

单模光纤中的脉冲展宽

曹庄琪 杨傅子 陈英礼 方俊鑫

(上海交通大学应用物理系)

提 要

本文给出了光源频谱是洛仑兹分布的高斯脉冲,在单模光纤中传输时因一阶色散而展宽的近似理论。得到了在光纤中传输的脉冲光功率的系综平均值和输出脉冲宽度的均方根值的近似解析公式。数值分析的结果表明,所给出的公式与数值解的最大偏差小于5%。

关键词: 单模光纤; 脉冲展宽。

一、引 言

单模光纤中的色散,限制了光纤传输的带宽。在工作波长远离 $1.3\mu\text{m}$ 的大多数情况下,单模光纤中的色散通常由传播常数 β 对频率 ω 的二阶导数($d^2\beta/d\omega^2$) (一阶色散)来表示。当工作波长接近于 $1.3\mu\text{m}$ 时,一阶色散趋于零,这时需考虑二阶色散($d^3\beta/d\omega^3$)的作用。

所有的光源都有一定的频谱,而光源频谱是影响光纤中输出脉冲展宽的重要因素^[1,2]。对于频谱分布是高斯形的光源, Marcuse^[3]作了详细的分析。但大多数实际光源其频谱分布不是高斯形而是洛仑兹形^[4]。对于这种光源,用传播常数 β 展开为泰勒级数的方法,无法得到单模光纤中脉冲展宽的解析公式,遇到的主要困难是广义积分无法解析地求解。

本文通过仔细地调整参数,用一个高斯函数和一个指数函数的叠加,来代替洛仑兹函数。求得在只考虑一阶色散的情况下的近似解析式。

二、光纤中传输的脉冲光功率

考虑一个振幅和相位随机起伏的部分相干光源,其场强为如下形式:

$$\psi_0(t) = A(t) \exp(i\omega_0 t), \quad (1)$$

式中 $A(t)$ 是随时间 t 变化的复振幅, ω_0 是圆频率。假如随机过程是平稳的,则 $A(t)$ 与其取不同时刻 t' 的复共轭 $A^*(t')$ 的乘积的系综平均值叫做该光源的自相关函数 $R(t-t')$

$$R(t-t') = \langle A(t) A^*(t') \rangle. \quad (2)$$

对大多数实际光源,自相关函数是指数衰减函数,即有

$$R(u) = P_0 \exp(-w|u|), \quad (3)$$

式中 P_0 是光源未加调制时的功率输出, w 是衰减系数,而 $u=t-t'$ 。已知光源的功率谱密度是自相关函数的傅里叶变换

$$|\phi_0(\omega_0 - \omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(u) \exp[i(\omega_0 - \omega)u] du. \quad (4)$$

把(3)式代入(4)式,可得功率谱密度

$$|\phi_0(\omega_0 - \omega)|^2 = \begin{cases} \frac{P_0}{\pi} \frac{w}{w^2 + (\omega_0 - \omega)^2}, & (w \neq 0) \\ P_0 \delta(\omega - \omega_0), & (w = 0) \end{cases} \quad (5)$$

如果该光源被下述高斯信号脉冲所调制,即

$$S(t) = S_0 \exp[-(t/T)^2], \quad (6)$$

S_0 为振幅, T 是该信号降到 S_0 的 $(1/e)$ 时的半宽度,则在光纤中传输的脉冲光功率的系综平均值可写为^[3]

$$\langle P(z, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_0(\omega_0 - \omega')|^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega - \omega') \exp\{i[(\omega - \omega')t - (\beta - \beta')z]\} d\omega \right|^2 d\omega', \quad (7)$$

式中 $F(\omega - \omega')$ 是调制函数(6)的平方根的傅里叶变换

$$F(\omega - \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^{1/2}(t) \exp[-i(\omega - \omega')t] dt \\ = \left(\frac{S_0}{2\pi}\right)^{1/2} T \exp\left[-\frac{1}{2} T^2 (\omega - \omega')^2\right]. \quad (8)$$

