

用光电二极管列阵测干涉条纹周期的精度分析

孙海音 梁培辉 沃敏政
(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

分析了用1024单元的光电二极管列阵测量干涉条纹周期时,采样密度对测量精度的影响。采样数据的量化为256,每个干涉条纹的采样点数从10至30左右时,测量精度最高,可优于 2×10^{-5} 。量化小时,最佳采样密度变小。

关键词:光电二极管列阵;干涉条纹周期。

一、引 言

近年来,随着光电传感器的发展,在光学测量中经常使用光电二极管列阵进行等距分立量化采样^[1]。文献[2]结合对脉冲激光波长计的研究,提出了一种用分立采样法高精度地测量干涉条纹周期的方法。文献[3]分析了噪音对测量精度的影响。但是,在采样点总数一定的条件下,被采样的干涉条纹数多,则每个条纹的采样密度低。反之,被采样的干涉条纹数少,则每个条纹的采样密度就高。这样就产生如下问题:

- (1) 怎样选择被采样的条纹数才能获得尽可能高的测量精度?
- (2) 采样数据量化不同时又该怎样选择被采条纹数?

文献[2]、[3]没有回答这些问题。据我们所知,至今也没有其它文章讨论这个问题。本文对这些问题作了理论分析,得到了明确的结论。

二、测量原理

1. 求干涉条纹周期

求光电二极管列阵的各采样点对光强的反应灵敏度如图1所示^[4]。设第*i*个采样点中心的坐标为 x_{i0} ,为了计算方便,在本文中取相邻两个采样点中心的间距 $x_{i+1} - x_i = 1$ 。以列阵作为横坐标,每一干涉条纹可写成 $(A'/2) \{ \cos[(2\pi/p)(x - E)] + 1 \}$ 。其中*p*为干涉条纹的周期。*E*为初相位,是一个小于1的数。第*i*个采样点的输出为

$$\begin{aligned}
 f(x_i) = & \int_{x_i - \frac{\Delta_1}{2}}^{x_i + \frac{\Delta_1}{2}} K_1(x) \frac{A'}{2} \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x + E) \right] + 1 \right\} dx \\
 & + \int_{x_i - \frac{\Delta_2}{2}}^{x_i + \frac{\Delta_2}{2}} \frac{A'}{2} \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x - E) \right] + 1 \right\} dx \\
 & + \int_{x_i + \frac{\Delta_1}{2}}^{x_i + \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\Delta_2}{2}} K_2(x) \frac{A'}{2} \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x - E) \right] + 1 \right\} dx,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$K_1(x) = \frac{2x}{\Delta_2} + 1 - \frac{2}{\Delta_2} \left(x_i - \frac{\Delta_1}{2} \right), \quad K_2(x) = -\frac{2x}{\Delta_2} + 1 + \frac{2}{\Delta_2} \left(x_i + \frac{\Delta_1}{2} \right),$$

式中 $K_1(x)$, $K_2(x)$ 分别是图 1 中二条斜线的方程。积分 (1) 式并整理, 得到

$$\begin{aligned}
 f(x_i) = & \frac{A'\Delta_2}{4} + \frac{A'\Delta_1}{2} + \frac{A'p^2}{\pi^2\Delta_2} \\
 & \times \sin \left\{ \frac{2\pi}{p} \left[\frac{\Delta_1 + (\Delta_2/2)}{2} \right] \right\} \\
 & \times \sin \left(\frac{2\pi\Delta_2}{4p} \right) \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x_i - E) \right],
 \end{aligned} \tag{2}$$

当 $\Delta_2 \rightarrow 0$, $\Delta_1 \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{f(x_i)}{(\Delta_1 + \Delta_2)} \rightarrow \frac{A'}{2} \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x_i - E) \right] + 1 \right\}.$$

给定一个 p 后 (2) 式可写成

$$\begin{aligned}
 f(x_i) = & \frac{A}{2} \cos \left[\frac{2\pi}{p} (x_i - E) \right] + B, \\
 \frac{A}{2} = & \frac{A'p^2}{\pi^2\Delta_2} \sin \left\{ \frac{2\pi}{p} \left[\frac{\Delta_1 + (\Delta_2/2)}{2} \right] \right\} \sin \left(\frac{2\pi\Delta_2}{4p} \right), \\
 B = & \frac{A'\Delta_2}{4} + \frac{A'\Delta_1}{2}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

