

用快速傅里叶变换迭代法重建 三维折射率场

高 益 庆

丁 汉 泉

(南昌航空工业学院物理教研室)

(北京航空学院非晶态研究室)

提 要

本文通过计算机模拟运算,结合折射率场的先验知识,考查了以卷积法为基的快速傅里叶变换迭代法
的重建精度以及误差数据和视角范围大小对其的影响。作为一个应用实例,计算了某一截面火焰温度场
的分布,并与热电偶测量的值进行了比较。

一、引 言

在用全息干涉术重建三维折射率场的实际应用中,由于某些客观因素,常常难以一次获
得 180° 视角范围的干涉条纹图。在这种情况下,三维折射率场的重建算法就呈现病态性
质,为了压缩这种病态性质,必须结合场的先验知识^[1]。关于这种受限角($<180^\circ$)的重建算
法,目前已有多种^[2]。算法就是其中之一^[3,4]。其基本思路是在场空间和频率空间反复进行
傅里叶变换,并使变换的结果满足各个空间的物理限制,由此获得失去的信息。

可以证明^[3,4],只要视角范围内的频谱 F_0 足够精确,则在 k 次迭代后,能量误差 E_k 为

$$E_k = \|F_0(R, \beta) - F_k(R, \beta)\|, \quad (1)$$

不断减小,当 $k \rightarrow \infty$, $E_k \rightarrow 0$, 同时,受限角频谱逼近完全角(180°)频谱。 $\|\cdot\|$ 定义平方范数。

众所周知,试验中获得的干涉数据难以避免测量误差,从而必然导致 F_0 的误差。视角
大小和数据误差究竟对重建精度有多大影响,正是本文研究的主要内容。

二、快速傅里叶变换迭代法

1. 算法的步骤

- (1) 由已知的条纹数据确立初始频谱 $F_0(\xi, \eta)$;
- (2) 在频域进行修正,得到修正后的频谱 $S_{k+1}(\xi, \eta)$;
- (3) 取 G_{k+1} 的快速傅里叶变换逆运算^[5],得到 $g_{k+1}(x, y)$;
- (4) 在空域进行修正,得到 $f_{k+1}(x, y)$;
- (5) 审查迭代终止判据,若满足,停止迭代;若不满足,则对 $f_{k+1}(x, y)$ 进行快速傅里叶
变换运算^[5],得到 $F_{k+1}(\xi, \eta)$,转至第(2)步。其中频域修正为

$$G_{k+1} = \begin{cases} F_0(\xi, \eta), & B_{\min} \leq \text{tg}^{-1}(\eta/\xi) \leq B_{\max}, \\ F_{k+1}(\xi, \eta), & \text{其他。} \end{cases} \quad (2)$$

空域修正: 这里可以结合更多的场的先验知识, 比如, 若为温度场, 则 $f(x, y) = n(x, y) - n_0$ 的分布在场内处处为负值, 并且是实数, 场外 $f(x, y)$ 近似为零, 有时还不难知道场内的 $f(x, y)$ 的值不会低于某一数值 f_{\min} (可由最高温度的估计获得), 概括得物界限制、实数限制分别为

$$f_{k+1}(x, y) = \begin{cases} g_{k+1}(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases} \quad (3)$$

$$g_{k+1}(x, y) = \text{Re}[\mathcal{F}_2^{-1}G_{k+1}(\xi, \eta)],$$

式中 Re 表示对 $\mathcal{F}_2^{-1}G_{k+1}$ 取实部。其上界限制、下界限制、迭代终止判据与相对能量误差分别为

$$\left. \begin{aligned} f_{k+1}(x, y) &= \begin{cases} g_{k+1}(x, y), & g_{k+1}(x, y) \leq 0, \\ 0, & g_{k+1}(x, y) > 0, \end{cases} \\ f_{k+1}(x, y) &= \begin{cases} g_{k+1}(x, y), & g_{k+1}(x, y) \geq f_{\min}, \\ f_{\min}, & g_{k+1}(x, y) < f_{\min}, \end{cases} \\ (ER_k/ER_{k-1}) &\leq EPS, \\ ER_k &= \|f_k - g_k\| / \|f_k\|, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 EPS 为预先取定的误差限制。

2. 初始频谱 $F_0(\xi, \eta)$ 的确立

从已知的条纹级数 $N(p, \theta)$, 根据中心截面定理^[6]:

$$\hat{F}(R, \beta) = \lambda \mathcal{F} [N(p, \theta)]_{\beta = [\theta + (\pi/2)]}, \quad (5)$$