在只考虑一阶色散的情况下

$$\beta - \beta' = \left\{ \dot{\beta}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\beta}_0 [(\omega - \omega_0) + (\omega' - \omega_0)] \right\} (\omega - \omega'), \quad (9)$$

$$\dot{\beta}_0 = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}, \quad \ddot{\beta}_0 = \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}.$$

把(5)、(8)、(9)式代入(7)式,得到

$$\langle P(z, t) \rangle = \left\{ \begin{array}{l} \frac{P_0 S_0}{\pi V} \frac{1}{\sqrt{1+4D^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^2}{V^2+x^2} \exp\left\{\frac{[(t-\dot{\beta}_0 z - 2DxT)/T]^2}{1+4D}\right\} dx, (V \neq 0) \\ \frac{P_0 S_0}{\sqrt{1+4D^2}} \exp\left\{\frac{[(t-\dot{\beta}_0 z)/T]^2}{1+4D}\right\}, (V=0) \end{array} \right\} \\ V = Tw, \quad D = \ddot{\beta}_0 z / (2T^2), \quad x = (\omega' - \omega_0)T. \quad (10)$$

公式(10)表示光源频谱为洛仑兹形分布的高斯脉冲,在单模光纤中传输的光功率的系综平均值的表示式。在 $V=0$ 的情况下,洛仑兹函数退化为 δ 函数*,在 $V \neq 0$ 情况下无法求解析解。同时,利用该式也不能求出脉冲宽度均方根值的解析形式。为了克服这个困难,我们作以下近似。

三、洛仑兹函数的近似代换

令

$$\frac{V^2}{V^2+x^2} \approx A \exp\left(-\frac{x^2}{aV^2}\right) + B \exp\left(-\frac{|x|}{bV}\right), \quad (11)$$

其中 A 、 B 、 a 、 b 是可调参数。取 $x=0$ 、 V 、 $2V$ 、 $3V$ 四点,使方程两边相等,可得关于 A 、 B 、 a

* 该式即是文献[3]中的(27)式。

和 b 的四个高次方程。通过数值逼近方法,可分别求出 A 、 B 、 a 和 b 四个未知数,于是得到

$$\frac{V^2}{V^2+x^2} \approx 0.3370 \exp\left(-\frac{x^2}{1.2073V^2}\right) + 0.6630 \exp\left(-\frac{|x|}{1.5850V}\right). \quad (12)$$

图 1 是 $V=1$ 时, 方程(12)两边两个函数的图像。实线代表方程右边的高斯函数与指数函数的叠加, 虚线代表方程左边的洛伦兹函数。显然, 两个函数的图像符合得较好。

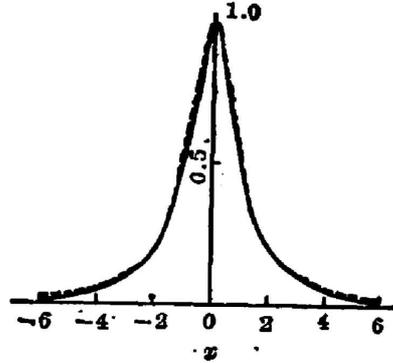


Fig. 1 Comparison between Lorentz function and Gaussian function combined with an exponential function —, $0.3370 \exp(-x^2/1.2073 V^2) + 0.6630 \exp(-|x|/1.5850 V)$; - - -, $V^2/(V^2+x^2)$

四、经函数变换后的光功率近似表达式

对于公式(10), 有 $D=0$ 和 $D \neq 0$ 两种情况, 下面分别加以讨论:

(1) $D=0$, 即一阶色散为零, 这时(10)式变为

$$\begin{aligned} \langle P(z, t) \rangle &= \frac{P_0 S_0}{\pi V} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^2}{V^2+x^2} \exp\left[-\left(\frac{t-\beta_0 z}{T}\right)^2\right] dx \\ &= P_0 S_0 \exp\left[-\left(\frac{t-\beta_0 z}{T}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (13)$$

