

圆柱面波的复惠更斯源展开

阮 颖 铮
(成都电讯工程学院)

提 要

本文提出一种分析波场问题的新方法——复惠更斯源展开法，它用具有复数坐标的次波源代替普通的次波源，根据复射线理论求解各次波源的贡献，并按叠加原理而构成初波源的场。文中讨论了二维波场的这种展开。只要适当选择展开参量，该方法相对于严格理论解的误差不大于1%。

关键词：复射线追踪；近轴近似；波的展开；惠更斯——菲涅耳原理。

一、引 言

经典的惠更斯——菲涅耳原理将初波源阵面(惠更斯面)上的点视为产生球面波的次波源^[1]，从叠加这些次波源的场得到初波源的场；基尔霍夫公式是该原理的数学表达，它为波场传播提供了一种有用的定量分析方法。但是，由于普通球面次波的非定向性叠加时，必须对整个惠更斯面进行积分，其数值计算往往工作量很大。

本文根据复射线理论^[2-6]，将次波源由实空间解析延伸到复空间，利用复射线追踪法或复射线近轴近似法需解各复源点的场，并叠加而得初波源的场。由于复源点场在实空间代表定向辐射的聚束波，在波束轴线两旁场按高斯函数急剧减小，因而积分可局限于惠更斯面的一小部分，并可用有限个离散的复源点场求和来代替连续积分，这就大大简化了波场问题的计算。

本文以自由空间各向同性线源实例，说明上述复惠更斯源展开概念。为便于阅读，第二节先简单介绍一下二维复点源场和复射线的特性，以及复射线追踪法和近轴近似法的场量表达式。

二、复点源场和复射线

考虑二维情况，设线源位于点 $S(x_s, y_s$ 或 $\rho_s, \varphi_s)$ ($\frac{\partial}{\partial Z} = 0$)。根据复射线理论，我们在源点 S 处定义一“波束矢量” \mathbf{b} ，它的模 b 称为波束宽度参量，它和 x 轴的夹角 α 称为波束指向角。为简化问题起见，这里假定 $\alpha = \varphi_s$ ，即波束矢量 \mathbf{b} 沿着源点坐标矢量 \mathbf{S} 的方向。于是，复点源 S 的坐标可表示为(见图 1)

$$\tilde{x}_s = x_s + jb \cos \alpha, \quad \tilde{y}_s = y_s - jb \sin \alpha \quad (1)$$

或

$$\tilde{\rho}_s = \sqrt{\tilde{x}_s^2 + \tilde{y}_s^2}, \quad \text{Re } \tilde{\rho}_s \geq 0 \quad (2a)$$

$$\tilde{\varphi}_s = \text{tg}^{-1}(\tilde{y}_s/\tilde{x}_s), \quad \tilde{\varphi}_s = \begin{cases} 0 & \tilde{y}_s = 0 \\ \pi/2 & \tilde{x}_s = 0 \end{cases} \quad (2b)$$

式中上波浪号“ \sim ”表示与复点源有关的复量。

连接复点源 \tilde{S} 与实观察点 $P(x, y)$ 的复射线长度为

$$\tilde{D} = \sqrt{(x - \tilde{x}_s)^2 + (y - \tilde{y}_s)^2}, \quad \text{Re } \tilde{D} \geq 0. \quad (3)$$

将(1)代入(3)可得

$$\tilde{D} = \sqrt{D^2 - b^2 - j2Db \cos \theta}, \quad (4)$$

式中 D 为实空间源点 S 到观察点 P 的距离矢量 \mathbf{D} 的模, θ 为距离矢量 \mathbf{D} 与波束矢量 \mathbf{b} 的夹角(见图1), 分别为