只能得到沿径向分布的频率分量。式中 $\hat{F}(R, \beta)$ 为通过 Radon 逆变换重建的函数, \mathcal{F} 表示对第一变量的一维傅里叶变换, λ 表示激光波长。采用快速傅里叶变换算法, 则需要知道矩形网格点上的频率分量 $F(\xi, \eta)$ 。由于光程差函数 $\lambda N(p, \theta)$ 是 $f(x, y)$ 的 Radon 变换^[6], 故求解 $f(x, y)$ 实际上就是求解它的 Radon 逆变换。不妨把 Radon 逆变换近似地作为一个线性准平移不变系统*, 该系统的传递函数为

$$H(\xi, \eta) = \mathcal{F}_2 \hat{p}(x, y) / \mathcal{F}_2 p(x, y), \quad (6)$$

式中 $p(x, y)$ 是依赖于场的先验知识对 $f(x, y)$ 的估计函数, $\hat{p}(x, y)$ 是通过 Radon 逆变换重建的函数(其计算公式见后)。于是, 得初始频谱 $F_0(\xi, \eta)$ 为

$$F_0(\xi, \eta) = \begin{cases} \mathcal{F}_2 \hat{f}(x, y) / H(\xi, \eta), & B_{\min} \leq \text{tg}^{-1}(\eta/\xi) \leq B_{\max}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (7)$$

式中 $\hat{f}(x, y)$ 和 $\hat{p}(x, y)$ 一样, 都是由受限角内的条纹级数, 通过 Radon 逆变换重建的函数。Radon 逆变换的算法有多种, 本文采用卷积法^[6]计算 $\hat{p}(x, y)$ 和 $\hat{f}(x, y)$ 为

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}(x, y) &= \lambda \Delta \sum_{j=1}^{J_1} N_{0j} [-x \sin(J\Delta) + y \cos(J\Delta), J\Delta], \\ \hat{f}(x, y) &= \lambda \Delta \sum_{j=1}^{J_1} N_{0j} [-x \sin(J\Delta) + y \cos(J\Delta), J\Delta], \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

* Radon 逆变换不满足平移不变性, 但由此所带来的误差比数值处理过程中的其它误差要小得多^[7]。

$$N_{oi}(Id, J\Delta) = \frac{1}{d} \left\{ \frac{1}{4} N_i(Id, J\Delta) - \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=\text{奇数}} N_i[(I+l)d, J\Delta] / l^2 \right\},$$

$$(I = I_1, I_1+1, \dots, I_2-1, I_2) \quad (9)$$

(9)式中 $i=f, p, \hat{f}$ 和 \hat{p} 的计算方法相同, 但 \hat{f} 是通过实测的条纹级数 $N_f(Id, J\Delta)$ 来计算的, 而计算 \hat{p} 的条纹级数 $N_p(Id, J\Delta)$ 是由对场的估计函数 $p(x, y)$ 经解析计算而得到的。(7)和(8)式中 $(J_2 - J_1 + 1)$ 为观察方向的总数 J_M , 角度采样间隔为 Δ ; $(I_2 - I_1 + 1)$ 为径向采样点数 I_M , 径向采样间隔为 d , 由 $N_{oi}(Id, J\Delta)$ 计算 $N_{oi}[-x \sin(J\Delta) + y \cos(J\Delta), J\Delta]$ 采用线性内插法^[8]。

3. 噪声的抑制

若已知的条纹级数 $N(p, \theta)$ 有误差, 会使初始频谱后 $F_0(\xi, \eta)$ 产生噪声, 在迭代过程中, 该噪声会得以放大, 严重的致使算法不收敛。本文对噪声严重的数据采取的抑制噪声的措施, 是在频域中进行广义汉明滤波, 即让第 $k+1$ 次迭代的频谱 $G_{k+1}(\xi, \eta)$ 乘以滤波函数

$$F_{1/2}(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) = a + (1-a) \cos(2\pi\sqrt{\xi^2 + \eta^2}d), \quad (0 < a < 1) \quad (10)$$

三、计算机模拟运算

采用双高斯函数作为模拟运算的温度场

$$OT(x, y) = T_0 + T_1 \exp[-8x^2 - 25(y+0.22)^2] + T_2 \exp[-8x^2 - 25(y-0.22)^2], \quad (11)$$