(2) $D \neq 0$, 这时把(11)式代入(10)式得

$$\begin{aligned} \langle P(z, t) \rangle &= \frac{P_0 S_0}{\sqrt{\pi} V} \left\{ AV \sqrt{\frac{a}{1+4D^2(1+aV^2)}} \exp\left[-\frac{(t-\beta_0 z)^2/T^2}{1+4D^2(1+aV^2)}\right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-A}{2D} \exp\left(\frac{1+4D^2}{16D^2 V^2 b^2}\right) \right. \\ &\quad \left. \times \left[\exp\left(\frac{(t-\beta_0 z)/T}{2DVb}\right) \operatorname{erfc}(\xi_1) \exp\left(\frac{(t-\beta_0 z)/T}{2DVb}\right) \operatorname{erfc}(\xi_2) \right] \right\}, \\ \operatorname{erfc}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{z}\right) dv, \\ \xi_1 &= \frac{\sqrt{2} \{1+4D^2 - [4DVb(t-\beta_0 z)/T]\}}{4DVb\sqrt{1+4D^2}}, \\ \xi_2 &= \frac{\sqrt{2} \{1+4D^2 + [4DVb(t-\beta_0 z)/T]\}}{4DVb\sqrt{1+4D^2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $A=0.3370$, $a=1.2073$, $b=1.5850$, $\operatorname{erfc}(\xi)$ 为余误差函数。(14)式即光纤中传输的脉冲光功率的近似表达式, 其精度在最后一节通过数值分析再加以说明。

五、脉冲的均方根宽度

脉冲的均方根宽度为^[3] $\sigma = [\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2]^{1/2}$ 。脉冲到达光纤中 z 处的平均时间 $\langle t \rangle$ 和方均时间 $\langle t^2 \rangle$ 为

$$\langle t \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} tP(z, t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} P(z, t) dt}, \quad \langle t^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 P(z, t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} P(z, t) dt}. \quad (15)$$

由(15)式可以看出, 必须求解三个积分, 而这三个积分可通过交换积分次序的办法求出, 把(11)式直接代入(10)式, 经过冗长的推导, 可得

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P(z, t) dt &= \frac{P_0 S_0 T}{\sqrt{\pi}} [A\sqrt{\pi a} + 2(1-A)b], \\ \int_{-\infty}^{\infty} tP(z, t) dt &= \frac{P_0 S_0 T}{\sqrt{\pi}} [A\sqrt{\pi a} + 2(1-A)b] \beta_0 z, \\ \int_{-\infty}^{\infty} t^2 P(z, t) dt &= \frac{P_0 S_0 T}{\sqrt{\pi}} [A\sqrt{\pi a} + 2(1-A)b] \\ &\quad \times \left[\frac{T^2(1+4D^2)}{2} + (\beta_0 z)^2 + 4T^2 D^2 V^2 \left(\frac{a}{2} + 2b^2 \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\therefore \sigma = \frac{T}{\sqrt{2}} \{1 + 4D^2 [1 + (a + 4b^2) V^2]\}^{1/2}. \quad (17)$$

显然, 当 $b \rightarrow 0$ 时, 即(11)式中的指数函数趋于零时, (17)式还原为光源频谱是高斯函数的情况, 当 $a=1$ 时, 则(17)式完全与文献[3]中所得结果一致。

把 a, b 的数值代入(17)式, 并直接用物理量表示, 得

$$\sigma = \frac{T}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \frac{(\beta_0 z)^2}{T^4} (1 + 10.05 T^2 W^2) \right\}^{1/2}. \quad (18)$$

在 $z=0$ 处, 输入脉冲的均方根宽度 $\sigma_0 = T/\sqrt{2}$ 。从而可知输出脉冲的相对展宽为

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \left[1 + \frac{(\beta_0 z)^2}{T^4} (1 + 10.05 T^2 W^2) \right]^{1/2}. \quad (19)$$