$$D = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}, \quad (5)$$

$$\theta = \cos^{-1}(D_0/D) \quad (6)$$

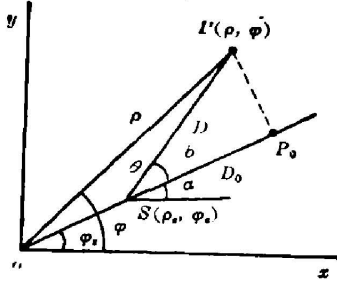


Fig. 1 Complex continuation of a line source

这里 D_0 表示距离矢量 \mathbf{D} 在波束矢量 \mathbf{b} 上的投影。

按照复射线追踪法, 在略去时间因子 $e^{-j\omega t}$ 时, 观察点 P 的场由下式给出

$$\tilde{G}(\rho, \varphi; \tilde{\rho}_s, \tilde{\varphi}_s) \sim \frac{C}{\sqrt{k\tilde{D}}} e^{jk\tilde{D}}, \quad (7)$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$ 为自由空间的波数, $C = -\frac{\omega\mu_0}{\sqrt{j}8\pi}$ 为表示场振幅的复常数, \tilde{D} 由(3)或(4)给出。

根据复射线近轴近似原理, 当观察点 P 离开波束轴线的距离 d 满足如下关系时

$$t^2 = \frac{d^2}{2(D_0^2 + b^2)} \ll 1. \quad (8)$$

P 点的场可根据 P_0 点的场通过近轴微扰而得, 即对轴向场进行复相位和振幅的校正^[5]

$$\tilde{G}(\rho, \varphi; \tilde{\rho}_s, \tilde{\varphi}_s) \approx \tilde{G}(\rho_0, \varphi_0; \tilde{\rho}_s, \tilde{\varphi}_s) e^{jk\Delta\tilde{D}} \quad (9)$$

式中 P_0 点的轴向场 $\tilde{G}(\rho_0, \varphi_0; \tilde{\rho}_s, \tilde{\varphi}_s)$ 和复相位校正因子 $\Delta\tilde{D}$ 分别为

$$\tilde{G}(\rho_0, \varphi_0; \tilde{\rho}_s, \tilde{\varphi}_s) \sim \frac{C}{\sqrt{kD_0}} e^{jkD_0}, \quad (10)$$

$$\Delta\tilde{D} \approx \frac{d^2}{2D_0}, \quad (11)$$

式中 D_0 是复点源 \tilde{S} 到轴上观察点 P_0 的复射线距离, d 为满足近轴条件(8)的近轴距离。考虑到此时 $\theta = 0$ 和 $D = D_0$, 由(4)化简可得

$$\tilde{D}_0 = D_0 - jb. \quad (12)$$

将(10)、(11)和(12)代入(9)可得复射线近轴场

$$\tilde{G}(\rho, \varphi; \tilde{\rho}_s, \tilde{\varphi}_s) \approx \frac{C}{\sqrt{k(D_0 - jb)}} e^{jk(1-t^2)} e^{jkD_0(1+t^2)}. \quad (13)$$

上式表明复点源近轴场是沿 \mathbf{b} 方向传播的一个高斯波束, 随近轴距离 d 按指数规律剧减。

根据图1所示几何关系可得

$$d = \rho \sin(\varphi - \varphi_s), \quad (14)$$

$$D_0 = \rho \cos(\varphi - \varphi_s) - \rho_s, \quad (15)$$

$$t^2 = \frac{\rho^2 \sin^2(\varphi - \varphi_s)}{2\{[\rho \cos(\varphi - \varphi_s) - \rho_s]^2 + b^2\}} \quad (16)$$

三、圆柱面波的复惠更斯源展开

假定线初波源位于自由空间坐标原点，并取半径为 ρ_s 的圆柱波阵面为惠更斯面（见图 2）。对于各复次波源，我们作如下规定：1) 各复点源波束矢量 \mathbf{b} 的模取同一实数 $b (b > 0)$ ；2) 各点的波束矢量方向取为通过该点的初始射线方向，即取波束方向角为 $\alpha = \varphi_s$ 。这样，各复次波源在 P 点的场可由 (7) 或 (13) 式给出。叠加所有复点源的场，便可表示初波源在 P 点的场。

随复次波源位置而变化的坐标参量称为展开变量。上述场的叠加即是对展开变量 φ_s 的积分。故观察点 $P(\rho, \varphi)$ 的场为

$$u(\rho, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\varphi_s) \tilde{G}(\rho, \varphi; \varphi_s) d\varphi_s, \quad (17)$$