输出的采样信号如图 2 所示。和原信号相比只是在纵向方向有个压缩和平移, 周期和初相位并没改变。所以, 求干涉条纹周期的问题就转化成求分立的采样信号的周期。

2. 数据处理原理

求出每个采样信号的中点坐标, 再用最小二乘法处理得到采样信号的周期。求采样信号的中点坐标的办法是这样的, 在计算机上建立一个“滤波器”, 如图 3 所示。其宽度约等

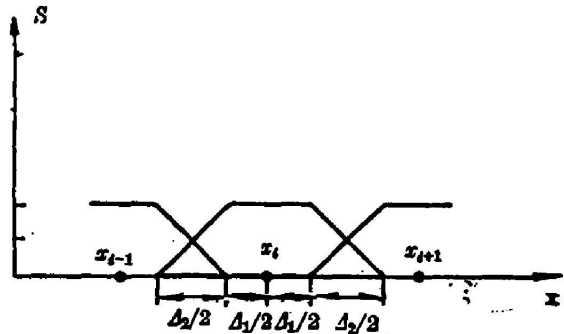


Fig. 1 Aperture response function of photodiode array

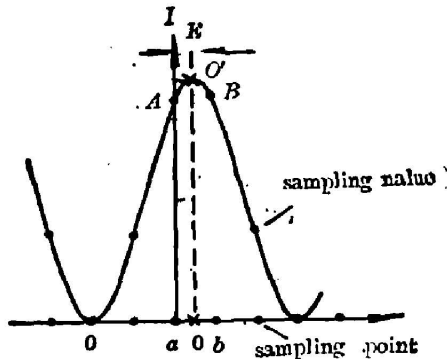


Fig. 2 Sampling signal of interference fringe

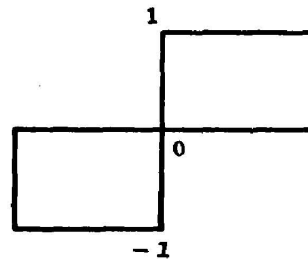


Fig. 3 The filter

于采样信号的周期,把“滤波器”重合在采样信号上,并相对横移,可得到一系列输出数据。当“滤波器”中线在图 2 中 a 采样点上时其输出为

$$LS = S_{aAc} - S_{aAd} = -2S_{aAO'O} < 0, \quad (4)$$

式中 S_{aAc} 等等是有关曲线所围的面积(见图 2)。当“滤波器”的中线和图 2 中的 b 点重合时,其输出为

$$ID = S_{bBc} - S_{bBd} = 2S_{bBO'O} > 0. \quad (5)$$

当 LS 、 ID 异号时,信号的对称中线 $\overline{O'O}$ 就在 a 、 b 点之间了。设 a 点在列阵上的位置 x_a 是已知的,又

$$\frac{LS}{LS-ID} = \frac{-2S_{aAO'O}}{-2S_{aAO'O} - 2S_{bBO'O}} = \frac{2S_{aAO'O}}{2S_{aAb}}. \quad (6)$$

但面积 $S_{aAO'O}$ 可近似写成 $A \cdot \overline{aO}$, 其中 A 为曲线中点的高。而从图 2 中可见 $\overline{aO} = E$ 。这样,有 $S_{aAO'O} \approx AE$ 。同样有 $S_{aAb} \approx A \cdot \overline{ab} = A$ 。代入(6)式得 $[LS/(LS-ID)] = E$ 。 $z_a = x_a + E$ 就是采样信号中点(极大值)的坐标。同样,可求出另一个中点(极小值)的坐标。求出一列采样信号的中点坐标 z_i 后,用最小二乘法处理,可得到采样信号(也就是干涉条纹)的周期 p , 为

$$p = \frac{N \sum_{i=1}^N iz_i - \sum_{i=1}^N i \sum_{i=1}^N z_i}{N \sum_{i=1}^N i^2 - \left(\sum_{i=1}^N i \right)^2}, \quad (7)$$

式中 N 为采样信号中点的总数。

三、被采样的条纹数和测量精度的关系

LS 的数学形式为

$$LS = \sum_{i=-\frac{M}{2}}^0 f(x_i) - \sum_{i=0}^{\frac{M}{2}} f(x_i), \quad (8)$$

式中 $(M/2) = \text{INT}(p/2)$, 是半个干涉条纹的采样点数。把(3)式代入(8)式,经过计算、整理可得

$$LS = -A \sin \frac{2\pi}{p} E \sin \frac{M\pi}{2p} \sin \frac{\pi}{p} \left(\frac{M}{2} + 1 \right) \csc \frac{\pi}{p}, \quad (9)$$