式中 T_0 为环境温度 $T_1 = 5^\circ\text{C}$, $T_2 = 10^\circ\text{C}$, 对温度场的估计函数任选为

$$p(x, y) = T_0 + T_1 \exp(-10x^2 - 10y^2), \quad (12)$$

通过泊松数值积分, 获得模拟的干涉数据 $N(p, \theta)$, 分别取条纹截断误差为 ± 0.005 级、 ± 0.05 级和 0.5 级, 对快速傅里叶变换迭代法进行了考查。模拟运算中均采用了空域修正中的四种限制。

温度的平均误差和最大误差定义为

$$T_{\text{er}} = \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |OT_{mn} - RT_{mn}|}{(T_2 \times M \times N)}, \quad (13)$$

$$T_{\text{erm}} = |OT_{mn} - RT_{mn}|_{\text{max}} / T_2, \quad (14)$$

式中 $M \times N$ 为场区总采样单元数, OT 为原始温度, RT 为重建的温度。

1. 视角范围对重建精度的影响

作者用条纹截断误差为 ± 0.05 级的数据, 取反演区域为场区域的 3 倍, 经 50 次迭代, 比较了视角范围为 40° 、 60° 、 90° 、 120° 和 180° 的重建精度和收敛速率, 其结果如图 1 所示。可以看出, 视角范围愈大, 重建精度愈好, 收敛速率愈快。但视角范围接近 40° 时, 重建精度较差。

2. 条纹截断误差对重建精度的影响

作者在 90° 视角范围, 取反演区域为场区域的两倍, 比较了条纹截断误差的影响, 其结果如图 2 所示, 其相应的能量误差 (ER_k) 收敛趋势如图 3 所示。图 2 表明, 当条纹截断误差不大于 ± 0.05 级时, 重建精度和收敛速率都较好; 当条纹截断误差不小于 ± 0.5 级时, 重建精度较差, 过多的迭代, 不仅提高不了重建精度, 反而使它变坏, 这正是噪声扩散的结果。

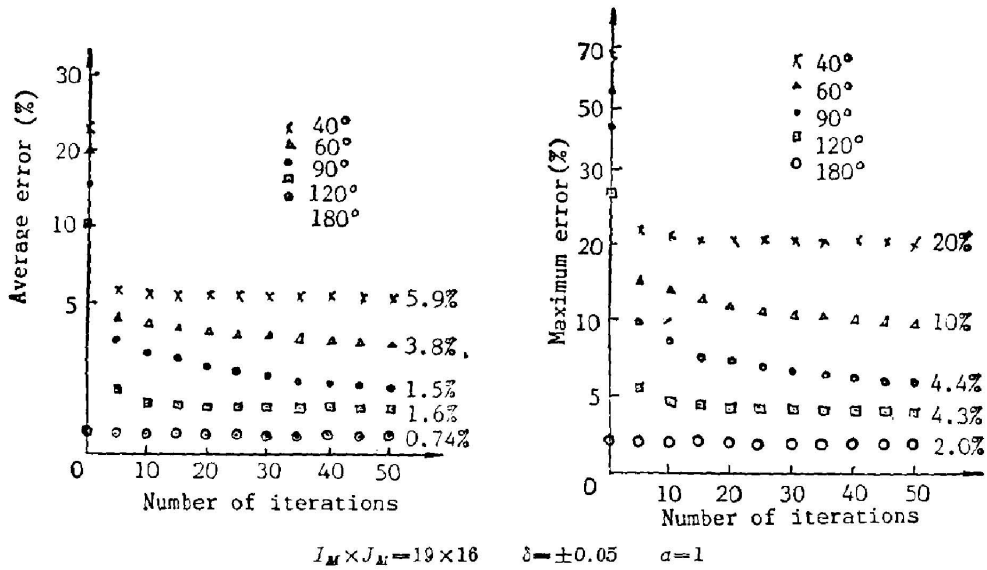
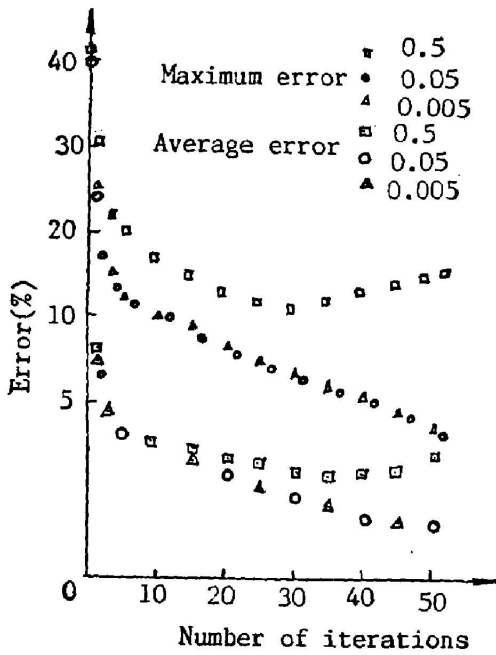
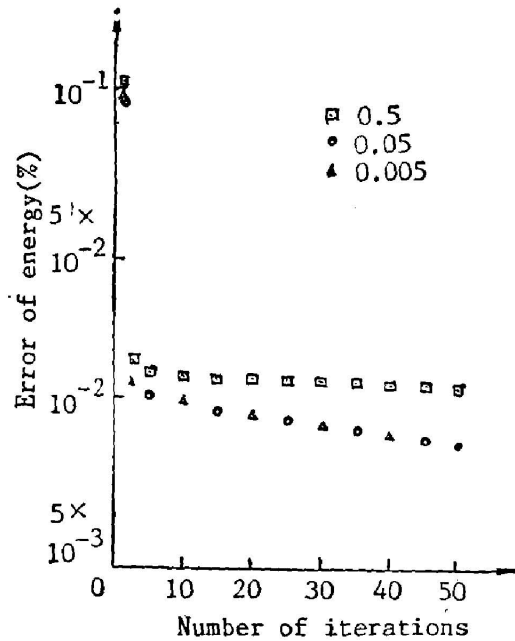