式中 $\tilde{G}(\rho, \varphi; \varphi_s)$ 即是由复射线追踪法 (7) 或近轴近似法 (13) 所给出的复点源场； $\Phi(\varphi_s)$ 称为复惠更斯源展开系数或权函数，通常它是展开变量的一个复值函数，由初波源的特性所决定。显然，对于各向同性线源，权函数是一个与 φ_s 无关的复常数 Φ_0 ，它可通过与已知的线源场渐近解相比较而得到。

根据积分渐近计算理论^[7]，(17) 式可由孤立的一阶鞍点积分渐近地表示为（见附录 A）

$$u(\rho, \varphi) \sim \frac{O\Phi_0}{k} \sqrt{\frac{2\pi(\rho - \rho_s - jb)}{\rho[b\rho + j(b^2 + \rho_s^2 - \rho\rho_s)]}} e^{k[\rho + j(\rho - \rho_s)]}, \quad (k \rightarrow \infty). \quad (18)$$

另一方面，自由空间线源场可由其格林函数的渐近表达式给出为

$$u(\rho, \varphi) \sim \frac{O}{\sqrt{k\rho}} e^{jk\rho}, \quad (k\rho \gg 1). \quad (19)$$

比较 (18) 和 (19) 式可得到展开系数

$$\Phi(\varphi_s) = \Phi_0 = \sqrt{\frac{k[b\rho + j(b^2 + \rho_s^2 - \rho\rho_s)]}{2\pi(\rho - \rho_s - jb)}} e^{-kb - jk\rho_s}. \quad (20)$$

将 (18) 和 (20) 代入 (17) 式，可得复惠更斯源展开的积分表达式（近轴近似法）

$$u(\rho, \varphi) = e \sqrt{\frac{b\rho + bj(b^2 + \rho_s^2 - \rho\rho_s)}{2\pi(\rho - \rho_s - jb)}} \times \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp[-kbt^2 + jkP(1+t^2)\cos(\varphi - \varphi_s) - jk\rho_s t^2]}{\sqrt{\rho \cos(\varphi - \varphi_s) - \rho_s - jb}} d\varphi_s, \quad (21)$$

式中 t^2 由 (16) 式给出。

事实上，由于复点源场的聚束特性，(21) 式中的积分限可由 $(-\pi, \pi)$ 改为 $(\varphi - \varphi_M, \varphi + \varphi_M)$ ，这里 φ_M 表示变量 φ_s 的实际展开范围，并且 (21) 式的积分可用求和代替，于是

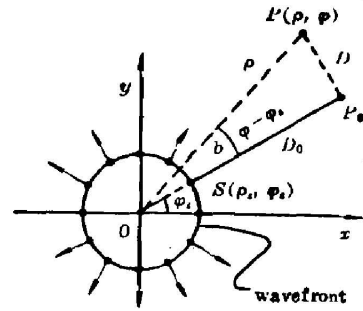


Fig. 2 A line source expanded into complex Huygens Wavelets

$$u(\rho, \varphi) = C \Delta\varphi \sqrt{\frac{b\rho + j(b^2 + \rho_s^2 + \rho\rho_s)}{2\pi(\rho - \rho_s - jb)}} \times \sum_{n=N_*-N}^{N_*+N} \frac{\exp[-kb\Gamma_n^2 + jk\rho(1 + \Gamma_n^2)\cos(n\Delta\varphi) - jk\rho_s\Gamma_n^2]}{\sqrt{P\cos(n\Delta\varphi) - g_s - jb}}, \quad (22)$$

$$\Gamma_n^2 = \frac{\rho^2 \sin^2(n\Delta\varphi)}{2[(\rho \cos(n\Delta\varphi) - \rho_s)^2 + b^2]}, \quad (23)$$

式中 $\Delta\varphi$ 表示相邻的离散复点源间展开变量的增量, N_* 和 N 分别表示观察点坐标 φ 和展开范围 φ_M 对强量 $\Delta\varphi$ 的量化值

$$N_* = INT\left(\frac{\varphi}{\Delta\varphi} + 0.5\right), \quad N = INT\left(\frac{\varphi_M}{\Delta\varphi} + 0.5\right), \quad (24)$$