同样,可得

$$ID = \sum_{i=-\frac{M}{2}+1}^1 f(x_i) - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}+1} f(x_i) = A \sin \left[\frac{2\pi}{p} (1-E) \right] \sin \left[\frac{M\pi}{2p} \left(\frac{M}{2} + 1 \right) \right] \csc \frac{\pi}{p}, \quad (10)$$

$$\frac{LS}{LS-ID} = \frac{\sin(2\pi E/p)}{2 \cos[(\pi/p)(2E-1)] \sin(\pi/p)}. \quad (11)$$

由于没考虑采样数据的量化, (11)式中不出现信号幅度 A 。求出的采样信号的中点位置的误差可定义为

$$dz(E_i, p) = E_i - \frac{LS}{LS-ID} = E_i - \frac{\sin(2\pi E_i/p)}{2 \cos[(\pi/p)(2E_i-1)] \sin(\pi/p)}, \quad (12)$$

式中 E_i 为第 i 个采样信号的初相位。 $dz(E_i, p) \sim E_i$ 曲线如图 4 所示。可见,误差和采样初相位有关。 E_i 取 0.2、0.8 时 $|dz(E_i, p)|$ 有极值 $dz_{\max}(p)$ 。 $dz_{\max}(p) \sim p$ 曲线如图 5 曲线

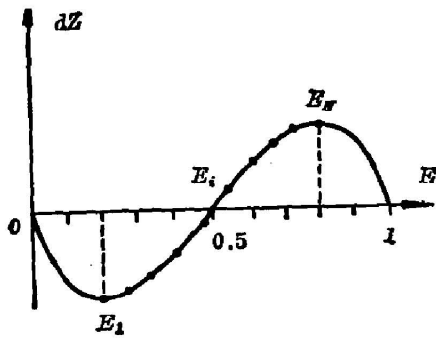


Fig. 4 Relation between the error dz of the middle point position of a fringe and the sampling phase E

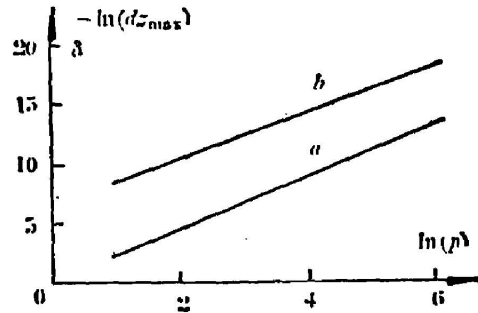


Fig. 5

- (a) Relation between dz_{\max} and p when the sampling data quantization is neglected
 (b) Relation between δ and p when the sampling data quantization is neglected

所示。由于条纹周期 p 一般不是整数，一系列条纹中每一个条纹的采样初相位 E_i 都不同，有

$$E_i = E_1 + i\Delta p, \quad (13)$$

式中 E_1 为第一个条纹的采样初相位， $\Delta p = p - \text{INT}(p)$ 。 p 的微小变化会引起 E_i ，进而引起 $dz_{\max}(E_i, p)$ 的很大变化，把一系列采样信号中点坐标组合起来求条纹周期 p 时，其误差为 dp 。微分(7)式，经整理后可写成

$$dp = \frac{(N/2) \sum_{i=1}^N [(z_i - 1 - N) dz_i]}{N \sum_{i=1}^N i^2 - \left(\sum_{i=1}^N i\right)^2}. \quad (14)$$

其相对误差 (dp/p) 为

$$\frac{dp}{p} = \frac{(N/2) \sum_{i=1}^N [(z_i - 1 - N) dz_i]}{N \sum_{i=1}^N i z_i - \sum_{i=1}^N i \sum_{i=1}^N z_i}. \quad (15)$$

由于 $dz_i(E_i, p)$ 比 z_i 小得多， z_i 可看成是常数。要 $|dp/p|$ 取极值，必须满足条件

(1) 当 $i < (N+1)/2$ 时， $dz_i(E_i, p) < 0$ ，当 $i > (N+1)/2$ 时， $dz_i(E_i, p) > 0$ ；

(2) 在符合(1)的前提下， $|dz_i(E_i, p)|$ 尽量大。满足上述条件的 $dz_i(E_i, p)$ 的分布如图4所示。从(12)式中可求出这些 $dz_i(E_i, p)$ 的值。代入(15)式就可得到：在采样点总数一定的条件下，求干涉条纹周期的最大相对误差和被测条纹数的关系。常用的光电二极管阵列的采样点数为 1024，每个干涉条纹有两个中点，共有 $N = \text{INT}(2 \times 1024/p)$ 个中点。图5中曲线 b 表示了 $\delta = |dp/p|_{\max} \sim p$ 曲线。从曲线 b 可知，不考虑采样数据的量化时，被采样的条纹数越少，即每个条纹的采样点数越多，测得的条纹的相对误差越小。条纹周期为 500 时，求出周期的最大相对误差小于 6×10^{-8} 。

