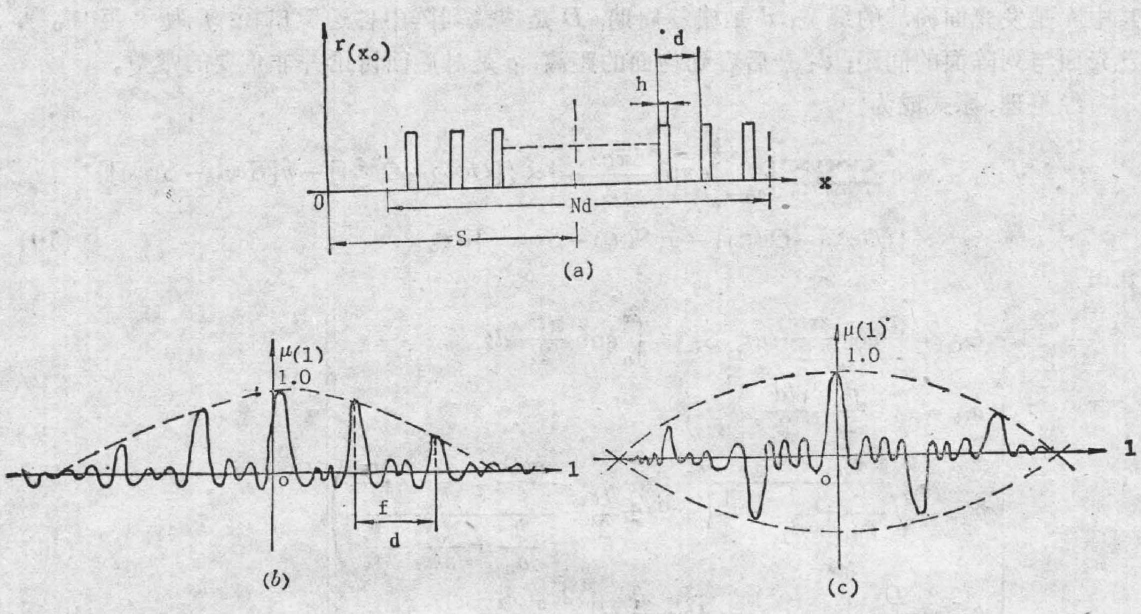

Fig. 5

(*a*) Light-intensity distribution of encoding source; (*b*) Mutual intensity distribution in object plane when a slit is at the axis of the system; (*c*) Mutual intensity distribution in object plane when slite are symmetrical about the axis, but no one at the axis

寸 Nd 成反比。由图 5(*c*)可见，前面讨论的情况能得到负值的相干峰，这是对实现超分辨非常有利的。

根据以上这些规律，只要按分辨的要求来决定负值相干峰的位置，并由此来选择光栅各参量 d、h。

实验中，采用了栅状参数为 $d=1.8\,\text{mm}$、$h=0.1\,\text{mm}$，辐射中心波长 $\lambda=5461\,\text{Å}$ 的准单色光源，以及焦距为 $f=3.9\,\text{mm}$、各小透镜口径 $D=3.6\,\text{mm}$ 的透镜列阵。

实验在成像系统、观察系统和物面没有任何变化的情况下进行。图 6(*a*)是非相干照明情况下的二号鉴别率板像，图上排自右至左是十六～十九组，读者或许可分辨到第十六组，但要进一步分辨就困难了；图 6(*b*) 则是采用栅状编码光源后的图像，除十六、十七、十八组外，二十组以上几组都较清楚地得以分辨，不过光强很弱，在总结中我们将作出解释。因为采用编码光源是按前面的讨论只考虑一维的超分辨，因此只须将注意力集中在各组的水平线。