Fig. 1 The influence of total viewing angle on reconstruction precision



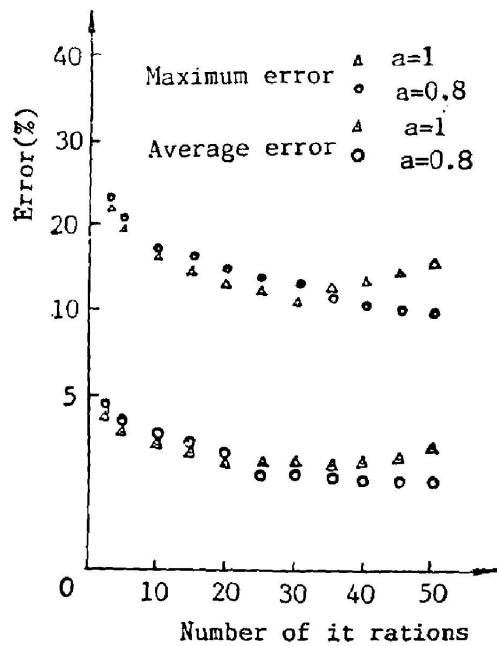
$I_M \times J_M = 19 \times 16$ $\psi_0 = 90^\circ$ $a = 1$
Fig. 2 The influence of fringe roundoff error on reconstruction precision



$I_M \times J_M = 19 \times 16$ $\psi_0 = 90^\circ$ $a = 1$
Fig. 3 The influence of fringe roundoff error on energy error

3. 抑制噪声的结果

图 2 表明,当条纹截断误差为 ± 0.5 级时,将导致迭代发散,然而图 3 表明,能量误差无条件地收敛于一个极限。在迭代开始发散时,下降较以前平缓,据此,在能量误差下降平缓时,停止迭代,亦可作为一种实际措施,但在实际问题中,这种尺度难以掌握,为此,我们在频



$I_M \times J_M = 19 \times 16$ $\psi_0 = 90^\circ$ $\delta = \pm 0.5$
Fig. 4 The results of compressing noise

域中进行广义汉明滤波,当条纹截断误差为 ± 0.5 级时,发现取 $\alpha = 0.8$ 较适合,其结果如图 4 所示。

四、应用实例

作者曾报道的结果^[8]是由卷积法计算的双灯芯火焰温度场某一截面内的温度分布,那里为了得到 180° 视角内的干涉数据,利用了场沿纵轴的对称性,这是一种近似处理。本文用 90° 视角内的同样的干涉数据,不假设场具有纵轴对称性,用快速傅里叶变换迭代计算同一截面内的温度分布,其中对双灯芯火焰温度场的估计函数选为

$$p(x, y) = T_0 + 1000 \exp[-3x^2 + 3(y + 0.55)^2] + 1000 \exp[-3x^2 - 3(y - 0.55)^2], \quad (15)$$