由此可知: 脉冲展宽随色散 β_0 , 光纤长度 z 和光源频谱宽度 W 的增加而增加; 随脉冲(调制)的宽度增加而减小。与高斯分布的光源相比, 洛仑兹分布的光源, 其脉冲相对展宽较大。

六、近似理论与数值分析结果的比较

由以上近似公式, 代入数值便可计算光纤中传输的脉冲光功率, 以归一化的 $\langle P(z, t) \rangle$ 为纵坐标, $[(t - \beta_0 z)/T]$ 为横坐标, 可画出光纤中传输的光脉冲的形状。图 2(a) 是由(10)式计算的单色光源 ($V=W=0$) 的输入脉冲, 而图 2(b) 是经色散 ($D=3$) 以后, 被展宽了的脉冲形状。

为了验证近似公式(14)的正确, 用数值方法计算了公式(10)的积分。图 3 是 $V=1$ 时不同色散情况下(10)式和(14)两式的图像, 实线表示(14)式的结果, 而虚线代表(10)式的数

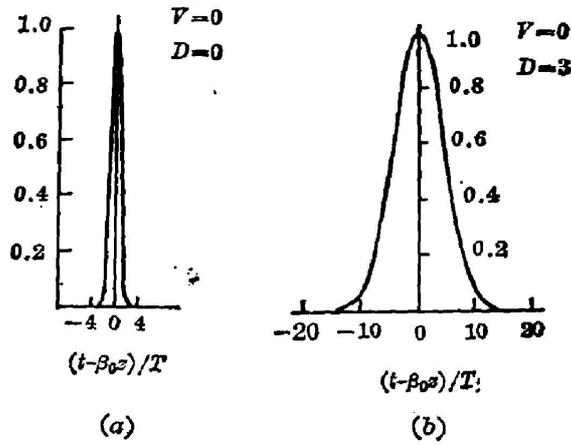


Fig. 2

- (a) Gaussian input pulse;
 (b) Broadened pulse caused by dispersion ($D=3$)

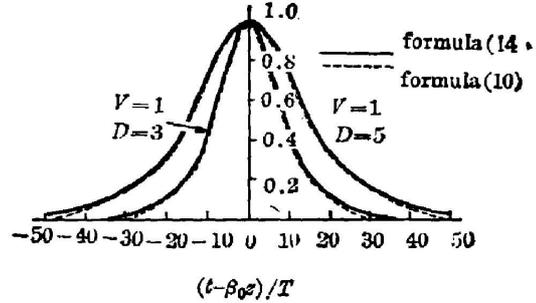


Fig. 3 Numerical comparison of approximate expression (14) and formula (10)

值积分。从图 3 可以看出,若把数值积分的结果看作精确解,则近似理论与精确解除在脉冲尾部有较大的偏差外,其它大部分区域符合得很好。

参 考 文 献

- [1] F. P. Kapron; *Electron. Lett.*, 1977, **13**, No. 4 (Feb), 96~99.
 [2] M. Miyag; S. Nishida; *Appl. Opt.*, 1979, **18**, No. 13 (Jul), 2237~2240.
 [3] D. Marcuse; *Appl. Opt.*, 1980, **19**, No. 10 (May), 1653~1660.
 [4] 叶培大;《光纤理论》, (知识出版社, 上海, 1985) 209.

Pulse broadening in single-mode fibers

CAO ZHANGQI, YANG FUZI, CHEN YINGLI AND FANG JUNXING
 (Department of Applied Physics, Shanghai Jiao-tong University)

(Received 7 January 1987; revised 10 April 1987)

Abstract

An approximate theory is presented which involves the broadening of propagated Gaussian pulses in single-mode optical fibers by the first-order dispersion. The light source is assumed to have a Lorentz spectral distribution. Formulas are derived for the ensemble average of the pulse power and the rms pulse width. The approximate expressions are quite precise in comparison with the numerical calculations with deviations between the approximate expressions and the numerical calculations smaller than 5%.

Key words: single-mode fiber; pulse broadening.