式中函数 INT 表示取整数运算。

复惠更斯源展开法在数学上可依据信号分析中的 Gabor 展开理论^[8~10], 它将一个给定的时间信号展开为一组不同时刻和不同频率的高斯单元信号。原则上说, 只要以空间分布代替时间变化, 以复点源场分布(近轴区为高斯函数)代替高斯单元信号, 便可按 Gabor 展开法得到复惠更斯源展开, 其展开系数则可用文献[9]中的方法根据初波源在惠更斯面上的场结构来求得。

复惠更斯源展开法在物理上可解释为若干非均匀平面波(即高斯波)的叠加^[11]。事实上, 在 $b/\lambda \rightarrow 0$ 和 $b/\lambda \rightarrow \infty$ 的极端情况下, 复点源的高斯波束场分别化为球面波场和平面波场, 因而复惠更斯源展开分别变为普通的惠更斯—菲涅耳积分和平面波谱展开。

四、展开参数的选择

利用复惠更斯源展开法进行波场的计算时, (22)式中的某些自由参量应予以适当选择, 它们是: 1) 线源到观察点的距离 ρ ; 2) 作为惠更斯面的初波源阵面的曲率半径 ρ_s ; 3) 复点源波束宽度参量 b ; 4) 展开变量的增量 $\Delta\varphi$; 5) 展开范围 φ_M 或离散复次波源的总数 $2N+1$; 6) 计算机门限电平值 a_0 , 当复次波源场的贡献(相对于波束轴线上的最大贡献)小于 a_0 时, 计算机自动终止求和的循环程序。 a_0 决定于所要求的计算精度, 亦即容许的最大相对误差 ξ

$$\xi = \left| \frac{u_r - u}{u_r} \right| \times 100\% \quad (25)$$

式中 u_r 为 (19) 式给出的渐近参考解, u 为复惠更斯源展开法的计算结果。数值分析表明, 展开参量大小如选择得当, ξ 可不大于 1%。

五、结 束 语

本文根据复射线理论和惠更斯—菲涅耳原理提出一种分析波场问题的新方法——复惠更斯源展开法, 并通过最简单的线源实例说明了这种展开概念。但是, 展开系数的确定是一个问题。本文采用与已知严格解比较的方法显然不适用于任意分布的初始源。这种方法的完善还有待进一步的研究工作。

附 录

由孤立的一阶鞍点渐近计算

(17)式的积分值

对于高频场,积分(17)式可写为沿最陡下降路径积分的标准形式^[7]

$$I(k) = \int_{SDP} f(\psi) \exp[kq(\psi)] d\psi, \quad (k \rightarrow \infty) \quad (A1)$$

式中

$$\psi = \phi - \phi_0, \quad (A2)$$

$$f(\psi) = \frac{O\Phi(\varphi - \psi)}{\sqrt{k(\rho \cos \psi - \rho_0 - j\delta)}}, \quad (A3)$$

$$q(\psi) = b(1-t^2) + j(\rho \cos \psi - \rho_0)(1+t^2), \quad (A4)$$

$$t^2 = \frac{\rho^2 \sin^2 \psi}{2[(\rho \cos \psi - \rho_0)^2 + \delta^2]}. \quad (A5)$$

积分(A1)的一阶渐近近似值可根据其一阶孤立鞍点给出^[7]:

$$I(k) \sim \sqrt{\frac{-2\pi}{kq''(\psi_0)}} f(\psi_0) \exp[kq(\psi_0)], \quad (k \rightarrow \infty) \quad (A6)$$

式中鞍点 ψ_0 由 $q'(\psi) = \frac{dq(\psi)}{d\psi} = 0$ 确定, $q''(\psi_0) = \frac{d^2q(\psi)}{d\psi^2} |_{\psi=\psi_0}$; 将(A4)对 ψ 求导数可得

$$q'(\psi) = -b\left(2t \frac{dt}{d\psi}\right) + j(\rho \cos \psi - \rho_0)\left(2t \frac{dt}{d\psi}\right) - j(1+t^2)\rho \sin \psi = 0. \quad (A7)$$