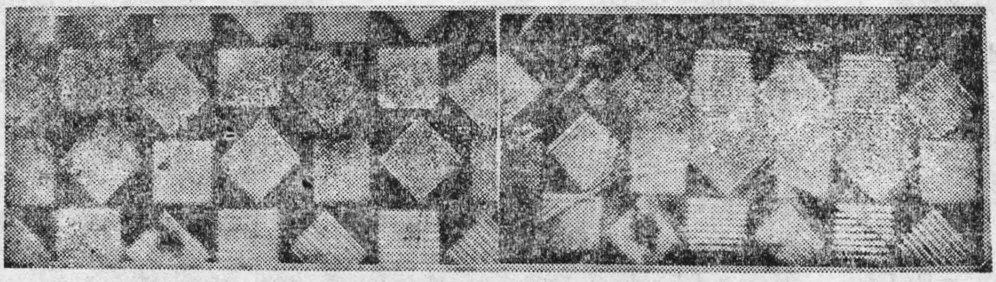

Fig. 6 Image of No. 2 resolution chart

(*a*) Incoherent illumunation; (*b*) Illumination with encoding source

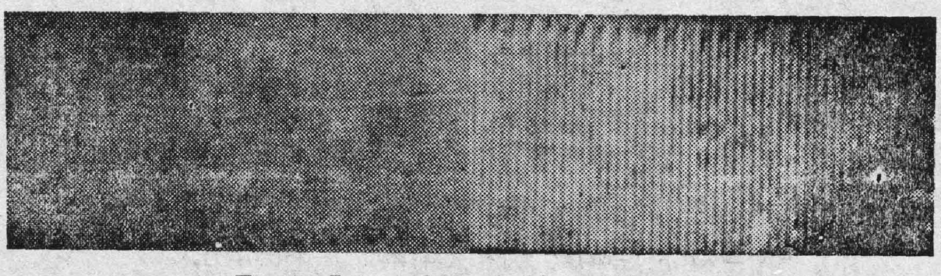

Fig. 7 Image of integrated-circuit mask

(*a*) Incoherent illumination; (*b*) Illumination with encoding source

图 7(*a*)是非相干照明时集成电路掩模板中某种间距约为 6 μm 结构的像，采用以上描述的光源后，分辨情况显著好转，如图 7(*b*)。理论计算的超分辨情况与实验结果符合得很好，所有这些证明了本文超分辨原理的正确性。

四、结　　论

通过光源编码的方法，显著地提高了光学系统的分辨率，实现了通常意义下的超分辨。它在提高分辨率的同时，不引入物成分的损失。对成像系统未曾进行变动，而仅改进了照明方式，因此，这种超分辨方法在实用化方面是可能有用的。

我们采用图 4 所示的编码光源进行了实验，结果与理论计算的超分辨情况符合得很好，这样就证明了本文的超分辨原理是正确的。从图 2 知道，超分辨的像经历了一个相减的过程，与未实现超分辨的部分比光强会有减弱，并且随点对的间距和规格化相互强度的不同，光强减弱的程度是不同的。也正因为这样，超分辨像的信噪比有所降低，因为背景噪声依然如旧，这在图 6 和图 7 中能够看到。

前面我们看到，采用文中编码光源不能在一个非常宽广的区域满足(6)式；计算表明，超分辨的像位置是偏离标准像点坐标 $x'=l/2$ 的。所有这些都需要进一步的研究。

在实验中得到了陈蔚嘉和毛秀娟两同志的帮助，谨表感谢。

附　　录

证图 2(*b*)所示的情况，即证明：在区间 $|x|<l/2<c$（c 待定），以下不等式一定成立：

$$\operatorname{sinc}^2\left[\frac{\Delta H\cdot\frac{l}{2}}{f\lambda}\right]\geqslant\operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta H\cdot\left(x-\frac{l}{2}\right)}{f\lambda}\right]\cdot\operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta H\cdot\left(x+\frac{l}{2}\right)}{f\lambda}\right], \tag{I}$$

并求 c 值。

证：记

$$\frac{f\lambda}{\Delta H}=l^*, \tag{II}$$

那么(I)式变为

$$\operatorname{sinc}^2\left[\frac{l}{2l^*}\right]\geqslant\operatorname{sinc}\left[\left(x-\frac{l}{2}\right)l^*\right]\cdot\operatorname{sinc}\left(x+\frac{l}{2}\right)/l^*\right], \tag{III}$$