该估计函数已结合了场火焰源的位置。计算中未采用空域修正中的下界限制和抑制噪声的措施,迭代次数为 11 次,计算机时间为 60 秒,计算结果见表 1。表 2 比较了热电偶测量的温度、卷积法和快速傅里叶变换迭代法计算的结果(纵轴上各点),除临近边缘的点外,三者比较接近*。

本文通过计算机模拟研究,证实了快速傅里叶变换迭代法在视角范围大于 40° 、条纹截断误差不大于 0.05 级的情况下,能提供较好的重建精度;用 90° 视角范围的实验数据处理的结果也是较满意的。该方法能较方便地结合场的先验知识,在折射率场的全息干涉测量中,具有一定的优越性,其收敛速率仅在前几次较快,超过 10 次以后的迭代,收敛速率极其缓慢。

* 误差分析见文献[8]。

Table 1 The reconstruction results of flame temperature field: $T(x, y)$ (°C)

24.1	33.5	23.3	31.4	44.7	53.1	23.3	19.5	18.2
19.5	41.5	64.1	108.7	153.0	145.5	73.5	31.3	18.9
24.7	67.2	164.7	354.5	494.8	400.5	185.0	67.1	22.4
26.5	110.9	351.3	829.9	1052.9	820.2	372.6	120.5	32.1
31.3	143.4	431.3	1161.5	1326.2	1058.1	484.4	150.0	39.1
30.4	133.6	437.1	931.9	1077.3	905.8	452.3	136.2	27.3
30.1	111.9	363.0	797.4	966.3	826.3	390.8	117.3	24.2
30.9	127.9	446.8	1023.6	1198.2	950.4	454.9	132.4	29.0
30.6	139.2	522.8	1226.3	1392.8	1148.0	533.3	152.9	35.3
28.8	119.8	427.5	910.4	1114.0	905.7	434.6	127.9	28.8
23.9	79.7	217.0	435.5	517.6	414.8	196.8	70.0	20.0
19.5	37.5	89.7	146.1	154.8	123.5	66.4	29.2	18.0
18.0	19.2	35.3	50.0	46.2	28.2	17.9	18.0	17.4

Table 2 Comparison of thermocouple measurements and reconstruction results (°C)

Method	$N(y)$												
	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Practical measurement	20	77	421	943	1189	1123	1073	1140	1249	1081	498	68	20
FFT iteration	45	153	495	1053	1326	1077	966	1198	1393	1114	518	155	46
Convolution	38	185	482	1000	1214	1031	973	1059	1262	1041	511	191	38

参 考 文 献

- [1] M. E. Davison; *Siam J. Appl. Math.*, 1983, **43**, No. 2 (Apr), 428~446.
 [2] R. Rangayyan, A. P. Dhawan *et al.*; *Appl. Opt.*, 1985, **24**, No. 23 (Dec), 4000~4012.
 [3] A. Papoulis; *IEEE Trans. Circuits System*, 1975, **CAS-22**, No. 9 (Sep), 735~742.
 [4] R. W. Gerchberg; *Opt. Acta*, 1974, **21**, No. 9 (Sep), 709~720.
 [5] 冯泉;《数值计算方法》, (国防工业出版社, 北京, 1978), 128~132.
 [6] C. M. Vest, I. Prikryl; *Appl. Opt.*, 1984, **23**, No. 14 (Jul), 2433~2440.
 [7] K. C. Tam; *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 1982, **NS-29**, No. 1 (Feb), 512~515.
 [8] 高益庆等;《光学学报》, 1988, **8**, No. 2 (Feb), 181~187.

Reconstruction of 3-D refractive index fields by fast Fourier transform iteration

GAO YI QING

DING HANQUAN

(*Nanchang College of Aeronautical Engineering*)

(*Beijing Institute of Aeronautic and Astronautics*)

(Received 3 July 1987; revised 6 October 1987)

Abstract

In this paper, the reconstruction precision of Fast Fourier Transform Iteration has been studied by computer simulation with the priori knowledge of refractive index fields. The effects of increased input data error and limited total viewing angle on the precision are discussed. As an example, it has been used to reconstruct the flame temperature fields, and the results are compared with thermocouple measurements.

Key words: image reconstruction; interferometric holography; tomography.