另一方面,将(A5)两边对 ψ 求导数可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \psi} \frac{dt}{d\psi} &= \frac{\rho^2 \sin \psi \cos \psi [(\rho \cos \psi - \rho_0)^2 + \delta^2] + \rho^2 \sin^3 \psi (\rho \cos \psi - \rho_0)}{[(\rho \cos \psi - \rho_0)^2 + \delta^2]^2} \\ &= \rho^2 \sin \psi \cos \psi [(\rho \cos \psi - \rho_0)^2 + \delta^2] + \rho^2 \sin^3 \psi (\rho \cos \psi - \rho_0) \end{aligned} \quad (A8)$$

将(A8)代入(A7)式,发现各项均包含有因子 $\sin \psi$,因此满足(A7)式的鞍点条件为

$$\sin \psi_0 = 0, \text{ 或 } \psi_0 = 0, \varphi = \varphi_0. \quad (A9)$$

在鞍点 $\psi_0 = 0$ 处,有

$$q(0) = b + j(\rho - \rho_0), \quad (A10)$$

$$f(0) = \frac{O\Phi(\varphi)}{\sqrt{k(\rho - \rho_0 - j\delta)}}, \quad (A11)$$

$$q''(0) = -\rho \frac{b\rho + j(\delta^2 + \rho_0^2 - \rho\rho_0)}{(\rho - \rho_0)^2 + \delta^2}. \quad (A12)$$

(A11)中 $\Phi(\varphi)$ 代表观察点所在方向的权函数值。根据已知初波源的对称性,有 $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi_0) = \Phi_0$ 。将(A10)、(A11)和(A12)代入(A6)即可得第三节中的积分渐近表达式(18)。

参 考 文 献

- [1] C. Huygens; "Treatise on Light", (translated into English by S. P. Thompson, Dover, New York, 1962), 1690.
- [2] J. B. Keller and W. Streifer; *J. O. S. A.*, 1971, 61, No. 1 (Jan), 40~43.
- [3] J. W. Ra, et al; *SIAM J Appl. Math.*, 1974, 24, No. 3 (May), 396~413.
- [4] L. B. Felsen; "Philips Research Reports", (Special Issue in honor of C. J. Bouwkamp 30, 1975), 169~184.
- [5] Y. Z. Ruan and L. B. Felsen; *J. O. S. A.*, 1986, A3, No. 4 (Apr), 566~579.
- [6] Ruan Yingzheng; *Proc. ISAE'85*, (Beijing, China, Academic Publishers, 1985, (Aug)), 655~660.
- [7] L. B. Felsen and N. Marcuvitz; "Radiation and Scattering of Waves", (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973, Chap. 4.
- [8] D. Gabor; *J. Inst. Elec. Eng.*, 1946, 93, No. 11 (Nov), 429~457.
- [9] C. W. Helstrom; *IEEE Trans. IT*, 1966, IT-12, No. 1 (Jan), 81~82.
- [10] M. J. Bastiaans; *Proc. IEEE*, 1980, 68, No. 4 (Apr), 538~539.
- [11] L. M. Brekhovskikh; "Waves in Layered Media", (Second Edition, Academic Press, New York, 1980), Chap. 1.

Complex Huygens wavelet expansion and its parameter selection

RUAN YINGZHENG

(*Chengdu Institute of Radio Engineering*)

(Received 2 May 1986; revised 2 February 1987)

Abstract

A new method for analysis and evaluation of wave fields, complex Huygens wavelet expansion, is presented, which replaces the conventional Huygens wavelet by a secondary source with complex coordinates, evaluates the field from each wavelet by complex ray theory, and superposes the individual contributions to construct the wavefield from the primary source. The method of this expansion is illustrated. In comparison with exact reference solution, the error of the method is less than 1%, provided that the expansion parameters are properly chosen.

Key words: complex ray tracing; paraxial approximation; wave expansion; Huygens' principle.

On the complex Huygens expansion for cylindrical wavelets.