四、采样数据量化时被测条纹数和测量精度的关系

实际的光电二极管阵列输出的采样数据都是经过量化的。对应纵坐标上的量化区间，

可在横坐标上划出一系列对应的区间,如图 6 所示,称这些区间为同值采样区间。这样, (9)、(10)式可写成

$$LS = \sum_{i=-M/2}^0 \text{INT} \left(\frac{A}{2} \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{p} (i-E) \right] + B \right\} \right) - \sum_{i=0}^{M/2} \text{INT} \left(\frac{A}{2} \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{p} (i-E) \right] + B \right\} \right), \quad (16)$$

$$ID = \sum_{i=-\frac{M}{2}+1}^1 \text{INT} \left(\frac{A}{2} \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{p} (i-E) \right] + B \right\} \right) - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}+1} \text{INT} \left(\frac{A}{2} \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{p} (i-E) \right] + B \right\} \right), \quad (17)$$

求出的条纹中点坐标的误差仍可写成

$$dz'(E, p) = E - \frac{LS}{LS-ID}. \quad (18)$$

考虑 E 从 0 到 1 变化。当 $E=0$ 时,从(16)式有 $LS=0$,得 $dz'(0, p)=0$ 。当 E 值变大,而又没引起一个采样点跨越两个同值采样区间的分界线时,各采样点的值保持不变, LS 仍等于 0。当 E 继续变大,引起一个采样点跨越两个同值采样值区间的分界线时, (16)、(17)式的前一项的值增加了 1, 或后一项的值减小了 1。得 $LS=1$, $LS-ID \rightarrow (LS+1) - (ID+1) = LS-ID \approx 2A$, 这一项总是等于 $2A$, 和初相位无关, 见(6)式。这时有

$$dz'(E, P) = E - (1/2A). \quad (19)$$

$dz'(E, P) \sim E$ 曲线发生拐折。 E 从 0 变到 1, 可得到如图 7 所示的调制曲线。曲线上每一个拐折都是由一个采样点跨越一条同值采样区间的分界线而引起的。由于 $E \leq 1$, 每条分界线只能被一个采样点跨越。而分界线的总数等于 $2A$, 其中 A 为量化值。当 $E=1$ 时, 从(18)式得 $dz(E, p) = 1 - 2A \frac{1}{2A} = 0$, 因为 $E=0$ 和 $E=1$ 时的状态实际上是一样的。从图 7 中可见 $dz'(E, p) \sim E$ 曲线是以 $E=0.5$ 为对称中心的。

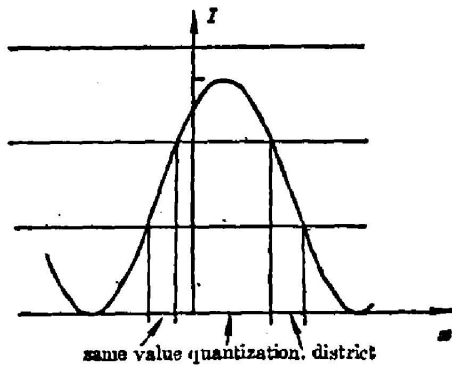


Fig. 6 Distribution of the same value quantization district

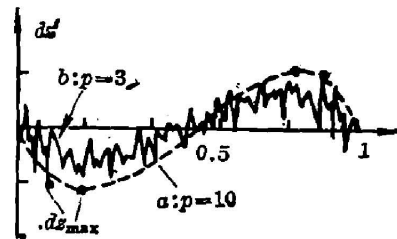


Fig. 7 Relation between dz' and E when the sampling data quantization is 256

当 p 很小, 即每个条纹的采样点数很少时两个采样点之间有很多同值采样区间, 这时得到的 $dz'(E, p) \sim E$ 曲线和不考虑量化时的 $dz(E, p) \sim E$ 曲线相仿, 分别见图 7 曲线 a 和图 4。 p 较大时的量化现象较明显。图 7 中曲线 a 、 b 表示了 $A=256$, $p=3$ 、10 时的 $dz'(E, p)$