由对 sinc 函数的研究可以知道，在区间 $|x|<l^*$，$\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{l^*}\right)$是个单调的递减函数。因此当 $|x|<\frac{l}{2}<l^*$ 时，就必定有：

$$\operatorname{sinc}^2\left(\frac{x}{l^*}\right)\geqslant\operatorname{sinc}^2\left(\frac{l}{2\cdot l^*}\right),$$

即
$$\frac{\sin^2(\pi x/l^*)}{(\pi x/l^*)^2} \geqslant \frac{\sin^2\left(\frac{\pi\cdot l}{2\cdot l^*}\right)}{\left(\frac{\pi l}{2l^*}\right)^2}.$$

利用倍角公式并移项后，得:
$$\frac{l^2}{4}[1-\cos(2\pi x/l^*)]-x^2[1-\cos(\pi l/l^*)]\geqslant 0,$$

亦即
$$\frac{l^2}{4}[1-\cos(\pi l/l^*)]+\frac{l^2}{4}[\cos(\pi l/l^*)-\cos(2\pi x/l^*)]-x^2[1-\cos(\pi l/l^*)]\geqslant 0.$$

从而
$$\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right)\cdot[1-\cos(\pi l/l^*)]\geqslant\frac{l^2}{4}[\cos(2\pi x/l^*)-\cos(\pi l/l^*)].$$

因为 $|x|<\frac{l}{2}$，所以
$$\frac{1-\cos(\pi l/l^*)}{l^2/4}\geqslant\frac{\cos(2\pi x/l^*)-\cos(\pi l/l^*)}{l^2/4-x^2}.$$

亦即
$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi l}{2l^*}\right)}{l^2/4}\geqslant\frac{\sin\left[\frac{\pi}{l^*}\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]\cdot\sin\left[\frac{\pi}{l^*}\left(x+\frac{l}{2}\right)\right]}{x^2-l^2/4},$$

从而有
$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi l}{2l^*}\right)}{\left(\frac{\pi l}{2l^*}\right)}\geqslant\frac{\sin\left[\frac{\pi}{l^*}\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]\cdot\sin\left[\frac{\pi}{l^*}\left(x+\frac{l}{2}\right)\right]}{\left[\frac{\pi}{l^*}\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]\cdot\left[\frac{\pi}{l^*}\left(x+\frac{l}{2}\right)\right]},$$

即
$$\mathrm{sinc}^2\left(\frac{l}{2l^*}\right)\geqslant\mathrm{sinc}\left[\left(x-\frac{l}{2}\right)\Big/l^*\right]\cdot\mathrm{sinc}\left[\left(x+\frac{l}{2}\right)\Big/l^*\right].$$

即在区间
$$|x|<l/2<l^*,$$

(I)式成立，也就是说，在 $l<2l^*$ 范围内，图 2(b)所示情况是正确的，其中 l^* 如(II)式定义。

参 考 文 献

[1] S. H. Lee; «*Optical Information Processing*», (Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1981), chap. 1.

[2] 谭维翰，王润文；«光学学报»，1981, **1**, No. 6 (Nov), 509～515。

[3] 辻内顺平，村田和美；«光学信息处理»；(机械工业出版社，北京，1983)，chap. 3.

[4] S. L. Zhuang, F. T. S. Yu; *Appl. Opt*,. 1982, **21**, No. 14(Jul), 2587～2593.

[5] F. T. S. Yu, S. L. Zhuang *et al.*; *Appl. Phys.*, 1982, **B27**, No. 1(Jan), 99～104.

[6] 庄松林，郑权；«物理学报»，1985, **5**, No. 4 (Apr), 439～446。

Image superresolution with source encoding technique*

GUO BINJUN AND ZHUANG SONGLIN

(*Shanghai Institute of Optical Instruments*)

(Received 27 September 1987; revised 1 February 1988)

Abstract

In this paper, a source encoding technique is presented for achiving superresolution image. The experimental demons-trations show that the superresolution can easily be obtained by using this new technique. The method overcomes several drawbacks of the others and shous a new approach for further study of practical applications of the superresolution technology.

Key words: superresolution; optical system.

* Project supported by National Natural Sciehce Foundation of China