$\sim E$ 曲线。在每一根曲线上都可找到一个极大值 dz'_{\max} 。这样,又可作出 $dz'_{\max}(p) \sim p$ 曲线,如图 8 曲线 a 所示。曲线的左边部分和图 5 所示曲线的左边部分相仿。曲线右边部分逐渐上升。即一个干涉条纹的采样点数多时,定出的中点位置的可能的最大误差 dz'_{\max} 反而较大。这是因为 p 大时量化现象更明显,使 $dz'(E, p) \sim E$ 曲线的无规性增大了。从图 7 中可见 dz'_{\max} 对应的 E 也是无规的。我们在 $i < (N+1)/2$ 时,取 $dz'_i = -dz'_{\max}/2$; $i > (N+1)/2$ 时, $dz'_i = dz'_{\max}/2$, 代入(15)式,把得到的结果定义为 $\delta' = |dp/p|_{\max}$, 可得到如图 8 曲线 b 所示的 $\delta' = |dp/p|_{\max} \sim p$ 曲线,这曲线表示了当采样点总数为 1024、采样数据的量化 $A=256$ 时,求干涉条纹周期所得结果的最大相对误差与干涉条纹周期(被采干涉条纹数)的关系。采样点总数改变时,图 8 的曲线 b 形状不变,但有上下的平移。

从图 8 曲线 b 中可发现, p 有个最佳取值范围,在这个范围内 $|dp/p|_{\max}$ 较小。这就是我们要找的结果。图 8 中曲线 b 中的 p 取在 10 至 30 之间最好。这时的 $|dp/p|_{\max}$ 约为 2×10^{-5} 。图 8 曲线 c 表示了采样点总数为 1024, 量化 $A=64$ 时的 $|dp/p|_{\max} \sim p$ 曲线。可以发现,量化 A 越小,对应的 $|dp/p|_{\max} \sim p$ 曲线的右端就翘得越高,同时 p 的最佳取值区间也越朝左移动。

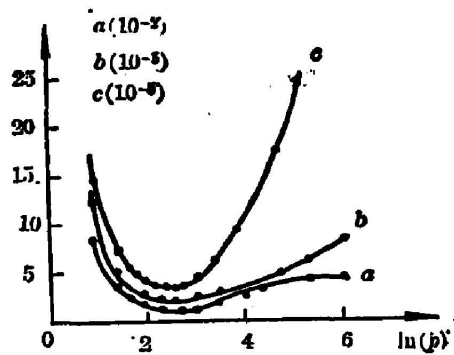


Fig. 8

- (a) Relation between dz'_{\max} and p when the sampling data quantization is 256;
 (b) The maximum error figure when the sampling number is 1024 and the sampling data quantization is 256;
 (c) The maximum error figure when the sampling number is 1024 and the sampling data quantization is 64

五、小 结

通过上面的分析,可以得到结论:用一定数量的等间距采样点对一系列干涉条纹进行分立量化采样,来求干涉条纹的周期时,所得结果的精度与采样初相位,被采样的条纹数,即每个条纹的周期有很大关系。不考虑量化时 p 越大,精度越高。取采样点总数为 1024, $p=500$ 时,对应的精度可优于 6×10^{-8} 。 $p=5$ 时,对应的精度约为 6×10^{-5} 。二者差 1000 倍。考虑量化后 p 有一个最佳取值范围。量化 $A=256$ 时, p 取 10 至 30 最好对应的精度约为 2×10^{-5} 。而 $p=500$ 、5 时,对应的精度分别为 8×10^{-5} 、 4×10^{-5} 。量化越小,整个数据处理的精度越低,且 p 的最佳区间朝 p 值小的方向移动越远。

这个结论可用在激光波长计的数据处理中和其他干涉条纹的测量中。这个分析问题的方法也可为其他测量工作提供参考。

参 考 文 献

- [1] 梁培辉等;《中国激光》,1984, 11, No. 5 (May), 310~312.
 [2] J. J. Snyder; *Appl. Opt.*, 1980, 19, No. 8 (15 Apr), 1223~1225.
 [3] M. B. Morris *et al.*; *Appl. Opt.*, 1984, 23, No. 21 (1 Nov), 3862~3868.
 [4] 梁培辉;《物理》,1986, 15, No. 9 (Sep), 538.

Analysis of the accuracy of the period of interference fringes measured by a photodiode array

SUN HAIYIN, LIANG PEIHUI AND WO MINZHENG

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 6 January 1987; revised 5 March 1987)

Abstract

In the paper, we analyse the effect of the sampling density on the measuring accuracy of the period of interference fringes by using a photodiode array of 1024 elements. We can get the highest measuring accuracy of about 2×10^{-5} when the sampling number of one fringe is from 10 to 30 and the sampling data quantization is 256. The less the sampling data quantization is, the smaller the best sampling density will be.

Key words: photodiode array; period of interference fringe.